NASLOV ORIGINALA

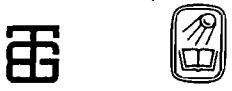
И. Н. БРОНШТЕЙН, К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК
ПО
МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

ИЗДАНИЕ ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Под редакцией *Г. ГРОШЕ* и *В. ЦИГЛЕРА*

Перевод с немецкого



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТОЙБНЕР»
Лейпциг 1979

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

REDAKTORI HRVATSKOGA IZDANJA

PROF. DR. ING. D. BLANUŠA
pravi član Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti

i

PROF. DR. B. PAVKOVIĆ
redovni profesor Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu

I. N. BRONŠTEJN — K. A. SEMENDJAJEV

MATEMATIČKI PRIRUČNIK

ZA INŽENJERE I STUDENTE

PREVELI S RUSKOG

B. PAVKOVIĆ — I. UREMOVIĆ — Z. VISTRIČKA

TEHNIČKA KNJIGA

ZAGREB

Znak: 9104 P

Izdanje:
I. N. Bronštejn — K. A. Semendjajev
MATEMATIČKI PRIRUČNIK

Preveli s ruskog:
B. Pavković, I. Uremović i Z. Vistrička

Redaktori prijevoda:
Akademik Prof. dr. Danilo Blanuša
Prof. dr. Boris Pavković

Izdavač:
Izdavačko-trgovačko poduzeće
TEHNIČKA KNJIGA
Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača:
Ing. Zvonimir Vistrička

Urednik izdanja:
Ing. Srećko Šoštarić

Tisak:
BIROGRAFIKA, Subotica

Tiskano u 5000 primjeraka

Tisak dovršen:
U LIPNJU 1991.

© originala: Izdateljstvo "Nauka" Moskva 1990.
© prijevoda: B. Pavković, I. Uremović, Z. Vistrička 1991.

YU ISBN 86-7059-145-6

Djelo je izdano uz novčanu pomoć SIZ-a znanosti Hrvatske kao društveno vrijedna knjiga.

PREDGOVOR NOVOM IZDANJU

Ovo se izdanje Priručnika bitno razlikuje od prethodnog. U prvom redu treba napomenuti da je ono znatno prošireno i usklađeno s najnovijim ruskim izdanjem. Nova poglavlja jesu „Skupovi, relacije, preslikavanja", „Varijacioni račun i optimalno upravljanje", „Matematičko programiranje" i „Računalska tehnika". Na taj način Priručnik ovime postaje suvremeniji i u njemu čitatelj može naći matematičke tehnike koje se u zadnjih desetak godina u svakodnevnoj praksi sve više i više primjenjuju, to su optimalno upravljanje, linearno programiranje i njene metode. Ukazano je i na tipične primjene i zadaće te metode programiranja. Navedene su i primjene elektroničkih i analognih računala. Treba naglasiti da su i dijelovi sadržaja iz prethodnog izdanja znatno prošireni, kao na primjer gradivo o Fourierovim i Laplaceovim transformacijama, matematička statistika itd.

Ovime se postiglo da je Priručnik postao ne samo suvremeniji, već i sve neophodnije pomagalo u svakodnevnoj praksi naših matematičara, studenata i inžinjera.

B. Pavković

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Matematički priručnik I. N. Bronštejna i K. A. Semendjajeva poznat je ne samo u Sovjetskom Savezu gdje je doživio 9 izdanja nego je i kod nas naišao na vrlo povoljan odaziv kod stručnjaka i studenata kojima su potrebna viša matematička sredstva. Malen broj kod nas raspoloživih primjeraka ruskog izdanja kao i jezične teškoće priječili su da korist, koju može pružiti to vrijedno djelo, dođe do punog izražaja. Zato je zacijelo bila zaslužna inicijativa Tehničke knjige u Zagrebu da taj priručnik učini pristupačnim čitateljima kojima je materinski jezik hrvatskosrpski.

Nažalost na tom jeziku postoje dvije, u mnogome različite, matematičke terminologije koje su se razvile u okviru historijski uvjetovanih prilika. Prijevod je izrađen u onoj terminologiji koja je uobičajena u SRH, napose na Sveučilištu u Zagrebu, no sigurno je da će se tim tekstom sasvim lako poslužiti i oni koji su navikli na terminologiju upotrebljavanu, recimo, na Univerzitetu u Beogradu. Doduše, svaki je naš stručnjak navikao na jednu od tih dviju terminologija, ali se bez teškoća snalazi i u drugoj.

Pri redigiranju prijevoda ispravljene su neke manje greške, napose su korigirane dvije slike na kojima je Arhimedova zavojnica bila neispravno prikazana.

Vjerujem da će ovaj spretno sastavljen priručnik s bogatim i dobro odabranim sadržajem iz područja više matematike i numeričke analize biti velika pomoć onima koji se matematikom služe i onima koji je žele naučiti.

D. Blanuša

S A D R Ž A J

P R V I D I O

TABLICE I GRAFOVI

I. Tablice

		Strana
A.	Tablice osnovnih (elementarnih) funkcija	21
1.	Neke konstante koje nam često trebaju	21
2.	Kvadrati, kubi, korijeni	22
3.	Potencije cijelih brojeva od $n=1$ do $n=100$	44
4.	Recipročne vrijednosti	46
5.	Faktorijele i njihove recipročne vrijednosti	48
6.	Neke potencije brojeva 2, 3 i 5	49
7.	Dekadski logaritmi	51
8.	Antilogaritmi	53
9.	Tablica za kvadratnu interpolaciju	55
10.	Prirodne vrijednosti trigonometrijskih funkcija	56
11.	Eksponencijalne, hiperbolne i trigonometrijske funkcije	68
12.	Eksponencijalne funkcije (za x od 1,6 do 10,00)	72
13.	Prirodni logaritmi	74
14.	Opseg kruga s promjerom d	78
15.	Površina kruga s promjerom d	80
16.	Elementi kružnog segmenta	82
17.	Preračunavanje stupanja u radijane	87
18.	Proporcionalni dijelovi	88
B.	Tablice specijalnih funkcija	90
19.	Gama-funkcija	90
20.	Besselove (cilindrične) funkcije	91
21.	Legendreovi polinomi (kugline funkcije)	93
22.	Eliptički integrali	94
23.	Poissonova razdioba	97
24.	Normalna razdioba (gustoća razdiobe vjerojatnosti)	99
25.	Normalna razdioba (funkcija razdiobe)	100
26.	χ^2-razdioba	102
27.	t-razdioba Studenta	104

Strana

28. z-razdioba 105
29. F-razdioba 106
30. Kritični brojevi za Wilcoxonov test 112
31. λ-razdioba Kolmogorova-Smirnova 113

C. Integrali i sume redova: 1. Tablica suma nekih redova brojeva (363); 2. Tablica razvoja nekih funkcija u redove potencija (398); 3. Tablica neodređenih integrala (425); 4. Tablica nekih određenih integrala (498).

II. Grafovi

A. Elementarne funkcije 114
1. Polinomi 114
2. Razlomljene racionalne funkcije 117
3. Iracionalne funkcije 122
4. Eksponencijalne i logaritamske funkcije 124
5. Trigonometrijske funkcije 129
6. Ciklometrijske funkcije 132
7. Hiperbolne funkcije 133
8. Area-funkcije 135

B. Važnije krivulje 136
9. Krivulje trećeg reda 136
10. Krivulje četvrtog reda 138
11. Cikloide 143
12. Zavojnice (spirale) 147
13. Neke druge krivulje 150

DRUGI DIO

ELEMENTARNA MATEMATIKA

I. Približno računanje

1. Pravila približnog računanja 152
2. Približne formule 156
3. Logaritamsko računalo 156

II. Algebra

A. Identičke pretvorbe 165
1. Osnovni pojmovi 165
2. Cijeli racionalni izrazi 166
3. Razlomljeni racionalni izrazi 168
4. Iracionalni izrazi; Pretvaranje potencija i korijena 171
5. Eksponencijalni i logaritamski izrazi 173

Strana

B. Jednadžbe 176
6. Pretvaranje algebarskih jednadžbi u normalni oblik 176
7. Jednadžbe prvog, drugog, trećeg i četvrtog stupnja 178
8. Jednadžbe n-tog stupnja 182
9. Transcendentne jednadžbe 185
10. Determinante 189
11. Rješavanje sistema linearnih jednadžbi 192
12. Sistemi jednadžbi višega stupnja 199

C. Dopunske glave algebre 200
13. Nejednadžbe 200
14. Progresije, konačni redovi i srednje vrijednosti (sredine) 205
15. Faktorijela i Gama-funkcija 207
16. Kompleksije 209
17. Binomni teorem 210

III. Geometrija

A. Planimetrija 212
1. Likovi 212

B. Stereometrija 218
2. Pravci i ravnine u prostoru 218
3. Prostorni uglovi 218
4. Uglasta tijela ili poliedri 219
5. Obla tijela 223

IV. Trigonometrija

A. Ravninska trigonometrija 228
1. Trigonometrijske funkcije 228
2. Osnovne trigonometrijske formule 231
3. Sinusne veličine 234
4. Rješavanje trokuta 236
5. Ciklometrijske funkcije (inverzne trigonometrijske funkcije) ili arcus-funkcije 239

B. Sferna trigonometrija 242
6. Geometrija na kugli (sferi) 242
7. Rješavanje sfernih trokuta 243

C. Hiperbolna trigonometrija 245
8. Hiperbolne funkcije 245
9. Osnovne formule hiperbolne trigonometrije 246

Strana

10. Inverzne hiperbolne funkcije 248
11. Geometrijsko određivanje hiperbolnih funkcija 249

TREĆI DIO

ANALITIČKA I DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

I. Analitička geometrija

A. Geometrija u ravnini 250
1. Osnovni pojmovi i formule 250
2. Pravac 254
3. Kružnica 257
4. Elipsa 259
5. Hiperbola 261
6. Parabola 264
7. Krivulje drugog reda (čunjosječnice) 266
B. Geometrija u prostoru 270
8. Osnovni pojmovi i formule 270
9. Ravnina i pravac u prostoru 276
10. Plohe drugog reda (normalne jednadžbe) 284
11. Plohe drugog reda (opća teorija) 288

II. Diferencijalna geometrija

A. Ravninske krivulje 290
1. Načini definiranja krivulja 290
2. Lokalni elementi krivulje 291
3. Osobite točke 298
4. Asimptote 303
5. Opće ispitivanje krivulje iz njezine jednadžbe 304
6. Evolute i evolvente 306
7. Ovojnice porodice krivulja 307
B. Prostorne krivulje 309
8. Načini definicije krivulja 309
9. Popratni trobrid 309
10. Zakrivljenost i torzija 313
C. Plohe 316
11. Načini definicije ploha 316
12. Tangencijalna ravnina i normala 317
13. Linijski element plohe 320
14. Zakrivljenost plohe 321
15. Pravčaste i razmotljive plohe 325
16. Geodetske linije na plohi 325

Strana

ČETVRTI DIO

OSNOVI MATEMATIČKE ANALIZE

I. Uvod u analizu

1. Realni brojevi 326
2. Nizovi i njihovi limesi 328
3. Funkcije jedne varijable 331
4. Limes funkcije 338
5. Neizmjerno male veličine 344
6. Neprekinutost i prekinutost funkcija 345
7. Funkcije od više varijabli 350
8. Redovi brojeva 359
9. Redovi funkcija 366

II. Diferencijalni račun

1. Osnovni pojmovi 371
2. Tehnika diferenciranja 376
3. Zamjena varijabli u diferencijalnim izrazima 385
4. Osnovni teoremi diferencijalnog računa 387
5. Određivanje maksimuma i minimuma 391
6. Razvoj funkcija u redove potencija 395

III. Integralni račun

A. Neodređeni integrali 407
1. Osnovni pojmovi i teoremi 407
2. Opća pravila integriranja 409
3. Integriranje racionalnih funkcija 412
4. Integriranje iracionalnih funkcija 418
5. Integriranje trigonometrijskih funkcija 422
6. Integriranje drugih transcendentnih funkcija 425
7. Tablica neodređenih integrala 425
B. Određeni integrali 473
8. Osnovni pojmovi i teoremi 473
9. Izračunavanje određenih integrala 477
10. Primjena određenih integrala 483
11. Nepravi integrali 489
12. Integrali ovisni o parametri 496
13. Tablica nekih određenih integrala 498

Strana

C. Krivuljni, višestruki i plošni integrali 503
14. Krivuljni integrali prvog tipa 504
15. Krivuljni integrali drugog tipa 506
16. Dvostruki i trostruki integrali 512
17. Izračunavanje višestrukih integrala 514
18. Primjena višestrukih integrala 521
19. Plošni integrali prvog reda 523
20. Plošni integrali drugog tipa 525
21. Formule Stokesa, Greena i Ostrogradskog-Gaussa 529

IV. Diferencijalne jednadžbe

1. Opći pojmovi 531

A. Obične diferencijalne jednadžbe 532
2. Jednadžbe prvog reda 532
3. Jednadžbe višega reda i sistemi jednadžbi 545
4. Rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima 550
5. Sistemi linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima 553
6. Operatorska metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi 557
7. Linearne jednadžbe drugog reda 563
8. Rubni problemi 569

B. Parcijalne diferencijalne jednadžbe 572
9. Jednadžbe prvog reda 572
10. Linearne jednadžbe drugog reda 579

PETI DIO

DOPUNSKA POGLAVLJA ANALIZE

I. Kompleksni brojevi i funkcije kompleksne varijable

1. Osnovni pojmovi 599
2. Algebarske operacije 601
3. Elementarne transcendentne funkcije 604
4. Jednadžbe krivulja u kompleksnom obliku 609
5. Funkcije kompleksnih varijabli 612
6. Jednostavnija komformna preslikavanja 618
7. Integrali u kompleksnom području 620
8. Razvoj analitičkih funkcija u redove potencija 623

Strana

II. Vektorski račun

A. Vektorska algebra i vektorske funkcije skalara 627
1. Osnovni pojmovi 627
2. Množenje vektora 630
3. Kovarijantne i kontravarijantne koordinate vektora .. 636
4. Geometrijske primjene vektorske algebre 637
5. Vektorska funkcija skalarne varijable 638

B. Teorija polja 639
6. Skalarno polje 639
7. Vektorsko polje 642
8. Gradijent 646
9. Krivuljni integral i potencijal u vektorskom polju 648
10. Plošni integrali 651
11. Prostorno deriviranje 653
12. Divergencija vektorskog polja 654
13. Rotacija vektorskog polja 654
14. Operatori ∇ (Hamiltonov), $(a\,\nabla)$ i Δ (Laplaceov) 656
15. Integralni teoremi 658
16. Bezvrtložna i solenoidalna vektorska polja 659
17. Laplaceova i Poissonova jednadžba 661

III. Skupovi, relacije, preslikavanja

A. Osnovni pojmovi matematičke logike 663
1. Algebra logike (algebra sudova, logika sudova) 663
2. Predikati 670

B. Osnovni pojmovi teorije skupova 673
3. Skupovi, elementi 673
4. Podskupovi 674

C. Operacije sa skupovima 675
5. Unija i presjek skupova 675
6. Razlika, simetrična razlika, komplementi skupova 675
7. Euler-Vennovi dijagrami 676
8. Kartezijev (Descartesov) produkt skupova 677
9. Poopćena unija i presjek 678

D. Relacije i preslikavanja 680
10. Relacije 680
11. Relacija ekvivalencije 681

Strana

12. Relacija uređaja 682
13. Preslikavanja 684
14. Nizovi i porodice skupova 686
15. Operacije i algebre 686

E. Potentnost skupa 688

16. Ekvipotentnost 688
17. Prebrojivi i neprebrojivi skupovi 688

IV. Varijacijski račun i optimalno upravljanje

A. Varijacijski račun 689

1. Formuliranje zadaće, primjeri i osnovni pojmovi 689
2. Euler-Lagrangeova teorija 692
3. Hamilton-Jacobijeva teorija 709
4. Obrat zadaće varijacijskog računa 711
5. Numeričke metode 713

B. Optimalno upravljanje 719

6. Osnovni pojmovi 719
7. Princip maksimuma Pontrjagina 721
8. Diskretni sistemi 733
9. Numeričke metode 735

V. Fourierovi redovi, Fourierov integral i Laplaceova transformacija

A. Fourierovi redovi 739

1. Opći pojmovi 739
2. Tablica nekih razvoja u Fourierov red 743
3. Numerička harmonijska analiza 751

B. Fourierov integral 754

4. Opći pojmovi 754
5. Tablice Fourierovih transformata 759

C. Laplaceova transformacija 774

6. Opći pojmovi 774
7. Primjena Laplaceove transformacije za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi uz neke početne uvjete 777
8. Tablica inverznih Laplaceovih transformacija razlomljeno-linearnih funkcija 780

Strana

ŠESTI DIO

TEORIJA VJEROJATNOSTI I MATEMATIČKA STATISTIKA

I. Teorija vjerojatnosti

A. Slučajni događaji i njihove vjerojatnosti 785

1. Slučajni događaji 785
2. Aksiomi teorije vjerojatnosti 788
3. Klasična definicija vjerojatnosti 789
4. Uvjetna vjerojatnost 790
5. Totalna vjerojatnost. Bayesova formula 792

B. Slučajne veličine 793

6. Diskretne slučajne veličine 794
7. Neprekinute slučajne varijable 797

C. Momenti razdiobe 799

8. Diskretni slučaj 799
9. Neprekinuti slučaj 802

D. Slučajni vektori (višedimenzionalne slučajne varijable) 804

10. Diskretni slučajni vektori 805
11. Neprekinuti slučajni vektori 806
12. Granične razdiobe 807
13. Momenti višedimenzionalne slučajne varijable 808
14. Uvjetna razdioba 810
15. Nezavisnost slučajnih varijabli 810
16. Regresijska zavisnost 811
17. Funkcije slučajnih varijabli 813

E. Karakteristične funkcije 814

18. Svojstva karakterističnih funkcija 815
19. Formula invertiranja i teorem o jedinstvenosti 816
20. Granični teorem za karakteristične funkcije 817
21. Funkcije izvodnice 818
22. Karakteristične funkcije višedimenzionalnih slučajnih varijabli 819

F. Granični teoremi 819

23. Zakon velikih brojeva 819
24. Moivre-Laplaceov granični teorem 821
25. Centralni granični teorem 822

Strana

II. Matematička statistika

A. Uzorci ... 824
1. Histogram i empirička funkcija razdiobe ... 825
2. Funkcija uzorka ... 827
3. Neke važne razdiobe ... 828

B. Procjena parametara ... 829
4. Svojstva točkovnih promjena ... 830
5. Metode nalaženja procjena ... 831
6. Uvjerljive procjene ... 835

C. Provjera hipoteze (testovi) ... 837
7. Formulacija zadaće ... 837
8. Opća teorija ... 838
9. t-kriterij ... 839
10. F-kriterij ... 840
11. Wilcoxonov test ... 841
12. χ^2-kriterij ... 842
13. Slučaj dopunskih parametara ... 844
14. Kriterij suglasnosti Kolmogorova—Smirnova ... 846

D. Korelacija i regresija ... 846
15. Procjena korelacijskih i regresivnih karakteristika pomoću uzoraka ... 846
16. Provjera hipoteze $r=0$ kada statistički skup ima normalnu razdiobu ... 848
17. Opća zadaća regresije ... 849

SEDMI DIO

MATEMATIČKO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje

A. Formulacija zadaće linearnog programiranja i simpleks metoda 851
1. Opća formulacija zadaće, geometrijska interpretacija i rješenje zadaća sa dvije varijable ... 851
2. Kanonski oblik. Prikaz vrhova u simpleks tablici ... 856
3. Simpleks metoda pri zadanoj početnoj tablici ... 859
4. Nalaženje početnog vrha ... 864
5. Degenerirani slučaj i njegovo razmatranje pomoću simpleks metode ... 867

Strana

6. Dualnost u linearnom programiranju ... 869
7. Modificirane metode. Dodatna izmjena zadaće ... 871

B. Transportna zadaća ... 876
8. Linearna transportna zadaća ... 876
9. Nalaženje početnog rješenja ... 879
10. Transportna metoda ... 881

C. Tipične primjene linearnog programiranja ... 886
11. Korištenje proizvodnih kapaciteta ... 886
12. Zadaća o smjesama ... 887
13. Razdioba; Sastavljanje plana; Usporedba ... 887
14. Kroj; Planiranje smjena; Pokriće ... 889

D. Parametarsko linearno programiranje ... 890
15. Formulacija zadaće ... 890
16. Metoda rješavanja slučaja „jednoparametarske funkcije cilja" ... 890

E. Cjelobrojno linearno programiranje ... 897
17. Matematička formulacija zadaće; geometrijska interpretacija ... 897
18. Gomorijeva metoda presjeka ... 898
19. Metoda grananja ... 901
20. Usporedba metoda ... 904

OSMI DIO

ELEMENTI NUMERIČKIH METODA I NJIHOVE PRIMJENE

I. Elementi numeričkih metoda

A. Pogreške i vrste pogrešaka ... 906
B. Numeričke metode ... 908
1. Rješavanje linearnih sistema jednadžbi ... 908
2. Linearne zadaće o svojstvenim vrijednostima ... 916
3. Nelinearne jednadžbe ... 919
4. Sistemi nelinearnih jednadžbi ... 922
5. Aproksimacija ... 924
6. Interpolacija ... 931
7. Približno računanje integrala ... 941
8. Približno deriviranje ... 949
9. Diferencijalne jednadžbe ... 951

Strana

C. Realizacija numeričkih modela u elektroničkim računalima . 963
10. Kriteriji za izbor metode 963
11. Metoda upravljanja 965
12. Izračunavanje vrijednosti funkcija 966

D. Nomografija 970
13. Veza između dvije varijable; funkcijske skale 970
14. Pravčasti i mrežni dijagrami 971

E. Obrada empirijskog numeričkog materijala 974
15. Metoda najmanjih kvadrata 974
16. Drugi načini izjednačenja 978

II. Računska tehnika

A. Elektronička računala 980
1. Uvodne napomene 980
2. Predočavanje informacija i memorija računala 981
3. Kanali izmjene 983
4. Program 983
5. Programiranje 984
6. Upravljanje računalom 988
7. Matematička programska podrška 988
8. Obavljanje radova računalom 989

E. Analogna računala 990
9. Princip uređaja analogne računske tehnike 990
10. Analitički elementi analognog računala 990
11. Princip programiranja za rješavanje sistema običnih diferencijalnih jednadžbi 994
12. Kvalitativno programiranje 996

Abecedno kazalo 999
Univerzalne oznake 1018

PRVI DIO

TABLICE I GRAFOVI

I. TABLICE

Interpolacija. Većina dalje odštampanih tablica daje vrijednosti funkcija s četiri značajne znamenke za vrijednosti troznamenkastih argumenata. U slučaju, kada je argumenat zadan s većom točnošću, a traženu vrijednost funkcije ne možemo naći neposredno iz tablica, treba izvršiti interpolaciju. Najjednostavnija je *linearna interpolacija*, pri kojoj dopuštamo da je prirast funkcije proporcionalan prirastu argumenta. Ako zadana vrijednost argumenta x leži između tabličnih vrijednosti x_0 i $x_1 = x_0 + h$, kojima odgovaraju vrijednosti funkcija $y_0 = f(x_0)$ i $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, tada dobivamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta.$$

Interpolacijsku korekturu $\frac{x - x_0}{h}\Delta$ možemo lako izračunati pomoću tablice proporcionalnih dijelova na str. 88 i 89, a također i iste tablice koja je priložena priručniku. Te tablice daju produkte Δ (od 11 do 90) sa 0,1, 0,2, ... 0,9.

Primjeri: 1) $1{,}6754^2$? U tablicama (str. 25) nalazimo: $1{,}67^2 = 2{,}789$; $1{,}68^2 = 2{,}822$; $\Delta = 33$*. Iz tablice proporcionalnih dijelova: $0{,}5 \cdot 33 = 16{,}5$; $0{,}04 \cdot 33 = 1{,}3$;

$$\frac{x - x_0}{h}\Delta = 16{,}5 + 1{,}3 \approx 18; \qquad 1{,}6754^2 = 2{,}807.$$

2) tg 79°24′? U tablicama (str. 59 i 89) nalazimo: tg 79°20′ = 5,309; tg 79°30′ = 5,396; $\Delta = 87$; $0{,}4 \cdot 87 \approx 35$, tg 79°24′ = 5,344.

Pogreška linearne interpolacije ne prelazi jedinicu reda posljednje značajne znamenke, samo ako se dvije susjedne diferencije Δ_0 i Δ_1 ne razlikuju za više od 4 jedinice (posljednje znamenke).

* Razliku Δ i korekciju obično izražavamo u jedinicama mjesne vrijednosti posljednje značajne znamenke, ne pripisujući decimalni zarez, ni nule ispred nje.

Ako taj uvjet nije ispunjen (kao npr. u tablici tg x pri $x > 80°$, str. 59) moramo se poslužiti složenijim interpolacijskim formulama. U većini slučajeva zadovoljava *kvadratna interpolacija* po Besselu:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

gdje je

$$k = \frac{x - x_0}{h}, \text{ a } k_1 = \frac{k\,(1-k)}{4};$$

veličinu k_1 nalazimo u tablici na str. 55.

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δ_{-1}
x_0	y_0	Δ_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δ_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

Primjer: Treba naći tg 85°33′ (tablica na str. 59). Nađemo ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; korektura je jednaka

$$0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143;$$

$$\text{tg } 85°33' = 12{,}849.$$

x	tg x	Δ
85°20′	12,251	
		455
85°30′	12,706	
		491
85°40′	13,197	
		530
85°50′	13,727	

A. TABLICE OSNOVNIH (ELEMENTARNIH) FUNKCIJA

1. NEKE KONSTANTE KOJE NAM ČESTO TREBAJU

Veličina	n	lg n	Veličina	n	lg n
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0,318310	$\bar{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\bar{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\bar{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,785398	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,273240	0,10491
$\pi:6$	0,523599	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,909859	0,28100
$\pi:180\ (=1°)$	0,017453	$\bar{2}$,24188	$180°:\pi$	57°,295780	1,75812
$\pi:10\,800\ (=1')$	0,000291	$\bar{4}$,46373	$10\,800':\pi$	3437′,7468	3,53627
$\pi:648\,000\ (=1'')$	0,000005	$\bar{6}$,68557	$648\,000'':\pi$	206264″,81	5,31443
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\bar{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\bar{1}$,79264
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\bar{1}$,56571
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\bar{1}$,85524
$e^{\pi:2}$	4,810477	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,207880	$\bar{1}$,31781
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,491656	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\bar{3}$,27125
C^*	0,577216	$\bar{1}$,76134	$\ln \pi$	1,144730	0,05870
$M = \lg e$	0,434294	$\bar{1}$,63778	$1:M = \ln 10$	2,302585	0,36222
g^{**}	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

* C je Eulerova konstanta, vidi na str. 341.

** g je ubrzanje sile teže u m/s²; ovdje je dana zaokružena vrijednost g za nivo mora i 45 do 50° zemljine geografske širine.

2. KVADRATI, KUBI, KORIJENI

OBJAŠNJENJA TABLICE

Pomoću tablice na str. 24 do 43 možemo naći kvadrate, kube, kvadratne i kubne korijene na četiri značajne znamenke. Za argumente n između 1 i 10, veličine n^2 i n^3 nalazimo neposredno u tablicama ako su vrijednosti argumenta dane s tri značajne znamenke. *Na primjer*: $1{,}79^2 = 3{,}204$ (str. 25). Ako je vrijednost argumenta zadana sa više od tri značajne znamenke, moramo primijeniti interpolaciju (vidi str. 19). Za tu tablicu greška linearne interpolacije nigdje ne prelazi jednu jedinicu posljednje znamenke.

Kada tražimo n^2 i n^3 za $n > 10$ i $n < 1$ treba imati na umu da se kod povećanja broja n 10^k puta broj n^2 povećava 10^{2k}, n^3 10^{3k} puta, tj. kada decimalni zarez u n premjestimo za k mjesta na desno, kod n^2 treba ga premjestiti za $2k$, kod n^3 za $3k$ na desno. Pri tome, broju uzetom iz tablice pripišemo po potrebi nule s desne ili s lijeve strane. *Na primjer*: $0{,}179^2 = 0{,}03204$; $179^3 = 5735000$*.

Kvadratne korijene brojeva n između 1 i 100 možemo naći u tablicama [primjenom linearne interpolacije (str. 19)], a za neki drugi n po ovim pravilima:

1) Radikand podijelimo u grupe po dvije znamenke na jednu i drugu stranu od decimalnog zareza. 2) Ovisno o tome da li prva grupa s lijeve strane, koja se ne sastoji od nula, ima jednu ili dvije značajne znamenke, vrijednost korijena nađemo u koloni $\sqrt{n}$ ili $\sqrt{10n}$. 3) Nađenoj vrijednosti korijena odredimo mjesto decimalnog zareza prema pravilu: koliko grupa ima radikand lijevo od decimalnog zareza, toliko znamenaka ima korijen prije decimalnog zareza, odnosno, za radikand manji od 1, koliko grupa nula ima desno od decimalnog zareza, toliko nula ima korijen iza decimalnog zareza.

Primjer: 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{0{,}00|02|39} = 0{,}01546$; 3) $\sqrt{23|90|00} = 488{,}9$; 4) $\sqrt{0{,}00|3} = 0{,}05477$. (U posljednjem primjeru treba u mislima radikandu dodati još jednu nulu, da se posljednja grupa popuni; zato korijen treba tražiti u koloni $\sqrt{10n}$.)

Kubne korijene za brojeve n između 1 i 1000 možemo naći neposredno iz tablica (s primjenom linearne interpolacije) a za neki drugi n po ovim pravilima:

1) Radikand podijelimo u grupe po tri znamenke na obje strane od decimalnog zareza. 2) Ovisno o tome da li prva grupa s lijeve strane koja se ne sastoji od nula ima jednu, dvije ili tri značajne znamenke, vrijednost korijena nađemo u koloni $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ ili $\sqrt[3]{100n}$. 3) Nađenoj vrijednosti korijena odredimo položaj decimalnog zareza jednako kao i za kvadratni korijen.

Primjeri: 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$*; 2) $\sqrt[3]{239|000} = 62{,}06$;

3) $\sqrt[3]{0{,}000|002|39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000|3} = 0{,}06694$;

5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$.

(U posljednja dva primjera treba u mislima radikandu dodati još dvije odnosno jednu nulu.)

* Bolje je pisati $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, kako bi izbjegli upotrebu nula kao zamjenu za nepoznate znamenke (točno $179^3 = 5735339$).

* Nulu na kraju treba zadržati, jer je ona značajna znamenka (vidi str. 152 i karakterizira točnost dobivene vrijednosti korijena.

Kvadrati, kubi, kvadratni i kubni korijeni

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2 525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16 65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\,n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10\,n}$	$\sqrt[3]{100\,n}$
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\,n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10\,n}$	$\sqrt[3]{100\,n}$
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7 54	56,85	428,7	2,746	8,683	7,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\,n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10\,n}$	$\sqrt[3]{100\,n}$
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\,n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10\,n}$	$\sqrt[3]{100\,n}$
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

Objašnjenje tablice vidi na str. 21 i 24.

3. POTENCIJE CIJELIH BROJEVA

od $n = 1$ do $n = 100$

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249

n	n^2	n^3	n^4	n^5
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

4. RECIPROČNE VRIJEDNOSTI

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Objašnjenje tablica vidi na idućoj stranici.

OBJAŠNJENJE TABLICE RECIPROČNIH VRIJEDNOSTI

U tablici 4 na str. 46 i 47 dane su četveroznamenkaste vrijednosti $10000 : n$ za troznamenkastu vrijednost argumenta između 1 i 10. Svaki broj u tablici smješten je u redak prvim dvjema značajnim znamenkama argumenta (u stupcu n) i u stupac prema trećoj značajnoj znamenki argumenta. Npr. $10000 : 2{,}26 = 4425$. Ako je argumenat zadan sa četiri znamenke, onda treba izvršiti linearnu interpolaciju (vidi str. 19). Treba obratiti pažnju na to, da ovdje interpolacione korekture ne dodajemo, nego oduzimamo.

Brojeve u tablici možemo smatrati i decimalama iza decimalnog zareza u razlomku $1 : n$; npr. $1 : 2{,}26 = 0{,}4425$. Kada tražimo $1 : n$ za $n > 10$ i $n < 1$ trebamo uzeti u obzir da se pri množenju n sa 10^k veličina $1 : n$ množi sa 10^{-k}, tj. kada decimalni zarez u n premjestimo za k mjesta na desno, kod $1 : n$ treba decimalni zarez pomaknuti za k mjesta u lijevo, i obrnuto. Npr.: $1 : 22{,}6 = 0{,}04425$; $1 : 0{,}0226 = 44{,}25$.

5. FAKTORIJELE I NJIHOVE RECIPROČNE VRIJEDNOSTI

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

*Recipročne vrijednosti faktorijela**

n	$1 : n!$	n	$1 : n!$	n	$1 : n!$
1	1,000000	11	$0{,}0^{7}25052$	21	$0{,}0^{19}19573$
2	0,500000	12	$0{,}0^{8}20877$	22	$0{,}0^{21}88968$
3	0,166667	13	$0{,}0^{9}16059$	23	$0{,}0^{22}38682$
4	0,041667	14	$0{,}0^{10}11471$	24	$0{,}0^{23}16117$
5	$0{,}0^{2}83333$	15	$0{,}0^{12}76472$	25	$0{,}0^{25}64470$
6	$0{,}0^{3}13889$	16	$0{,}0^{13}47795$	26	$0{,}0^{26}24796$
7	$0{,}0^{3}19841$	17	$0{,}0^{14}28115$	27	$0{,}0^{28}91837$
8	$0{,}0^{4}24802$	18	$0{,}0^{15}15619$	28	$0{,}0^{29}32799$
9	$0{,}0^{5}27557$	19	$0{,}0^{17}82206$	29	$0{,}0^{30}11310$
10	$0{,}0^{6}27557$	20	$0{,}0^{18}41103$	30	$0{,}0^{32}37700$

* Za $1 : n!$ upotrebljavamo skraćenu oznaku za nule iza decimalnog zareza. Tako je $1 : 8! = 0{,}000024802$.

6. NEKE POTENCIJE BROJEVA 2, 3 i 5

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

OBJAŠNJENJA TABLICA LOGARITAMA I ANTILOGARITAMA

Tablica 7 (str. 51 i 52) služi nam za nalaženje dekadskih logaritama brojeva. Najprije za zadani broj pomoću pravila (str. 175) nađemo *karakteristiku* njegova logaritma, a zatim njegovu *mantisu* iz tablica. Za troznamenkaste brojeve naći ćemo mantisu na presjecištu retka, u početku kojeg (rubrika N) su dvije prve znamenke zadanog broja, sa stupcem koji u glavi ima oznaku treće znamenke. Ako zadani broj ima više od tri značajne znamenke, moramo primijeniti linearnu interpolaciju (vidi str. 19). Pri tome interpolacijsku korekciju tražimo samo za četvrtu značajnu znamenku; korekcija pete znamenke ima smisla samo tada, kada je prva značajna znamenka zadanog broja 1 ili 2.

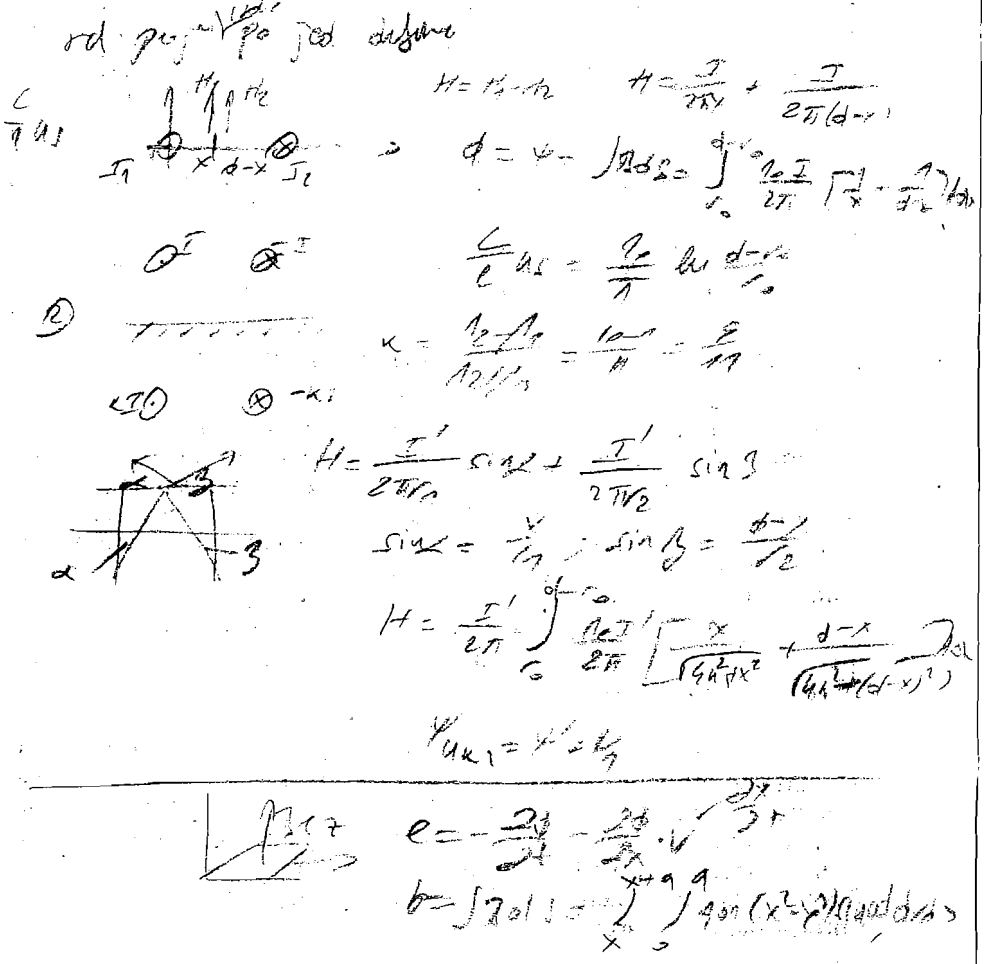
Primjer: $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (k 4048 dodajemo $0{,}3 \cdot 17 = 5{,}1$).

Kada tražimo broj prema njegovom dekadskom logaritmu, služimo se tablicom 8 (str. 53 i 54) (antilogaritama*). U toj tablici argument je mantisa zadanog broja. Na presjecištu retka određenog sa dvije prve znamenke mantise (kolona m) i stupca u čijoj je glavi oznaka treće znamenke mantise, u tablici antilogaritama nađemo brojčani sastav traženog broja. Za četvrtu znamenku treba provesti interpolacijsku korekturu.

* Broj y kome je dekadski logaritam jednak x, nazivamo antilogaritmom x. Po definiciji logaritma (vidi str. 174) ta funkcija se podudara s eksponencijalnom funkcijom $y = 10^x$.

Karakteristika logaritma omogućava nam da u dobivenom rezultatu postavimo decimalni zarez na osnovu pravila sa str. 151.

Primjeri: $\lg x = 1{,}2763$; $x = 18{,}89$ (k 1888 iz tablice dodamo $0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$; u rezultatu decimalni zarez postavimo iza druge znamenke, jer je karakteristika jedinica). Ako je $\lg x = 2{,}2763$, onda je $x = 0{,}01889$. Taj rezultat možemo napisati i ovako: $10^{1{,}2763} = 18{,}89$; $10^{-1{,}7237} = 0{,}01889$ (jer je $\bar{2}{,}2763 = -1{,}7237$).



7. DEKADSKI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Objašnjenje tablice vidi na str. 49.

8. ANTILOGARITMI

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Objašnjenje tablice vidi na str. 49.

9. TABLICA ZA KVADRATNU INTERPOLACIJU

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

O kvadratnoj interpolaciji vidi str. 19.

Svim vrijednostima k među susjednim brojevima stupca k (kako lijevo, tako i desno), odgovaraju jedne te iste vrijednosti k_1, koje su među tim susjednim vrijednostima k. »Kritičkim« (tabličnim) vrijednostima k odgovaraju gornje vrijednosti k_1.

Primjeri:

1) za $k = 0{,}8$ $k_1 = 0{,}040$ (isto kao i za sve druge k, između 0,797 i 0,804 ili između 0,196 i 0,203);

2) za $k = 0{,}3$ (ili za $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

10. PRIRODNE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Sinusi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	**85**
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	**80**
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	**75**
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	**70**
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	**65**
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	**60**
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	**55**
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	**50**
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	**45**
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	↑ 44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kosinusi

Sinusi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45 ↓	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	**40**
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	**35**
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	**30**
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	**25**
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	**20**
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	**15**
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0 9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	**10**
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	**5**
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kosinusi

Tangensi

Kut °	0′ ←	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	**85**
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	**80**
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	**75**
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	**70**
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	**65**
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	**60**
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	**55**
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	**50**
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	**45**
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	↑ 44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kotangensi

Tangensi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45 ↓	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	**40**
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	1,428	**35**
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	**30**
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	**25**
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	**20**
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	**15**
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	**10**
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	**5**
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kotangensi

Trigonometrijske funkcije (korak 0,1°)

Sinusi

Kut °	0 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0↓	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0436	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1957	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,2588	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67

23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5170	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5606	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,6225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	↑44
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0 ←	Kut °

Kosinusi

Sinusi

Kut °	0 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
45 ↓	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,8049	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8972	0,8980	0,8999	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,9483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑ 0
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	← 0	Kut °

Kosinusi

Tangensi

Kut °	0 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0↓	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0344	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0367	0,0384	0,0402	0,0419	0,0437	0,0454	0,0472	0,0489	0,0508	0,0524	87
3	0,0524	0,0542	0,0559	0,0577	0,0594	0,0612	0,0629	0,0647	0,0664	0,0682	0,0699	86
4	0,0699	0,0717	0,0734	0,0752	0,0769	0,0787	0,0805	0,0822	0,0840	0,0857	0,0875	85
5	0,0875	0,0892	0,0910	0,0928	0,0945	0,0963	0,0981	0,0998	0,1016	0,1033	0,1051	84
6	0,1051	0,1069	0,1086	0,1104	0,1122	0,1138	0,1157	0,1175	0,1192	0,1210	0,1228	83
7	0,1228	0,1246	0,1263	0,1281	0,1299	0,1317	0,1334	0,1352	0,1370	0,1388	0,1405	82
8	0,1405	0,1423	0,1441	0,1459	0,1477	0,1495	0,1512	0,1530	0,1548	0,1566	0,1584	81
9	0,1584	0,1602	0,1620	0,1638	0,1655	0,1673	0,1691	0,1709	0,1727	0,1745	0,1763	80
10	0,1763	0,1781	0,1799	0,1817	0,1835	0,1853	0,1871	0,1890	0,1908	0,1926	0,1944	79
11	0,1944	0,1962	0,1980	0,1998	0,2016	0,2035	0,2053	0,2071	0,2089	0,2107	0,2126	78
12	0,2126	0,2144	0,2162	0,2180	0,2199	0,2217	0,2235	0,2254	0,2272	0,2290	0,2309	77
13	0,2309	0,2327	0,2345	0,2364	0,2382	0,2401	0,2419	0,2438	0,2456	0,2475	0,2493	76
14	0,2493	0,2512	0,2530	0,2549	0,2568	0,2586	0,2605	0,2623	0,2642	0,2661	0,2679	75
15	0,2679	0,2698	0,2717	0,2736	0,2754	0,2773	0,2792	0,2811	0,2830	0,2849	0,2867	74
16	0,2867	0,2886	0,2905	0,2924	0,2943	0,2962	0,2981	0,3000	0,3010	0,3038	0,3057	73
17	0,3057	0,3076	0,3096	0,3115	0,3134	0,3153	0,3172	0,3191	0,3211	0,3230	0,3249	72
18	0,3249	0,3269	0,3288	0,3307	0,3327	0,3346	0,3365	0,3385	0,3404	0,3424	0,3443	71
19	0,3443	0,3463	0,3482	0,3502	0,3522	0,3541	0,3561	0,3581	0,3600	0,3620	0,3640	70
20	0,3640	0,3659	0,3679	0,3699	0,3719	0,3739	0,3759	0,3779	0,3799	0,3819	0,3839	69
21	0,3839	0,3859	0,3879	0,3899	0,3919	0,3939	0,3959	0,3979	0,4000	0,4020	0,4040	68
22	0,4040	0,4061	0,4081	0,4101	0,4122	0,4142	0,4163	0,4183	0,4204	0,4224	0,4245	67
23	0,4245	0,4265	0,4286	0,4307	0,4327	0,4348	0,4369	0,4390	0,4411	0,4431	0,4452	66
24	0,4452	0,4473	0,4494	0,4515	0,4536	0,4557	0,4578	0,4599	0,4621	0,4642	0,4663	65

25	0,4663	0,4684	0,4706	0,4727	0,4748	0,4770	0,4791	0,4813	0,4834	0,4856	0,4877	64
26	0,4877	0,4899	0,4921	0,4942	0,4964	0,4986	0,5008	0,5029	0,5051	0,5073	0,5095	63
27	0,5095	0,5117	0,5139	0,5161	0,5184	0,5206	0,5228	0,5250	0,5272	0,5295	0,5317	62
28	0,5317	0,5340	0,5362	0,5384	0,5407	0,5430	0,5452	0,5475	0,5498	0,5520	0,5543	61
29	0,5543	0,5566	0,5589	0,5612	0,5635	0,5658	0,5681	0,5704	0,5727	0,5750	0,5774	60
30	0,5774	0,5797	0,5820	0,5844	0,5867	0,5890	0,5914	0,5938	0,5961	0,5985	0,6009	59
31	0,6009	0,6032	0,6056	0,6080	0,6104	0,6128	0,6152	0,6176	0,6200	0,6224	0,6249	58
32	0,6249	0,6273	0,6297	0,6322	0,6346	0,6371	0,6395	0,6420	0,6445	0,6469	0,6494	57
33	0,6494	0,6519	0,6544	0,6569	0,6594	0,6619	0,6644	0,6669	0,6694	0,6720	0,6745	56
34	0,6745	0,6771	0,6796	0,6822	0,6847	0,6873	0,6899	0,6924	0,6950	0,6976	0,7002	55
35	0,7002	0,7028	0,7054	0,7080	0,7107	0,7133	0,7159	0,7186	0,7212	0,7239	0,7265	54
36	0,7265	0,7292	0,7319	0,7346	0,7373	0,7400	0,7427	0,7454	0,7481	0,7508	0,7536	53
37	0,7536	0,7563	0,7590	0,7618	0,7646	0,7673	0,7701	0,7729	0,7757	0,7785	0,7813	52
38	0,7813	0,7841	0,7869	0,7898	0,7926	0,7954	0,7983	0,8012	0,8040	0,8069	0,8098	51
39	0,8098	0,8127	0,8156	0,8185	0,8214	0,8243	0,8273	0,8302	0,8332	0,8361	0,8391	50
40	0,8391	0,8421	0,8451	0,8481	0,8511	0,8541	0,8571	0,8601	0,8632	0,8662	0,8693	49
41	0,8693	0,8724	0,8754	0,8785	0,8816	0,8847	0,8878	0,8910	0,8941	0,8972	0,9004	48
42	0,9004	0,9036	0,9067	0,9099	0,9131	0,9163	0,9195	0,9228	0,9260	0,9293	0,9325	47
43	0,9325	0,9358	0,9391	0,9424	0,9457	0,9490	0,9423	0,9556	0,9590	0,9623	0,9657	46
44	0,9657	0,9691	0,9725	0,9759	0,9793	0,9827	0,9861	0,9896	0,9930	0,9965	1,0000	45
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	← 0	Kut °

Kotangensi

Tangensi

Kut °	0 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
45↓	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44
46	1,0355	1,0392	1,0428	1,0464	1,0501	1,0538	1,0575	1,0612	1,0669	1,0686	1,0725	43
47	1,0724	1,0761	1,0799	1,0637	1,0875	1,0913	1,0951	1,0990	1,1028	1,1067	1,1106	42
48	1,1106	1,1145	1,1184	1,1224	1,1263	1,1303	1,1343	1,1383	1,1423	1,1463	1,1504	41
49	1,1504	1,1544	1,1585	1,1626	1,1667	1,1708	1,1750	1,1792	1,1833	1,1875	1,1918	40
50	1,1918	1,1960	1,2002	1,2045	1,2088	1,2131	1,2174	1,2218	1,2261	1,2305	1,2349	39
51	1,2349	1,2393	1,2437	1,2483	1,2527	1,2572	1,2617	1,2662	1,2708	1,2753	1,2799	38
52	1,2799	1,2846	1,2892	1,2938	1,2985	1,3032	1,3079	1,3127	1,3175	1,3222	1,3270	37
53	1,3270	1,3319	1,3367	1,3416	1,3465	1,3514	1,3564	1,3613	1,3663	1,3713	1,3764	36
54	1,3764	1,3814	1,3865	1,3916	1,3968	1,4019	1,4071	1,4124	1,4176	1,4229	1,4281	35
55	1,4281	1,4335	1,4388	1,4442	1,4496	1,4550	1,4605	1,4659	1,4715	1,4770	1,4826	34
56	1,4826	1,4882	1,4938	1,4994	1,5051	1,5108	1,5166	1,5224	1,5582	1,5340	1,5399	33
57	1,5399	1,5458	1,5517	1,5577	1,5637	1,5697	1,5757	1,5818	1,5880	1,5941	1,6003	32
58	1,6003	1,6066	1,6128	1,6191	1,6255	1,6319	1,6383	1,6447	1,6512	1,6577	1,6643	31
59	1,6643	1,6709	1,6725	1,6842	1,6909	1,6977	1,7045	1,7113	1,7182	1,7251	1,7321	30
60	1,7321	1,7391	1,7461	1,7532	1,7603	1,7675	1,7747	1,7820	1,7893	1,7966	1,8040	29
61	1,8040	1,8115	1,8190	1,8265	1,8341	1,8418	1,8495	1,8572	1,8650	1,8728	1,8807	28
62	1,8807	1,8887	1,8967	1,9047	1,9128	1,9210	1,9292	1,9375	1,9458	1,9542	1,9626	27
63	1,9626	1,9711	1,9797	1,9883	1,9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413	2,0503	26
64	2,0503	2,0594	2,0686	2,0778	2,0872	2,0965	2,1060	2,1155	2,1251	2,1348	2,1445	25
65	2,1445	2,1543	2,1642	2,1742	2,1842	2,1943	2,2045	2,2148	2,2251	2,2355	2,2460	24
66	2,2460	2,2566	2,2673	2,2781	2,2889	2,2998	2,3109	2,3220	2,3332	2,3445	2,3559	23
67	2,3559	2,3673	2,3798	2,3906	2,4023	2,4142	2,4262	2,4383	2,4504	2,4627	2,4751	22
68	2,4751	2,4876	2,5002	2,5129	2,5257	2,5386	2,5517	2,5649	2,5782	2,5916	2,6051	21
69	2,6051	2,6187	2,6325	2,6464	2,6605	2,6746	2,6889	2,7034	2,7179	2,7326	2,7475	20

70	2,7475	2,7625	2,7776	2,7927	2,8083	2,8239	2,8397	2,8556	2,8716	2,8878	2,9042	19
71	2,9042	2,9208	2,9375	2,9544	2,9714	2,9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595	3,0777	18
72	3,0777	3,0961	3,1146	3,1334	3,1524	3,1716	3,1910	3,2106	3,2305	3,2506	3,2709	17
73	3,2709	3,2914	3,3122	3,3332	3,3544	3,3759	3,3977	3,4197	3,4420	3,4646	3,4874	16
74	3,4874	3,5105	3,5329	3,5576	3,5816	3,6059	3,6305	3,6554	3,6806	3,7062	3,7321	15
75	3,7321	3,7583	3,7848	3,8118	3,8391	3,8667	3,8947	3,9232	3,9520	3,9812	4,0108	14
76	4,0108	4,0408	4,0713	4,1022	4,1335	4,1653	4,1976	4,2303	4,2635	4,2972	4,3315	13
77	4,3315	4,3662	4,4015	4,4373	4,4737	4,5107	4,5483	4,5864	4,6252	4,6646	4,7046	12
78	4,7046	4,7453	4,7867	4,8228	4,8716	4,9152	4,9594	5,0045	5,0504	5,0970	5,1446	11
79	5,1446	5,1929	5,2422	5,2924	5,3435	5,3955	5,4486	5,5026	5,5578	5,6140	5,6713	10
80	5,6713	5,7297	5,7894	5,8502	5,9124	5,9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432	6,3138	9
81	6,3138	6,3859	6,4596	6,5350	6,6122	6,6912	6,7720	6,8548	6,9395	7,0264	7,1154	8
82	7,1154	7,2066	7,3002	7,3962	7,4947	7,5958	7,6996	7,8062	7,9158	8,0258	8,1443	7
83	8,1443	8,2636	8,3863	8,5126	8,6427	8,7769	8,9152	9,0579	9,2052	9,3572	9,5144	6
84	9,5144	9,6768	9,8448	10,0187	10,1988	10,3854	10,5789	10,7797	10,9882	11,2048	11,4301	5
85	11,4301	11,6645	11,9087	12,1632	12,4288	12,7062	12,9962	12,2996	13,6174	13,9507	14,3007	4
86	14,3007	14,6685	15,0557	15,4638	15,8945	16,3499	16,8319	17,3432	17,8863	18,4645	19,0811	3
87	19,0811	19,7403	20,4465	21,2049	22,0217	22,9038	23,8593	24,8978	26,0307	27,2715	28,6363	2
88	28,6363	30,1446	31,8205	33,6935	35,8006	38,1885	40,9174	44,0661	47,7395	52,0807	57,2900	1
89	57,2900	63,6567	71,6151	81,8470	95,4895	114,5887	143,2371	190,9842	296,4777	572,9572	∞	↑0

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	← 0	Kut °

Kotangensi

11. EKSPONENCIJALNE, HIPERBOLNE I TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

za x od 0 do 1,6 (argument u lučnoj mjeri)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296

Višekratnici od π i $\pi/2$ za računanje trigonometrijskih funkcija za $x > 1,6$

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Primjeri:

1) $\sin 7,5 =$

$= \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0,35398) =$

$= \cos 0,35398 = 0,9380$

(linearna interpolacija!)

2) $\sin 29 =$

$= \sin(9\pi + 0,72567) =$

$= -\sin 0,72567 =$

$= -0,6637$

(linearna interpolacija!)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1 9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3 3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	—0,0092	—108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	—0,0192	—52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	—0,0292	—34,233

Višekratnici od π i $\pi/2$ za računanje trigonometrijskih funkcija za $x > 1{,}6$.

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Za $x > 1{,}6$ vrijednosti e^x, e^{-x}, sh x, ch x i th x nalazimo u tablici 12; vrijednosti trigonometrijskih funkcija tražimo po formulama redukcije (vidi str. 231).

Primjere vidi na str. 69.

12. EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE
(za x od 1,6 do 10,0)*

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	**2,00**	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072
1,61	5,0028	0,1999	2,01	7,4633	0,1340	2,41	11,134	0,08982
1,62	5,0531	0,1979	2,02	7,5383	0,1327	2,42	11,246	0,08892
1,63	5,1039	0,1959	2,03	7,6141	0,1313	2,43	11,359	0,08804
1,64	5,1552	0,1940	2,04	7,6906	0,1300	2,44	11,473	0,08716
1,65	5,2070	0,1920	**2,05**	7,7679	0,1287	**2,45**	11,588	0,08629
1,66	5,2593	0,1901	2,06	7,8460	0,1275	2,46	11,705	0,08543
1,67	5,3122	0,1882	2,07	7,9248	0,1262	2,47	11,822	0,08458
1,68	5,3656	0,1864	2,08	8,0045	0,1249	2,48	11,941	0,08374
1,69	5,4195	0,1845	2,09	8,0849	0,1237	2,49	12,061	0,08291
1,70	5,4739	0,1827	**2,10**	8,1162	0,1225	**2,50**	12,182	0,08208
1,71	5,5290	0,1809	2,11	8,2482	0,1212	2,51	12,305	0,08127
1,72	5,5845	0,1791	2,12	8,3311	0,1200	2,52	12,429	0,08046
1,73	5,6407	0,1773	2,13	8,4149	0,1188	2,53	12,554	0,07966
1,74	5,6973	0,1755	2,14	8,4994	0,1177	2,54	12,680	0,07887
1,75	5,7546	0,1738	**2,15**	8,5849	0,1165	**2,55**	12,807	0,07808
1,76	5,8124	0,1720	2,16	8,6711	0,1153	2,56	12,936	0,07730
1,77	5,8709	0,1703	2,17	8,7583	0,1142	2,57	13,066	0,07654
1,78	5,9299	0,1686	2,18	8,8463	0,1130	2,58	13,197	0,07577
1,79	5,9895	0,1670	2,19	8,9352	0,1119	2,59	13,330	0,07502
1,80	6,0496	0,1653	**2,20**	9,0250	0,1108	**2,60**	13,464	0,07427
1,81	6,1104	0,1637	2,21	9,1157	0,1097	2,61	13,599	0,07353
1,82	6,1719	0,1620	2,22	9,2073	0,1086	2,62	13,736	0,07280
1,83	6,2339	0,1604	2,23	9,2999	0,1075	2,63	13,874	0,07208
1,84	6,2965	0,1588	2,24	9,3933	0,1065	2,64	14,013	0,07136
1,85	6,3598	0,1572	**2,25**	9,4877	0,1054	**2,65**	14,154	0,07065
1,86	6,4237	0,1557	2,26	9,5831	0,1044	2,66	14,296	0,06995
1,87	6,4883	0,1541	2,27	9,6794	0,1033	2,67	14,440	0,06925
1,88	6,5535	0,1526	2,28	9,7767	0,1023	2,68	14,585	0,06856
1,89	6,6194	0,1511	2,29	9,8749	0,1013	2,69	14,732	0,06788
1,90	6,6859	0,1496	**2,30**	9,9742	0,10026	**2,70**	14,880	0,06721
1,91	6,7531	0,1481	2,31	10,074	0,09926	2,71	15,029	0,06654
1,92	6,8210	0,1466	2,32	10,176	0,09827	2,72	15,180	0,06587
1,93	6,8895	0,1451	2,33	10,278	0,09730	2,73	15,333	0,06522
1,94	6,9588	0,1437	2,34	10,381	0,09633	2,74	15,487	0,06457
1,95	7,0287	0,1423	**2,35**	10,486	0,09537	**2,75**	15,643	0,06393
1,96	7,0993	0,1409	2,36	10,591	0,09442	2,76	15,800	0,06329
1,97	7,1707	0,1395	2,37	10,697	0,09348	2,77	15,959	0,06266
1,98	7,2427	0,1381	2,38	10,805	0,09255	2,78	16,119	0,06204
1,99	7,3155	0,1367	2,39	10,913	0,09163	2,79	16,281	0,06142
2,00	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072	**2,80**	16,445	0,06081

* Za računanje hiperbolnih funkcija za $x > 1{,}6$ moramo se koristiti formulama

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,80	16,445	0,06081	**3,25**	25,790	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472
2,81	16,610	0,06020	3,26	26,050	0,03839	3,71	40,854	0,02448
2,82	16,777	0,05961	3,27	26,311	0,03801	3,72	41,264	0,02423
2,83	16,945	0,05901	3,28	26,576	0,03763	3,73	41,679	0,02399
2,84	17,116	0,05843	3,29	26,843	0,03725	3,74	42,098	0,02375
2,85	17,288	0,05784	**3,30**	27,113	0,03688	**3,75**	42,521	0,02352
2,86	17,462	0,05727	3,31	27,385	0,03652	3,76	42,948	0,02328
2,87	17,637	0,05670	3,32	27,660	0,03615	3,77	43,380	0,02305
2,88	17,814	0,05613	3,33	27,938	0,03579	3,78	43,816	0,02282
2,89	17,993	0,05558	3,34	28,219	0,03544	3,79	44,256	0,02260
2,90	18,174	0,05502	**3,35**	28,503	0,03508	**3,80**	44,701	0,02237
2,91	18,357	0,05448	3,36	28,789	0,03474	3,81	45,150	0,02215
2,92	18,541	0,05393	3,37	29,079	0,03439	3,82	45,604	0,02193
2,93	18,728	0,05340	3,38	29,371	0,03405	3,83	46,063	0,02171
2,94	18,916	0,05287	3,39	29,666	0,03371	3,84	46,525	0,02149
2,95	19,106	0,05234	**3,40**	29,964	0,03337	**3,85**	46,993	0,02128
2,96	19,298	0,05182	3,41	30,265	0,03304	3,86	47,465	0,02107
2,97	19,492	0,05130	3,42	30,569	0,03271	3,87	47,942	0,02086
2,98	19,688	0,05079	3,43	30,877	0,03239	3,88	48,424	0,02065
2,99	19,886	0,05029	3,44	31,187	0,03206	3,89	48,911	0,02045
3,00	20,086	0,04979	**3,45**	31,500	0,03175	**3,90**	49,402	0,02024
3,01	20,287	0,04929	3,46	31,817	0,03143	3,91	49,899	0,02004
3,02	20,491	0,04880	3,47	32,137	0,03112	3,92	50,400	0,01984
3,03	20,697	0,04832	3,48	32,460	0,03081	3,93	50,907	0,01964
3,04	20,905	0,04783	3,49	32,786	0,03050	3,94	51,419	0,01945
3,05	21,115	0,04736	**3,50**	33,115	0,03020	**3,95**	51,935	0,01925
3,06	21,328	0,04689	3,51	33,448	0,02990	3,96	52,457	0,01906
3,07	21,542	0,04642	3,52	33,784	0,02960	3,97	52,985	0,01887
3,08	21,758	0,04596	3,53	34,124	0,02930	3,98	53,517	0,01869
3,09	21,977	0,04550	3,54	34,467	0,02901	3,99	54,055	0,01850
3,10	22,198	0,04505	**3,55**	34,813	0,02872	**4,0**	54,598	0,01832
3,11	22,421	0,04460	3,56	35,163	0,02844	4,1	60,340	0,01657
3,12	22,646	0,04416	3,57	35,517	0,02816	4,2	66,686	0,01500
3,13	22,874	0,04372	3,58	35,874	0,02788	4,3	73,700	0,01357
3,14	23,104	0,04328	3,59	36,234	0,02760	4,4	81,451	0,01228
3,15	23,336	0,04285	**3,60**	36,598	0,02732	**4,5**	90,017	0,01111
3,16	23,571	0,04243	3,61	36,966	0,02705	4,6	99,484	0,01005
3,17	23,807	0,04200	3,62	37,338	0,02678	4,7	109,95	0,00910
3,18	24,047	0,04159	3,63	37,713	0,02652	4,8	121,51	0,00823
3,19	24,288	0,04117	3,64	38,092	0,02625	4,9	134,29	0,00745
3,20	24,533	0,04076	**3,65**	38,475	0,02599	**5,0**	148,41	0,00674
3,21	24,779	0,04036	3,66	38,861	0,02573	5,1	164,02	0,00610
3,22	25,028	0,03996	3,67	39,252	0,02548	5,2	181,27	0,00552
3,23	25,280	0,03956	3,68	39,646	0,02522	5,3	200,34	0,00499
3,24	25,534	0,03916	3,69	40,045	0,02497	5,4	221,41	0,00452
3,25	25,790	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472	**5,5**	244,69	0,00409

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
5,5	244,69	0,00409	**7,0**	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203
5,6	270,43	0,00370	7,1	1212,0	0,000825	8,6	5431,7	0,000184
5,7	298,87	0,00335	7,2	1339,4	0,000747	8,7	6002,9	0,000167
5,8	330,30	0,00303	7,3	1480,3	0,000676	8,8	6634,2	0,000151
5,9	365,04	0,00274	7,4	1636,0	0,000611	8,9	7332,0	0,000136
6,0	403,43	0,002479	**7,5**	1808,0	0,000553	**9,0**	8103,1	0,000123
6,1	445,86	0,002243	7,6	1998,2	0,000500	9,1	8955,3	0,000112
6,2	492,75	0,002029	7,7	2208,3	0,000453	9,2	9897,1	0,000101
6,3	544,57	0,001836	7,8	2440,6	0,000410	9,3	10938	0,000091
6,4	601,85	0,001662	7,9	2697,3	0,000371	9,4	12088	0,000083
6,5	665,14	0,001503	**8,0**	2981,0	0,000335	**9,5**	13360	0,000075
6,6	735,10	0,001360	8,1	3294,5	0,000304	9,6	14765	0,000068
6,7	812,41	0,001231	8,2	3641,0	0,000275	9,7	16318	0,000061
6,8	897,85	0,001114	8,3	4023,9	0,000249	9,8	18034	0,000055
6,9	992,27	0,001008	8,4	4447,1	0,000225	9,9	19930	0,000050
7,0	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203	**10,0**	22026	0,000045

13. PRIRODNI LOGARITMI

Objašnjenja tablica vidi str. 77

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	$\ln 10^m$
1	2,3026
2	4,6052
3	6,9078
4	9,2103
5	11,5129

Primjeri:

$$\ln 862 = \ln 8{,}62 + \ln 10^2 = 2{,}1541 + 4{,}6052 = 6{,}7593;$$

$$\ln 0{,}0862 = \ln 8{,}62 - \ln 10^2 = 2{,}1541 - 4{,}6052 = -2{,}4511.$$

Objašnjenje tablice vidi na idućoj stranici.

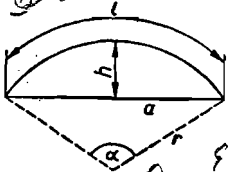
OBJAŠNJENJA TABLICE 13 PRIRODNIH LOGARITAMA

U tablici 13 (str. 74 do 76) dani su prirodni logaritmi. Za razliku od tablice dekadskih logaritama ovdje su pored mantisa dane i karakteristike. Logaritmi brojeva između 1 i 10 nalaze se neposredno u tablici; za treću i četvrtu decimalu treba provesti interpolacijsku korekciju (vidi str. 19). Za brojeve, koji ispred decimalnog zareza imaju više ili manje od jedne znamenke, prirodne logaritme nalazimo pomoću vrijednosti logaritama potencija broja 10 koje se nalaze na kraju tablice (vidi primjere na str. 76).

OBJAŠNJENJA TABLICA 14, 15 I 16

Tablice 14 i 15 (str. 78 do 81) daju nam s četiri značajne znamenke vrijednosti opsega i površine kruga za promjer d od $d = 1{,}00$ do $d = 9{,}99$. Ako je promjer izvan tih granica, površinu kruga ili opseg kruga tražimo za promjere veće ili manje 10^k puta od zadanog. Pri smanjenju ili povećanju promjera d 10^k puta, opseg kruga također se smanjuje ili povećava 10^k puta, a površina kruga 10^{2k} puta. Ako je broj značajnih znamenaka u d veći od tri, moramo izvršiti interpolaciju (vidi str. 19).

Primjeri: 1) za $d = 69{,}3$ opseg kruga je 217,7, a površina kruga 3772. 2) Za $d = 0{,}693$ opseg kruga je 2,177, a površina kruga je 0,3772.



Sl. 1

U tablici 16 (str. 82 do 86) dani su elementi segmenta kruga (slika 1). Tablica *a*) odnosi se na segmente krugova različitih polumjera s duljinom tetive jednakom jedinici. Ako je pri zadanom odnosu visine i tetive duljina tetive jednaka a, onda vrijednost duljine luka u tablicama moramo pomnožiti sa a, a površinu segmenta sa a^2.

Tablica *b*) sadrži podatke za različite segmente istog kruga s polumjerom 1. Ako je polumjer jednak r, onda tablične vrijednosti l, h i a moramo pomnožiti sa r, a površinu segmenta sa r^2. Kada je zadana duljina luka l (ili tetiva a) i visina h, tada je polumjer segmenta r jednak omjeru l (ili a) prema tabličnoj vrijednosti duljine luka (ili tetive) koji pripada zadanoj vrijednosti l/h (ili a/h).

Primjeri: Ako segment ima tetivu $a = 40$ cm, a visinu $h = 6$ cm, duljinu luka l dobivamo tako, da najprije izračunamo $h/a = 0{,}15$, a zatim sa 40 pomnožimo pripadnu tabličnu vrijednost l iz tablice *a*): $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ cm. Polumjer segmenta r i središnji kut α određujemo pomoću tablice *b*). Za $a/h = 6{,}67$ tablična vrijednost a jednaka je 1,1010, a $\alpha = 66{,}8°$ (linearna interpolacija!). Odatle je $r = 40 : 1{,}1010 = 36{,}33$ cm. Sada možemo naći duljinu luka l pomoću tablice *b*): $l = 36{,}33 \cdot 1{,}1661 = 42{,}36$ cm.

14. OPSEG KRUGA S PROMJEROM *d*

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30 79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

Objašnjenje tablice vidi na str. 77.

15. POVRŠINA KRUGA S PROMJEROM d

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

Objašnjenje tablice vidi na str. 77.

16. ELEMENTI KRUŽNOG SEGMENTA

a) Duljina luka i površina segmenta za tetivu jednaku jedan

Omjer visine i tetive $\frac{h}{a}$	Duljina luka l	Površina segmenta	Omjer visine i tetive $\frac{h}{a}$	Duljina luka l	Površina segmenta
—	—	—	**0,25**	1,1591	0,1747
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	**0,30**	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	**0,35**	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	**0,40**	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	**0,45**	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	**0,50**	1,5708	0,3927

Objašnjenje tablice vidi na str. 77.

Formule za segment na str. 217.

b) Duljina luka, visina, duljina tetive i površina segmenta s polumjerom jedan

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915

Objašnjenje tablice vidi na str. 77. Formule za segment vidi na str. 217.

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
120	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454

Objašnjenje tablice vidi na str. 77

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

17. PRERAČUNAVANJE STUPANJA U RADIJANE

Duljine lukova kružnice s polumjerom 1

Kut	Luk	Kut	Luk	Kut	Luk
1″	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1′	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
4	0,001164	19	0,331613	85	1,483530
5	0,001454	20	0,349066	90	1,570796
6	0,001745	21	0,366519	100	1,745329
7	0,002036	22	0,383972	120	2,094395
8	0,002327	23	0,401426	150	2,617994
9	0,002618	24	0,418879	180	3,141593
10	0,002909	25	0,436332	200	3,490659
20	0,005818	26	0,453786	250	4,363323
30	0,008727	27	0,471239	270	4,712389
40	0,011636	28	0,488692	300	5,235988
50	0,014544	29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Primjer:

1. $52°37'23''$

$50° = 0{,}872665$
$2° = 0{,}034907$
$30' = 0{,}008727$
$7' = 0{,}002036$
$20'' = 0{,}000097$
$3'' = 0{,}000015$

$0{,}918447$

$52°37'23'' = 0{,}91845$ rad.

2. $5{,}645$ rad.

$5{,}235988 = 300°$
$0{,}409012$
$0{,}401426 = 23°$
$0{,}007586$
$0{,}005818 = 20'$
$0{,}001768$
$0{,}001745 = 6'$
$0{,}000023 = 5''$

$5{,}645$ rad. $= 323°26'5''$

Luk koji je jednak polumjeru ima $57°17'44'',8$ (= 1 radijan).

18. PROPORCIONALNI DIJELOVI

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	10,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,7	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
3	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

B. TABLICE SPECIJALNIH FUNKCIJA

19. GAMA-FUNKCIJA*

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	**1,25**	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	**1,30**	0,89747	**1,55**	0,88887	**1,80**	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	**1,35**	0,89115	**1,60**	0,89352	**1,85**	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	**1,40**	0,88726	**1,65**	0,90012	**1,90**	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	**1,45**	0,88566	**1,70**	0,90864	**1,95**	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906	**2,00**	1,00000

Vrijednosti gama-funkcije za $x < 1$ i $x > 2$ možemo računati pomoću formula

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

Primjeri: 1) $\Gamma(0{,}7) = \dfrac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = \dfrac{0{,}90864}{0{,}7} = 1{,}2981,$

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) =$
$= 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336.$

* Definiciju, formule i grafove vidi na str. 208.

20. BESSELOVE (CILINDRIČNE) FUNKCIJE*

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	— ∞	— ∞	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	—1,5342	—6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	—0,4445	—1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	—0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	—0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	—0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	—0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	—0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	—0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	—0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	—0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	—0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	—0,3971	—0,0660	—0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0 007923
4,5	—0,3205	—0,2311	—0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521

* Definiciju, formule i grafove vidi na str. 565 do 567.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,0 0	0,0 0
5,0	—0,1776	—0,3276	—0,3085	+0,1479	27,24	24,34	349 1	404 5
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	330 8	361 9
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	296 6	323 9
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	265 9	290 0
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	238 5	259 7
5,5	—0,0068	—0,3414	—0,3395	—0,0238	42,69	38,59	213 9	232 6
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	191 8	208 3
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	172 1	186 6
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	154 4	167 3
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	138 6	149 9
6,0	+0,1506	—0,2767	—0,2882	—0,1750	67,23	61,34	124 4	134 4
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	111 7	120 5
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	100 3	108 1
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	090 01	096 91
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	080 83	086 93
6,5	+0,2601	—0,1538	—0,1732	—0,2741	106,3	97,74	072 59	077 99
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	065 20	069 98
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	058 57	062 80
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	052 62	056 36
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	047 28	050 59
7,0	+0,3001	—0,0047	—0,0259	—0,3027	168,6	156,0	042 48	045 42
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	038 17	040 78
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	034 31	036 62
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	030 84	032 88
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	027 72	029 53
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	—0,2591	268,2	249,6	024 92	026 53
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	022 40	023 83
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	020 14	021 41
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	018 11	019 24
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	016 29	017 29
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	—0,1581	427,6	399,9	014 65	015 54
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	013 17	013 96
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	011 85	012 55
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	010 66	011 28
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009 588	010 14
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	—0,0262	683,2	641,6	008 626	009 120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007 761	008 200
8,7	—0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006 983	007 374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006 283	006 631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005 654	005 964
9,0	—0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005 088	005 364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004 579	004 825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004 121	004 340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003 710	003 904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003 339	003 512
9,5	—0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1735	1658	003 006	003 160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002 706	002 843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002 436	002 559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0.2379	2329	2207	002 193	002 302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001 975	002 072
10,0	—0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2761	001 778	001 865

21. LEGENDREOVI POLINOMI (KUGLINE FUNKCIJE)*

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	—0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	—0,3125	0,0000
0,05	—0,4962	—0,0747	0,3657	0,0927	—0,2962	—0,1069
0,10	—0,4850	—0,1475	0,3379	0,1788	—0,2488	—0,1995
0,15	—0,4662	—0,2166	0,2928	0,2523	—0,1746	—0,2649
0,20	—0,4400	—0,2800	0,2320	0,3075	—0,0806	—0,2935
0,25	—0,4062	—0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	—0,2799
0,30	—0,3650	—0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	—0,2241
0,35	—0,3162	—0,4178	—0,0187	0,3225	0,2225	—0,1318
0,40	—0,2600	—0,4400	—0,1130	0,2706	0,2926	—0,0146
0,45	—0,1962	—0,4472	—0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	—0,1250	—0,4375	—0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	—0,0462	—0,4091	—0,3590	—0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	—0,3600	—0,4080	—0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	—0,2884	—0,4284	—0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	—0,1925	—0,4121	—0,3652	—0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	—0,0703	—0,3501	—0,4164	—0,2808	—0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	—0,2330	—0,3995	—0,3918	—0,2397
0,85	0,5838	0,2603	—0,0506	—0,2857	—0,4030	—0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	—0,0411	—0,2412	—0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

* Definiciju i grafove vidi na str. 568.

22. ELIPTIČKI INTEGRALI*

a) Eliptički integrali prve vrste: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8082	0,9173
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868

b) Eliptički integrali druge vrste: $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931

* Definiciju vidi na idućoj stranici i na str. 421 i 422.

INTEGRALI*

vrste: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

50°	60°	70°	80°	90°
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

vrste: $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

50°	60°	70°	80°	90°
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

c) Potpuni eliptički integrali, $k = \sin\alpha$

$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E	$\alpha°$	K	E
0	1,5708	1,5708	**30**	1,6858	1,4675	**60**	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	**35**	1,7312	1,4323	**65**	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	**40**	1,7868	1,3931	**70**	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	**45**	1,8541	1,3506	**75**	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	**50**	1,9356	1,3055	**80**	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	**55**	2,0347	1,2587	**85**	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	**60**	2,1565	1,2111	**90**	∞	1,0000

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

$$\mathrm{K} = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

$$\mathrm{E} = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt.$$

23. Poissonova razdioba

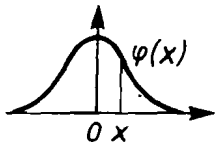
r	λ							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669
5	–	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227
6	–	–	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164
7	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019
8	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000002

r	λ							
	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,011115	0,015328	0,047067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293
6	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,00004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	–	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	–	–	0,000004	0,000038	0,000216	0,000810	0,002296	0,005292
11	–	–	–	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	–	–	–	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	–	–	–	–	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	–	–	–	–	–	0,000003	0,000014	0,000056
15	–	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000015
16	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
17	–	–	–	–	–	–	–	0,000001

Nastavak tablice 23.

r	λ						
	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,011109	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,049990	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,112479	0,083224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,168718	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007867
4	0,189808	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,170827	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,128120	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,082363	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,046329	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,023165	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,010424	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,004264	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,001599	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000554	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000178	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000053	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000015	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000004	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000001	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	–	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	–	–	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	–	–	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	–	–	–	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	–	–	–	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	–	–	–	–	0,000003	0,000016	0,000073
25	–	–	–	–	0,000001	0,000006	0,000029
26	–	–	–	–	–	0,000002	0,000011
27	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
28	–	–	–	–	–	–	0,000001
29	–	–	–	–	–	–	0,000001

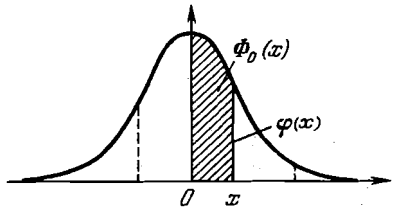
24. Gustoća razdiobe vjerojatnosti $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ **normirane i centrirane razdiobe**



Objašnjenje: Npr.: 3989^{-4} označava $3989 \cdot 10^{-4}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989^{-4}	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970^{-4}	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910^{-4}	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814^{-4}	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683^{-4}	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521^{-4}	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332^{-4}	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3141
0,7	3123^{-4}	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897^{-4}	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661^{-4}	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420^{-4}	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179^{-4}	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942^{-4}	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714^{-4}	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497^{-4}	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295^{-4}	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109^{-4}	1092	1074	1057	1040	1023	1006	9893^{-5}	9728	9566
1,7	9504^{-5}	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	7895^{-5}	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	6562^{-5}	6438	6316	6195	6077	5960	5844	5730	5618	5508
2,0	5399^{-5}	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	4398^{-5}	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	3547^{-5}	3470	3894	3819	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	2833^{-5}	2768	2705	2643	2582	2522	2463	2406	2349	2294
2,4	2239^{-5}	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	1753^{-5}	1709	1667	1625	1585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	1358^{-5}	1323	1289	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	1042^{-5}	1014	9871^{-6}	9606	9347	9094	8846	8605	8370	8140
2,8	7915^{-6}	7697	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	5953^{-6}	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	4432^{-6}	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,1	3267^{-6}	3167	3070	2975	2884	2794	2707	2623	2541	2461
3,2	2384^{-6}	2309	2236	2165	2096	2029	1961	1901	1840	1780
3,3	1723^{-6}	1667	1612	1560	1508	1459	1411	1364	1319	1275
3,4	1232^{-6}	1191	1151	1112	1075	1038	1003	9689^{-7}	9358	9037
3,5	8727^{-7}	8426	8135	7853	7581	7317	7061	6814	6575	6343
3,6	6119^{-7}	5902	5693	5490	5294	5105	4921	4744	4573	4408
3,7	4248^{-7}	4093	3944	3800	3661	3526	3396	3271	3149	3032
3,8	2919^{-7}	2810	2705	2604	2506	2411	2320	2232	2147	2065
3,9	1987^{-7}	1910	1837	1766	1698	1633	1569	1508	1449	1393
4,0	1338^{-7}	1286	1235	1186	1140	1094	1051	1009	9687^{-8}	9299
4,1	8926^{-8}	8567	8222	7890	7570	7263	6967	6683	6410	6147
4,2	5894^{-8}	5652	5418	5194	4979	4772	4573	4382	4199	4023
4,3	3854^{-8}	3691	3535	3386	3242	3104	2972	2845	2723	2606
4,4	2494^{-8}	2387	2284	2185	2090	1999	1912	1829	1749	1672
4,5	1598^{-8}	1528	1461	1396	1334	1275	1218	1164	1112	1062
4,6	1014^{-8}	9684^{-9}	9248	8830	8430	8047	7681	7331	6996	6676
4,7	6370^{-9}	6077	5797	5530	5274	5030	4796	4573	4360	4156
4,8	3961^{-9}	3775	3598	3428	3267	3112	2965	2824	2690	2561
4,9	2439^{-9}	2322	2211	2105	2003	1907	1814	1727	1643	1563

25. Funkcija razdiobe $\Phi_0(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ normirane i centrirane normalne razdiobe



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1 026	064	103	141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2 019	054	088	123	157	190	224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	708	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3 023	051	078	106	133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	655	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4 015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2*)	860	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	759	559	296	969	581	133	625	060	437	758

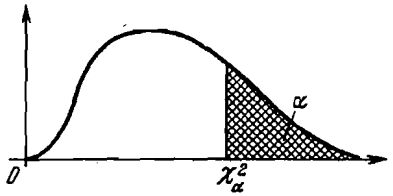
*) Odavde pa nadalje vrijednosti $\Phi_0(x)$ dane su sa 7 znamenaka iza decimalnog zareza. Na primjer $2{,}3\left|\begin{matrix}892\\759\end{matrix}\right.$ označava da je $\Phi_0(2{,}30)=0{,}4892759$.

Nastavak tablice 25.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0,4 918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	443	309	128
2,5	937	939	941	942	944	946	947	949	950	952
	903	634	323	969	574	139	664	151	600	012
2,6	953	954	956	957	958	959	960	962	963	964
	388	729	035	308	547	754	930	074	189	274
2,7	965	966	967	968	969	970	971	971	972	973
	330	358	359	333	280	202	099	972	821	646
2,8	974	975	975	976	977	978	978	979	980	980
	449	229	988	726	443	140	818	476	116	738
2,9	981	981	982	983	983	984	984	985	985	986
	342	929	498	052	589	111	618	110	588	051
3,0	986	986	987	987	988	988	988	989	989	989
	501	938	361	772	171	558	933	297	650	992
3,1	990	990	990	991	991	991	992	992	992	992
	324	646	957	260	553	836	112	378	636	886
3,2	993	993	993	993	994	994	994	994	994	994
	129	363	590	810	024	230	429	523	810	991
3,3	995	995	995	995	995	995	996	996	996	996
	166	335	499	658	811	959	103	242	376	505
3,4	996	996	996	996	997	997	997	997	997	997
	681	752	869	982	091	197	299	398	493	585
3,5	997	997	997	997	997	998	998	998	998	998
	674	759	842	922	999	074	146	215	282	347
3,6	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
	409	469	527	583	637	689	739	787	834	879
3,7	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999
	922	964	004	043	080	116	150	184	216	247
3,8	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	276	305	333	359	385	409	433	456	478	499
3,9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	519	539	557	575	593	609	625	641	655	670
4,0	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	683	696	709	721	733	744	755	765	775	784
4,1	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	793	802	811	819	826	834	841	848	854	861
4,2	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	867	872	878	883	888	893	898	902	907	911
4,3	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	915	918	922	925	929	932	935	938	941	943
4,4	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	946	948	951	953	955	957	959	961	963	964
4,5	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	966	968	969	971	972	973	974	976	977	978
5,0	999									
	997									

26. χ^2-razdioba

U tablici su (u postocima) navedene vrijednosti kvantila $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ u ovisnosti o stupnju slobode m i vjerojatnosti α.



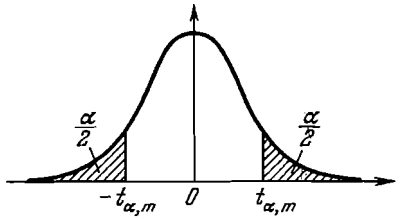
m \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,466	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,67
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Nastavak tablice 26.

m \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,8	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	30,9	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,1	39,3
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	45,9	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,3	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,7	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,1	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,6	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	52,9	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,4	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	55,7	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,1	59,7

27. Studentova t-razdioba

U tablici su (u postocima) navedene vrijednosti kvantila $|t(m)|_{1-\alpha}$ u ovisnosti o stupnju slobode m i vjerojatnosti α.

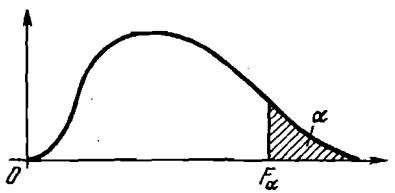


m \ α	0,10	0,05	0,025	0,020	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1.833	2.262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,707
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3.386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

28. z-razdioba (vidi str. 829)

r_2 \ r_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4,1535	4,2585	4,2974	4,3175	4,3297	4,3379	4,3482	4,3585	4,3689	4,3794
2	2,2950	2,2976	2,2984	2,2988	2,2991	2,2992	2,2994	2,2997	2,2999	2,3001
3	1,7649	1,7140	1,6915	1,6786	1,6703	1,6645	1,6569	1,6489	1,6404	1,6314
4	1,5270	1,4452	1,4075	1,3856	1,3711	1,3609	1,3473	1,3327	1,3170	1,3000
5	1,3943	1,2929	1,2449	1,2164	1,1974	1,1838	1,1656	1,1457	1,1239	1,0997
6	1,3103	1,1955	1,1401	1,1068	1,0843	1,0680	1,0460	1,0218	0,9948	0,9643
7	1,2526	1,1281	1,0682	1,0300	1,0048	0,9864	0,9614	0,9335	0,9020	0,8658
8	1,2106	1,0787	1,0135	0,9734	0,9459	0,9259	0,8983	0,8673	0,8319	0,7904
9	1,1786	1,0411	0,9724	0,9299	0,9006	0,8791	0,8494	0,8157	0,7769	0,7305
10	1,1535	1,0114	0,9399	0,8954	0,8646	0,8419	0,8104	0,7744	0,7324	0,6816
11	1,1333	0,9874	0,9136	0,8674	0,8354	0,8116	0,7785	0,7405	0,6958	0,6408
12	1,1166	0,9677	0,8919	0,8443	0,8111	0,7864	0,7520	0,7122	0,6649	0,6061
13	1,1027	0,9511	0,8737	0,8248	0,7907	0,7652	0,7295	0,6882	0,6386	0,5761
14	1,0909	0,9370	0,8581	0,8082	0,7732	0,7471	0,7103	0,6675	0,6159	0,5500
15	1,0807	0,9249	0,8448	0,7939	0,7582	0,7314	0,6937	0,6496	0,5961	0,5269
16	1,0719	0,9144	0,8331	0,7814	0,7450	0,7177	0,6791	0,6339	0,5786	0,5064
17	1,0641	0,9051	0,8229	0,7705	0,7335	0,7057	0,6663	0,6199	0,5630	0,4879
18	1,0572	0,8970	0,8138	0,7607	0,7232	0,6950	0,6549	0,6075	0,5491	0,4712
19	1,0511	0,8897	0,8057	0,7521	0,7140	0,6854	0,6447	0,5964	0,5366	0,4560
20	1,0457	0,8831	0,7985	0,7443	0,7058	0,6768	0,6355	0,5864	0,5253	0,4421
21	1,0408	0,8772	0,7920	0,7372	0,6984	0,6690	0,6272	0,5773	0,5150	0,4294
22	1,0363	0,8719	0,7860	0,7309	0,6916	0,6620	0,6196	0,5691	0,5056	0,4176
23	1,0322	0,8670	0,7806	0,7251	0,6855	0,6555	0,6127	0,5615	0,4969	0,4068
24	1,0285	0,8626	0,7757	0,7197	0,6799	0,6496	0,6064	0,5545	0,4890	0,3967
25	1,0251	0,8585	0,7712	0,7148	0,6747	0,6442	0,6006	0,4381	0,4816	0,3872
26	1,0220	0,8548	0,7670	0,7103	0,6699	0,6392	0,5952	0,5422	0,4748	0,3784
27	1,0191	0,8513	0,7631	0,7062	0,6655	0,6346	0,5902	0,5367	0,4685	0,3701
28	1,0164	0,8481	0,7595	0,7023	0,6614	0,6303	0,5856	0,5316	0,4626	0,3624
29	1,0139	0,8451	0,7562	0,6987	0,6576	0,6263	0,5813	0,5269	0,4570	0,3550
30	1,0116	0,8423	0,7531	0,6954	0,6540	0,6226	0,5773	0,5224	0,4519	0,3481
40	0,9949	0,8223	0,7307	0,6712	0,6283	0,5956	0,5481	0,4901	0,4138	0,2952
60	0,9784	0,8025	0,7086	0,6472	0,6028	0,5687	0,5189	0,4574	0,3746	0,2352
120	0,9622	0,7829	0,6867	0,6234	0,5774	0,5419	0,4897	0,4243	0,3339	0,1612
∞	0,9462	0,7636	0,6651	0,5999	0,5522	0,5152	0,4604	0,3908	0,2913	0,0000

29. *F*-razdioba (razdioba v^2)*)



m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	239 **5981**	241 **6022**	242 **6056**	243 **6082**	244 **6106**
2	18,51 **98,50**	19,00 **99,00**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,30 **99,30**	19,33 **99,33**	19,35 **99,36**	19,37 **99,37**	19,38 **99,39**	19,39 **99,40**	19,40 **99,41**	19,41 **99,42**
3	10,13 **34,12**	9,55 **30,82**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,89 **27,67**	8,85 **27,49**	8,81 **27,34**	8,79 **27,23**	8,76 **27,13**	8,74 **27,05**
4	7,71 **21,20**	6,94 **18,00**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	6,04 **14,80**	6,00 **14,66**	5,96 **14,55**	5,94 **14,45**	5,91 **14,37**
5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,46**	4,82 **10,29**	4,77 **10,16**	4,74 **10,05**	4,70 **9,96**	4,68 **9,89**
6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	4,15 **8,10**	4,10 **7,98**	4,06 **7,87**	4,03 **7,79**	4,00 **7,72**
7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7,00**	3,73 **6,84**	3,68 **6,72**	3,64 **6,62**	3,60 **6,54**	3,57 **6,47**
8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,50 **6,18**	3,44 **6,03**	3,39 **5,91**	3,35 **5,81**	3,31 **5,73**	3,28 **5,67**
9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,80**	3,29 **5,61**	3,23 **5,47**	3,18 **5,35**	3,14 **5,26**	3,10 **5,18**	3,07 **5,11**
10	4,96 **10,04**	4,10 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,20**	3,07 **5,06**	3,02 **4,94**	2,98 **4,85**	2,94 **4,77**	2,91 **4,71**
11	4,84 **9,65**	3,98 **7,21**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,20 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,89**	2,95 **4,74**	2,90 **4,68**	2,85 **4,54**	2,82 **4,46**	2,79 **4,40**
12	4,75 **9,33**	3,89 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3,00 **4,82**	2,91 **4,64**	2,85 **4,50**	2,80 **4,39**	2,75 **4,30**	2,72 **4,22**	2,69 **4,16**
13	4,67 **9,07**	3,81 **6,70**	3,41 **5,74**	3,18 **5,21**	3,03 **4,86**	2,92 **4,62**	2,83 **4,44**	2,77 **4,30**	2,71 **4,19**	2,67 **4,10**	2,63 **4,02**	2,60 **3,96**
14	4,60 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,04**	2,96 **4,70**	2,85 **4,46**	2,76 **4,28**	2,70 **4,14**	2,65 **4,03**	2,60 **3,94**	2,57 **3,86**	2,53 **3,80**

*) U tablici su dane vrijednosti kvantila $v^2_{1-\alpha}(m_1, m_2)$ za $\alpha = 0{,}05$ (svjetlo otisnute) slobode za veće disperzije, dok je m_2 stupanj slobode za manje disperzije).

Nastavak tablice 29.

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
245 **6143**	246 **6169**	248 **6209**	249 **6235**	250 **6261**	251 **6287**	252 **6302**	253 **6323**	253 **6334**	254 **6352**	254 **6361**	254 **6366**	1
19,42 **99,43**	19,43 **99,44**	19,44 **99,45**	19,45 **99,46**	19,46 **99,47**	19,47 **99,47**	19,48 **99,48**	19,48 **99,48**	19,49 **99,49**	19,49 **99,49**	19,50 **99,50**	19,50 **99,50**	2
8,71 **26,92**	8,69 **26,83**	8,66 **26,69**	8,64 **26,60**	8,62 **26,50**	8,59 **26,41**	8,58 **26,35**	8,57 **26,27**	8,55 **26,23**	8,54 **26,18**	8,53 **26,14**	8,53 **26,12**	3
5,87 **14,25**	5,84 **14,15**	5,80 **14,02**	5,77 **13,93**	5,75 **13,84**	5,72 **13,74**	5,70 **13,69**	5,68 **13,61**	5,66 **13,57**	5,65 **13,52**	5,64 **13,48**	5,63 **13,46**	4
4,64 **9,77**	4,60 **9,68**	4,56 **9,55**	4,53 **9,47**	4,50 **9,38**	4,46 **9,29**	4,44 **9,24**	4,42 **9,17**	4,41 **9,13**	4,39 **9,08**	4,37 **9,04**	4,36 **9,02**	5
3,96 **7,60**	3,92 **7,52**	3,87 **7,39**	3,84 **7,31**	3,81 **7,23**	3,77 **7,14**	3,75 **7,09**	3,72 **7,02**	3,71 **6,99**	3,69 **6,93**	3,68 **6,90**	3,67 **6,88**	6
3,53 **6,36**	3,49 **6,27**	3,44 **6,16**	3,41 **6,07**	3,38 **5,99**	3,34 **5,91**	3,32 **5,86**	3,29 **5,78**	3,27 **5,75**	3,25 **5.70**	3,24 **5.67**	3,23 **5.65**	7
3,24 **5,56**	3,20 **5,48**	3,15 **5,36**	3,12 **5,28**	3,08 **5,20**	3,05 **5,12**	3,02 **5,07**	3,00 **5,00**	2,97 **4,96**	2,95 **4,91**	2,94 **4,88**	2,93 **4,86**	8
3,03 **5,00**	2,99 **4,92**	2,93 **4,81**	2,90 **4,73**	2,86 **4,65**	2,83 **4,57**	2,80 **4,52**	2,77 **4,45**	2,76 **4,42**	2,73 **4,36**	2,72 **4,33**	2,71 **4,31**	9
2,86 **4,60**	2,83 **4,52**	2,77 **4,41**	2,74 **4,33**	2,70 **4,25**	2,66 **4,17**	2,64 **4,12**	2,61 **4,05**	2,59 **4,01**	2,56 **3,96**	2,55 **3,93**	2,54 **3,91**	10
2,74 **4,29**	2,70 **4,21**	2,65 **4,10**	2,61 **4,02**	2,57 **3,94**	2,53 **3,86**	2,51 **3,81**	2,47 **3,74**	2,46 **3,71**	2,43 **3,66**	2,42 **3,62**	2,40 **3,60**	11
2,64 **4,05**	2,60 **3,97**	2,54 **3,86**	2,51 **3,78**	2,47 **3,70**	2,43 **3,62**	2,40 **3,57**	2,36 **3,49**	2,35 **3,47**	2,32 **3,41**	2,31 **3,38**	2,30 **3,36**	12
2,55 **3,86**	2,51 **3,78**	2,46 **3,66**	2,42 **3,59**	2,38 **3,51**	2,34 **3,43**	2,31 **3,38**	2,28 **3,30**	2,26 **3,27**	2,23 **3,22**	2,22 **3,19**	2,21 **3,17**	13
2,48 **3,70**	2,44 **3,62**	2,39 **3,51**	2,35 **3,43**	2,31 **3,35**	2,27 **3,27**	2,24 **3,22**	2,21 **3,14**	2,19 **3,11**	2,16 **3,06**	2,14 **3,03**	2,13 **3,00**	14

i za $\alpha = 0{,}01$ (masno otisnute) u ovisnosti o stupnjevima slobode m_1 i m_2 (m_1 je stupanj

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,90 **4,56**	2,79 **4,32**	2,71 **4,14**	2,64 **4,00**	2,59 **3,98**	2,54 **3,80**	2,51 **3,78**	2,48 **3,67**
16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,20**	2,66 **4,03**	2,59 **3,89**	2,54 **3,78**	2,49 **3,69**	2.46 **3,62**	2,42 **3,55**
17	4,45 **8,40**	3,59 **6,11**	3,20 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,70 **4,10**	2,61 **3,93**	2,55 **3,79**	2,49 **3,68**	2,45 **3,59**	2,41 **3,52**	2,38 **3,46**
18	4,41 **8,29**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,25**	2,66 **4,01**	2,58 **3,84**	2,51 **3,71**	2,46 **3,60**	2,41 **3,51**	2,37 **3,43**	2,34 **3,37**
19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,90 **4,50**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,54 **3,77**	2,48 **3,63**	2,42 **3,52**	2,38 **3,43**	2,34 **3,36**	2,31 **3,30**
20	4,35 **8,10**	3,49 **5,85**	3,10 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,10**	2,60 **3,87**	2,51 **3,70**	2,45 **3,56**	2,39 **3,46**	2,35 **3,37**	2,31 **3,29**	2,28 **3,23**
21	4,32 **8,02**	3,47 **5,78**	3,07 **4,87**	2,84 **4,37**	2,68 **4,04**	2,57 **3,81**	2,49 **3,64**	2,42 **3,51**	2,37 **3,40**	2,32 **3,31**	2,28 **3,24**	2,25 **3,17**
22	4,30 **7,95**	3,44 **5,72**	3,05 **4,82**	2,82 **4,81**	2,66 **3,99**	2,55 **3,76**	2,46 **3,59**	2,40 **3,45**	2,34 **3,35**	2,30 **3,26**	2,26 **3,18**	2,23 **3,12**
23	4,28 **7,88**	3,42 **5,66**	3,03 **4,76**	2,80 **4,26**	2,64 **3,94**	2,53 **3,71**	2,44 **3,54**	2,37 **3,41**	2,32 **3,30**	2,27 **3,21**	2,24 **3,14**	2,20 **3,07**
24	4,26 **7,82**	3,40 **5,61**	3,01 **4,72**	2,78 **4,22**	2,62 **3,90**	2,51 **3,67**	2,42 **3,50**	2,36 **3,36**	2,30 **3,26**	2,25 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,03**
25	4,24 **7,77**	3,39 **5,57**	2,99 **4,68**	2,76 **4,18**	2,60 **3,86**	2,49 **3,63**	2,40 **3,46**	2,34 **3,32**	2,28 **3,22**	2,24 **3,13**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**
26	4,23 **7,72**	4,37 **5,53**	2,98 **4,64**	2,74 **4,14**	2,59 **3,82**	2,47 **3,59**	2,39 **3,42**	2,32 **3,29**	2,27 **3,18**	2,22 **3,09**	2,18 **3,02**	2,15 **2,96**
27	4,21 **7,68**	3,35 **5,49**	2,96 **4,60**	2,73 **4,11**	2,57 **3,78**	2,46 **3,56**	2,37 **3,39**	2,31 **3,26**	2,25 **3,15**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**	2,13 **2,83**
28	4,20 **7,64**	3,34 **5,45**	2,95 **4,57**	2,71 **4,07**	2,56 **3,76**	2,45 **3,53**	2.36 **3,36**	2,29 **3,23**	2,24 **3,12**	2,19 **3,03**	2.15 **2,96**	2,12 **2,90**
29	4,18 **7,60**	3,33 **5,42**	2,93 **4,54**	2,70 **4,04**	2,55 **3,73**	2,43 **3,50**	2,35 **3,33**	2,28 **3,20**	2,22 **3,09**	2,18 **3,00**	2,14 **2,93**	2,10 **2,87**
30	4,17 **7,56**	3,32 **5,39**	2,92 **4,51**	2,69 **4,02**	2,53 **3,70**	2,42 **3,47**	2,33 **3,30**	2,27 **3,17**	2,21 **3,07**	2,16 **2,98**	2,13 **2,90**	2,09 **2,84**
32	4,15 **7,50**	3,29 **5,34**	2,90 **4,46**	2,67 **3,97**	2,51 **3,65**	2,40 **3,43**	2,31 **3,25**	2,24 **3,13**	2,19 **3,02**	2,14 **2,93**	2,10 **2,86**	2,07 **2,80**
34	4,13 **7,44**	3,28 **5,29**	2,88 **4,42**	2,65 **3,93**	2,49 **3,61**	2,38 **3,39**	2,29 **3,22**	2,23 **3,09**	2,17 **2,98**	2,12 **2,89**	2,08 **2,82**	2,05 **2,76**
36	4,11 **7,40**	3,26 **5,25**	2,87 **4,38**	2,63 **3,89**	2,48 **3,57**	2,36 **3,35**	2,28 **3,18**	2,21 **3,05**	2,15 **2,95**	2,11 **2,86**	2,07 **2,79**	2,03 **2,72**

Nastavak tablice 29.

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
2,42 **3,56**	2,38 **3,49**	2,33 **3,37**	2,29 **3,29**	2,25 **3,21**	2.20 **3,13**	2,18 **3,08**	2,15 **3,00**	2,12 **2,98**	2,10 **2,92**	2,08 **2,89**	2,07 **2,87**	15
2,37 **3,45**	2,33 **3,37**	2,28 **3,26**	2,24 **3,18**	2.19 **3,10**	2,15 **3,02**	2,12 **2,97**	2,09 **2,86**	2,07 **2,86**	2,04 **2,81**	2,02 **2,78**	2,01 **2,75**	16
2,33 **3,35**	2,29 **3,27**	2,23 **3,16**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,10 **2,92**	2,08 **2,87**	2,04 **2,79**	2,02 **2,76**	1,99 **2,71**	1,97 **2,68**	1,96 **2,65**	17
2,29 **3,27**	2,25 **3,19**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,06 **2,84**	2,04 **2,78**	2,00 **2,71**	1,98 **2,68**	1,95 **2,62**	1,93 **2,59**	1,92 **2,57**	18
2,26 **3,19**	2,21 **3,12**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,07 **2,84**	2,03 **2,76**	2,00 **2,71**	1,96 **2,63**	1,94 **2,60**	1,91 **2,55**	1,90 **2,51**	1,88 **2,49**	19
2,22 **3,13**	2,18 **3,05**	2,12 **2,94**	2,08 **2,86**	2,04 **2,78**	1,99 **2,69**	1,97 **2,64**	1,92 **2,56**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,86 **2,44**	1,84 **2,42**	20
2,20 **3,07**	2,16 **2,99**	2,10 **2,88**	2,05 **2,80**	2,01 **2,72**	1,96 **2,64**	1,94 **2,58**	1,89 **2,51**	1,88 **2,48**	1,84 **2,42**	1,82 **2,38**	1,81 **2,36**	21
2,17 **3,02**	2,13 **2,94**	2,07 **2,83**	2,03 **2,75**	1,98 **2,67**	1,94 **2,58**	1,91 **2,53**	1,87 **2,46**	1,85 **2,42**	1,81 **2,36**	1,80 **2,33**	1,78 **2,31**	22
2,15 **2,97**	2,11 **2,89**	2,05 **2,78**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,84 **2,41**	1,82 **2,37**	1,79 **2,32**	1,77 **2,28**	1,76 **2,26**	23
2.13 **2,93**	2,09 **2,85**	2,03 **2,74**	1,98 **2,66**	1,94 **2,58**	1,89 **2,49**	1,86 **2,44**	1,82 **2,36**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,75 **2,24**	1,73 **2,21**	24
2,11 **2,89**	2,07 **2,81**	2,01 **2,70**	1,96 **2,62**	1,92 **2,54**	1,87 **2,45**	1,84 **2,40**	1,80 **2,32**	1,78 **2,29**	1,75 **2,23**	1,73 **2,19**	1,71 **2,17**	25
2,10 **2,86**	2,05 **2,78**	1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,90 **2,50**	1,85 **2,42**	1,82 **2,36**	1,78 **2,28**	1,76 **2,25**	1,73 **2,19**	1,70 **2,16**	1,69 **2,13**	26
2,08 **2,82**	2,04 **2,75**	1,97 **2,63**	1,93 **2,55**	1,88 **2,47**	1,84 **2,38**	1,81 **2,33**	1,76 **2,25**	1,74 **2,22**	1,71 **2,16**	1,68 **2,12**	1,67 **2,10**	27
2,06 **2,80**	2,02 **2,71**	1,96 **2,60**	1,91 **2,52**	1,87 **2,44**	1,82 **2,35**	1,79 **2,30**	1,75 **2,22**	1,73 **2,19**	1,69 **2,13**	1,67 **2,09**	1,65 **2,06**	28
2,05 **2,77**	2,01 **2,69**	1,94 **2,57**	1,90 **2,49**	1,85 **2,41**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,73 **2,19**	1,71 **2,16**	1,67 **2,10**	1,65 **2,06**	1,64 **2,03**	29
2,04 **2,74**	1,99 **2,66**	1,93 **2,55**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,79 **2,30**	1,76 **2,25**	1,72 **2,16**	1,70 **2,13**	1,66 **2,07**	1,64 **2,03**	1,62 **2,01**	30
2,01 **2,70**	1,97 **2,62**	1,91 **2,50**	1,86 **2,42**	1,82 **2,34**	1,77 **2,25**	1,74 **2,20**	1,69 **2,12**	1,67 **2,08**	1,63 **2,02**	1,61 **1,98**	1,59 **1,96**	32
1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,89 **2,46**	1,84 **2,38**	1,80 **2,30**	1,75 **2,21**	1,71 **2,16**	1,67 **2,08**	1,65 **2,04**	1,61 **1,98**	1,59 **1,94**	1,57 **1,91**	34
1,98 **2,62**	1,93 **2,54**	1,87 **2,43**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,73 **2,17**	1,69 **2,12**	1,65 **2,04**	1,62 **2,00**	1,59 **1,94**	1,56 **1,90**	1,55 **1,87**	36

m_2	m_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38	4,10 **7,35**	3,24 **5,21**	2,85 **4,34**	2,62 **3,86**	2,46 **3,54**	2,35 **3,32**	2,26 **3,15**	2,19 **3,02**	2,14 **2,91**	2,09 **2,82**	2,05 **2,75**	2,02 **2,69**
40	4,08 **7,31**	3,23 **5,18**	2,84 **4,31**	2,61 **3,83**	2,45 **3,51**	2,34 **3,29**	2,25 **3,12**	2,18 **2,99**	2,12 **2,89**	2,08 **2,80**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**
42	4,07 **7,28**	3,22 **5,15**	2,83 **4,29**	2,59 **3,80**	2,44 **3,49**	2,32 **3,27**	2,24 **3,10**	2,17 **2,97**	2,11 **2,86**	2,06 **2,78**	2,03 **2,70**	1,99 **2,64**
44	4,06 **7,25**	3,21 **5,12**	2,82 **4,26**	2,58 **3,78**	2,43 **3,47**	2,31 **3,24**	2,23 **3,08**	2,16 **2,95**	2,10 **2,84**	2,05 **2,75**	2,01 **2,68**	1,98 **2,62**
46	4,05 **7,22**	3,20 **5,10**	2,81 **4,24**	2,57 **3,76**	2,42 **3,44**	2,30 **3,22**	2,22 **3,06**	2,15 **2,93**	2,09 **2,82**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,97 **2,60**
48	4,04 **7,20**	3,19 **5,08**	2,80 **4,22**	2,57 **3,74**	2,41 **3,43**	2,30 **3,30**	2,21 **3,04**	2,14 **2,91**	2,08 **2,80**	2,03 **2,72**	1,99 **2,64**	1,96 **2,58**
50	4,03 **7,17**	3,18 **5,06**	2,79 **4,20**	2,56 **3,72**	2,40 **3,41**	2,29 **3,19**	2,20 **3,02**	2,13 **2,89**	2,07 **2,79**	2,03 **2,70**	1,99 **2,63**	1,95 **2,56**
55	4,02 **7,12**	3,16 **5,01**	2,78 **4,16**	2,54 **3,68**	2,38 **3,37**	2,27 **3,15**	2,18 **2,98**	2,11 **2,85**	2,06 **2,75**	2,01 **2,66**	1,97 **2,59**	1,93 **2,53**
60	4,00 **7,08**	3,15 **4,98**	2,76 **4,13**	2,53 **3,65**	2,37 **3,34**	2,25 **3,12**	2,17 **2,95**	2,10 **2,82**	2,04 **2,72**	1,99 **2,63**	1,95 **2,56**	1,92 **2,50**
65	3,99 **7,04**	3,14 **4,95**	2,75 **4,10**	2,51 **3,62**	2,36 **3,31**	2,24 **3,09**	2,15 **2,93**	2,08 **2,80**	2,03 **2,69**	1,98 **2,61**	1,94 **2,53**	1,90 **2,47**
70	3,98 **7,01**	3,13 **4,92**	2,74 **4,08**	2,50 **3,60**	2,35 **3,29**	2,23 **3,07**	2,14 **2,91**	2,07 **2,78**	2,02 **2,67**	1,97 **2,59**	1,93 **2,51**	1,89 **2,45**
80	3,96 **6,96**	3,11 **4,88**	2,72 **4,04**	2,49 **3,56**	2,33 **3,26**	2,21 **3,04**	2,13 **2,87**	2,06 **2,74**	2,00 **2,64**	1,95 **2,55**	1,91 **2,48**	1,88 **2,42**
100	3,94 **6,90**	3,09 **4,82**	2,70 **3,98**	2,46 **3,51**	2,31 **3,21**	2,19 **2,99**	2,10 **2,82**	2,03 **2,69**	1,97 **2,59**	1,93 **2,50**	1,89 **2,43**	1,85 **2,37**
125	3,92 **6,84**	3,07 **4,78**	2,68 **3,94**	2,44 **3,47**	2,29 **3,17**	2,17 **2,95**	2,08 **2,79**	2,01 **2,66**	1,96 **2,55**	1,91 **2,50**	1,87 **2,40**	1,83 **2,33**
150	3,90 **6,81**	3,06 **4,75**	2,66 **3,92**	2,43 **3,45**	2,27 **3,14**	2,16 **2,92**	2,07 **2,76**	2,00 **2,63**	1,94 **2,53**	1,89 **2,44**	1,85 **2,37**	1,82 **2,31**
200	3,89 **6,76**	3,04 **4,71**	2,65 **3,88**	2,42 **3,41**	2,26 **3,11**	2,14 **2,89**	2,06 **2,73**	1,98 **2,60**	1,93 **2,50**	1,88 **2,41**	1,84 **2,34**	1,80 **2,27**
400	3,86 **6,70**	3,02 **4,66**	2,62 **3,83**	2,39 **3,36**	2.23 **3,06**	2.12 **2,85**	2.03 **2,69**	1,96 **2,55**	1,90 **2,46**	1,85 **2,37**	1,81 **2,29**	1,78 **2,23**
1000	3,85 **6,66**	3,00 **4,63**	2,61 **3,80**	2,38 **3,34**	2,22 **3,04**	2,11 **2,82**	2,02 **2,66**	1,95 **2,53**	1,89 **2,43**	1,84 **2,34**	1,80 **2,27**	1,76 **2,20**
∞	3,84 **6,63**	3,00 **4,61**	2,60 **3,78**	2,37 **3,32**	2,21 **3,02**	2,10 **2,80**	2,01 **2,64**	1,94 **2,51**	1,88 **2,41**	1,83 **2,32**	1,79 **2,25**	1,75 **2,18**

Nastavak tablice 29.

m_1 = 14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	m_2
1,96 **2,59**	1,92 **2,51**	1,85 **2,40**	1,81 **2,32**	1,76 **2,23**	1,71 **2,14**	1,68 **2,09**	1,63 **2,00**	1,61 **1,97**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,53 **1,84**	38
1,95 **2,56**	1,90 **2,48**	1,84 **2,37**	1,79 **2,29**	1,74 **2,20**	1,69 **2,11**	1,66 **2,06**	1,61 **1,97**	1,59 **1,94**	1,55 **1,87**	1,53 **1,83**	1,51 **1,80**	40
1,93 **2,54**	1,89 **2,46**	1,83 **2,34**	1,78 **2,26**	1,73 **2,18**	1,68 **2,09**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,57 **1,91**	1,53 **1,85**	1,51 **1,80**	1,49 **1,78**	42
1,92 **2,52**	1,88 **2,44**	1,81 **2,32**	1,77 **2,24**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,63 **2,01**	1,58 **1,92**	1,56 **1,89**	1,52 **1,82**	1,49 **1,78**	1,48 **1,75**	44
1,91 **2,50**	1,87 **2,42**	1,80 **2,30**	1,76 **2,22**	1,71 **2,13**	1,65 **2,04**	1,62 **1,99**	1,57 **1,90**	1,55 **1,86**	1,51 **1,80**	1,48 **1,75**	1,46 **1,73**	46
1,90 **2,48**	1,86 **2,40**	1,79 **2,28**	1,75 **2,20**	1,70 **2,12**	1,64 **2,08**	1,61 **1,97**	1,56 **1,88**	1,54 **1,84**	1,49 **1,78**	1,47 **1,73**	1,45 **1,70**	48
1,89 **2,46**	1,85 **2,38**	1,78 **2,26**	1,74 **2,18**	1,69 **2,10**	1,63 **2,00**	1,60 **1,95**	1,55 **1,86**	1,52 **1,82**	1,48 **1,76**	1,46 **1,71**	1,44 **1,68**	50
1,88 **2,43**	1,83 **2,34**	1,76 **2,23**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,61 **1,96**	1,58 **1,91**	1,52 **1,82**	1,50 **1,78**	1,46 **1,71**	1,43 **1,67**	1,41 **1,64**	55
1,86 **2,39**	1,82 **2,31**	1,75 **2,20**	1,70 **2,12**	1,65 **2,03**	1,59 **1,94**	1,56 **1,88**	1,50 **1,79**	1,48 **1,75**	1,44 **1,68**	1,41 **1,63**	1,39 **1,60**	60
1,85 **2,37**	1,80 **2,29**	1,73 **2,18**	1,69 **2,09**	1,63 **2,00**	1,58 **1,90**	1,54 **1,85**	1,49 **1,76**	1,46 **1,72**	1,42 **1,65**	1,39 **1,60**	1,37 **1,56**	65
1,84 **2,35**	1,79 **2,27**	1,72 **2,15**	1,67 **2,07**	1,62 **1,98**	1,57 **1,88**	1,53 **1,83**	1,47 **1,74**	1,45 **1,70**	1,40 **1,62**	1,37 **1,57**	1,35 **1,53**	70
1,82 **2,31**	1,77 **2,23**	1,70 **2,12**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,54 **1,85**	1,51 **1,79**	1,45 **1,70**	1,43 **1,66**	1,38 **1,58**	1,35 **1,53**	1,32 **1,49**	80
1,79 **2,26**	1,75 **2,19**	1,68 **2,06**	1,63 **1,98**	1,57 **1,89**	1,52 **1,79**	1,48 **1,73**	1,42 **1,64**	1,39 **1,60**	1,34 **1,52**	1,31 **1,47**	1,28 **1,43**	100
1,77 **2,23**	1,72 **2,15**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,55 **1,85**	1,49 **1,75**	1,45 **1,69**	1,39 **1,59**	1,36 **1,55**	1,31 **1,47**	1,27 **1,41**	1,25 **1,37**	125
1,76 **2,20**	1,71 **2,12**	1,64 **2,00**	1,59 **1,91**	1,53 **1,83**	1,48 **1,72**	1,44 **1,66**	1,37 **1,56**	1,34 **1,52**	1,29 **1,43**	1,25 **1,38**	1,22 **1,33**	150
1,74 **2,17**	1,69 **2,09**	1,62 **1,97**	1,57 **1,88**	1,52 **1,79**	1,46 **1,69**	1,41 **1,63**	1,35 **1,53**	1,32 **1,48**	1,26 **1,39**	1,22 **1,33**	1,19 **1,28**	200
1,72 **2,12**	1,67 **2,04**	1,60 **1,92**	1,54 **1,84**	1,49 **1,74**	1,42 **1,64**	1,38 **1,57**	1,32 **1,47**	1,28 **1,42**	1,22 **1,32**	1,16 **1,24**	1,13 **1,19**	400
1,70 **2,09**	1,65 **2,02**	1,58 **1,89**	1,53 **1,81**	1,47 **1,71**	1,41 **1,61**	1,36 **1,54**	1,30 **1,44**	1,26 **1,38**	1,19 **1,28**	1,13 **1,19**	1,08 **1,11**	1000
1,69 **2,08**	1,64 **2,00**	1,57 **1,88**	1,52 **1,79**	1,46 **1,70**	1,39 **1,59**	1,35 **1,52**	1,28 **1,41**	1,24 **1,36**	1,17 **1,25**	1,11 **1,15**	1,00 **1,00**	∞

30. Kritički brojevi za Wilcoxonov test (vidi 11. na str. 841)

$\alpha = 0{,}05$

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	n_1
	—	—	—	—	8,0	9,0	10,0	10,0	10,0	12,0	13,0	2
	—	7,5	8,0	9,5	10,0	11,5	12,0	13,5	14,0	15,5	16,0	3
	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	4
	9,0	10,5	12,0	12,5	14,0	15,5	17,0	18,5	19,0	20,5	22,0	5
			13,0	15,0	16,0	17,0	19,0	20,0	22,0	23,0	25,0	6
15	47,5			16,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	27,0	7
14	46,0	48,0			19,0	21,0	23,0	25,0	26,0	28,0	29,0	8
13	43,5	45,0	47,5			22,5	25,0	26,5	28,0	30,5	32,0	9
12	41,0	43,0	45,0	47,0			27,0	29,0	30,0	32,0	34,0	10
11	38,5	40,0	42,5	44,0	46,5			30,5	33,0	34,5	37,0	11
10	36,0	38,0	40,0	42,0	43,0	45,0			35,0	37,0	39,0	12
9	33,5	35,0	37,5	39,0	40,5	42,0	44,5			38,5	41,0	13
8	31,0	33,0	34,0	36,0	38,0	39,0	41,0	42,0			43,0	14
7	28,5	30,0	31,5	33,0	34,5	36,0	37,5	39,0	40,5			
6	26,0	27,0	29,0	30,0	32,0	33,0	34,0	36,0	37,0	38,0	39,0	
5	23,5	24,0	25,5	27,0	28,5	30,0	30,5	32,0	33,5	35,0	35,5	
4	20,0	21,0	23,0	24,0	25,0	26,0	27,0	28,0	29,0	30,0	32,0	
3	17,5	18,0	19,5	20,0	21,5	22,0	23,5	24,0	25,5	26,0	27,5	
2	14,0	15,0	15,0	16,0	17,0	18,0	18,0	19,0	20,0	21,0	22,0	

n_1 \ n_2	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

$\alpha = 0{,}01$

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	n_1
	—	—	—	—	—	13,5	15,0	16,5	17,0	18,5	20,0	3
	—	—	12,0	14,0	15,0	17,0	18,0	20,0	21,0	22,0	24,0	4
	—	12,5	14,0	15,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	28,0	5
			16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	27,0	29,0	31,0	6
15	61,5			20,5	22,0	24,5	26,0	28,5	30,0	32,5	34,0	7
14	59,0	62,0			25,0	27,0	29,0	31,0	33,0	35,0	38,0	8
13	55,5	58,0	61,5			29,5	32,0	33,5	36,0	38,5	41,0	9
12	53,0	55,0	58,0	61,0			34,0	36,0	39,0	41,0	44,0	10
11	49,5	52,0	54,5	57,0	59,5			39,5	42,0	44,5	47,0	11
10	46,0	49,0	51,0	53,0	56,0	58,0			44,0	47,0	50,0	12
9	42,5	45,0	47,5	50,0	52,5	54,0	56,5			50,5	53,0	13
8	40,0	42,0	44,0	46,0	48,0	50,0	52,0	54,0			56,0	14
7	36,5	38,0	40,5	42,0	44,5	46,0	48,5	50,0	51,5			
6	33,0	35,0	36,0	38,0	40,0	42,0	44,0	45,0	47,0	49,0	51,0	
5	29,5	31,0	32,5	34,0	35,5	37,0	38,5	41,0	42,5	44,0	45,5	
4	25,0	27,0	28,0	30,0	31,0	32,0	34,0	35,0	37,0	38,0	40,0	
3	20,5	22,0	23,5	25,0	25,5	27,0	28,5	29,0	30,5	32,0	32,5	
2	—	—	—	—	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0	25,0	

n_1 \ n_2	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

31. λ-razdioba Kolmogorova-Smirnova (vidi 14. na str. 846)

λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$
0,32	0,0000	0,66	0,2236	1,00	0,7300	1,34	0,9449	1,68	0,9929	2,00	0,9993
0,33	0,0001	0,67	0,2396	1,01	0,7406	1,35	0,9478	1,69	0,9934	2,01	0,9994
0,34	0,0002	0,68	0,2558	1,02	0,7508	1,36	0,9505	1,70	0,9938	2,02	0,9994
0,35	0,0003	0,69	0,2722	1,03	0,7608	1,37	0,9531	1,71	0,9942	2,03	0,9995
0,36	0,0005	0,70	0,2888	1,04	0,7704	1,38	0,9556	1,72	0,9946	2,04	0,9995
0,37	0,0008	0,71	0,3055	1,05	0,7798	1,39	0,9580	1,73	0,9950	2,05	0,9996
0,38	0,0013	0,72	0,3223	1,06	0,7889	1,40	0,9603	1,74	0,9953	2,06	0,9996
0,39	0,0019	0,73	0,3391	1,07	0,7976	1,41	0,9625	1,75	0,9956	2,07	0,9996
0,40	0,0028	0,74	0,3560	1,08	0,8061	1,42	0,9646	1,76	0,9959	2,08	0,9996
0,41	0,0040	0,75	0,3728	1,09	0,8143	1,43	0,9665	1,77	0,9962	2,09	0,9997
0,42	0,0055	0,76	0,3896	1,10	0,8223	1,44	0,9684	1,78	0,9965	2,10	0,9997
0,43	0,0074	0,77	0,4064	1,11	0,8299	1,45	0,9702	1,79	0,9967	2,11	0,9997
0,44	0,0097	0,78	0,4230	1,12	0,8374	1,46	0,9718	1,80	0,9969	2,12	0,9997
0,45	0,0126	0,79	0,4395	1,13	0,8445	1,47	0,9734	1,81	0,9971	2,13	0,9998
0,46	0,0160	0,80	0,4559	1,14	0,8514	1,48	0,9750	1,82	0,9973	2,14	0,9998
0,47	0,0200	0,81	0,4720	1,15	0,8580	1,49	0,9764	1,83	0,9975	2,15	0,9998
0,48	0,0247	0,82	0,4880	1,16	0,8644	1,50	0,9778	1,84	0,9977	2,16	0,9998
0,49	0,0300	0,83	0,5038	1,17	0,8706	1,51	0,9791	1,85	0,9979	2,17	0,9998
0,50	0,0361	0,84	0,5194	1.18	0,8765	1,52	0,9803	1,86	0,9980	2,18	0,9999
0,51	0,0428	0,85	0,5347	1,19	0,8823	1,53	0,9815	1,87	0,9981	2,19	0,9999
0,52	0,0503	0,86	0,5497	1,20	0,8877	1,54	0,9826	1,88	0,9983	2,20	0,9999
0,53	0,0585	0,87	0,5645	1,21	0,8930	1,55	0,9836	1,89	0,9984	2,21	0,9999
0,54	0,0675	0,88	0,5791	1,22	0,8981	1,56	0,9846	1,90	0,9985	2,22	0,9999
0,55	0,0772	0,89	0,5933	1,23	0,9030	1,57	0,9855	1,91	0,9986	2,23	0,9999
0,56	0,0876	0,90	0,6073	1,24	0,9076	1,58	0,9864	1,92	0,9987	2,24	0,9999
0,57	0,0987	0,91	0,6209	1,25	0,9121	1,59	0,9873	1,93	0,9988	2,25	0,9999
0,58	0,1104	0,92	0,6343	1,26	0,9164	1,60	0,9880	1,94	0,9989	2,26	0,9999
0,59	0,1228	0,93	0,6473	1,27	0,9206	1,61	0,9888	1,95	0,9990	2,27	0,9999
0,60	0,1357	0,94	0,6601	1,28	0,9245	1,62	0,9895	1,96	0,9991	2,28	0,9999
0,61	0,1492	0,95	0,6725	1,29	0,9283	1,63	0,9902	1,97	0,9991	2,29	0,9999
0,62	0,1632	0,96	0,6846	1,30	0,9319	1,64	0,9908	1,98	0,999	2,30	0,9999
0,63	0,1778	0,97	0,6964	1,31	0,9354	1,65	0,9914	1,99	0,9993	2,31	1,0000
0,64	0,1927	0,98	0,7079	1,32	0,9387	1,66	0,9919				
0,65	0,2080	0,99	0,7191	1,33	0,9418	1,67	0,9924				

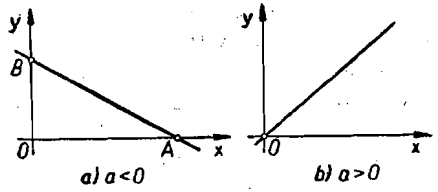
II. GRAFOVI

A. ELEMENTARNE FUNKCIJE

1. POLINOMI

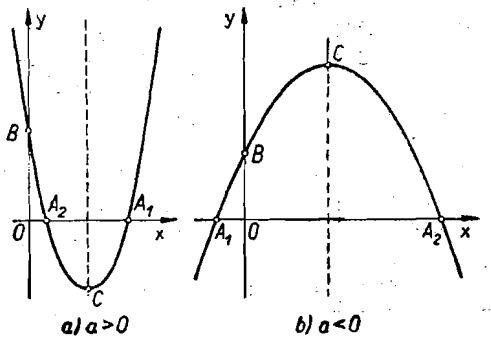
Linearna funkcija: $y = ax + b$ (sl. 2, *a*).

Graf je *pravac*. Funkcija monotono raste za $a > 0$, monotono pada za $a < 0$, a za $a = 0$ je konstantna. Sjecišta s osima: $A(-b/a, 0)$, $B(0, b)$. Detaljnije vidi na str. 254. Za $b = 0$ *upravna proporcionalnost*: $y = ax$; graf je pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sistema (sl. 2, *b*).



Sl. 2

Kvadratni trinom: $y = ax^2 + bx + c$ (sl. 3).



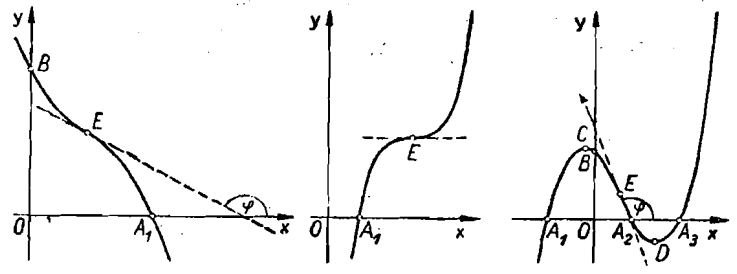
Sl. 3

Graf je *parabola* s vertikalnom osi simetrije $x = -b/2a$. Za $a > 0$ funkcija u početku pada, dostiže minimum, zatim raste; pri $a < 0$ raste, dostiže maksimum i pada.

Sjecište s osi Ox: $A_1, A_2 \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$, s osi Oy: $B(0, c)$. Ekstrem je u točki $C \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. O paraboli vidi str. 264 do 266.

Polinom trećeg stupnja: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (sl. 4).

Graf je *kubna parabola*. Tok funkcije zavisi od predznaka a i $\Delta = 3ac - b^2$. Ako je $\Delta \geqslant a$ (sl. 4, *a* i *b*), funkcija za $a > 0$ monotono raste, a za $a < 0$ monotono pada. Ako je $\Delta < 0$, funkcija ima jedan maksimum i jedan minimum (sl. 4, *c*); za $a > 0$ ona u početku raste od $-\infty$ do maksimuma, zatim pada do minimuma i ponovo



Sl. 4

raste do $+\infty$; za $a < 0$ pada od $+\infty$ do minimuma, raste do maksimuma i ponovo pada do $-\infty$. Sjecišta s osi Ox određuju realni korijeni jednadžbe $y = 0$*. Korijen može biti jedan, može ih biti dva (u tom slučaju je u jednoj točki dodir) ili tri: A_1, A_2 i A_3.

Sjecište s osi y: $B(0, d)$. Ekstremi C, D: $\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \mp (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$.

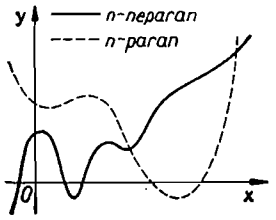
Točka infleksije jest centar simetrije krivulje:

$E \left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$; tangenta u toj točki ima koeficijent smjera $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

* Za rješavanje kubne jednadžbe vidi str. 179 do 181.

Polinom n-tog **stupnja** (sl. 5).

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$



Sl. 5

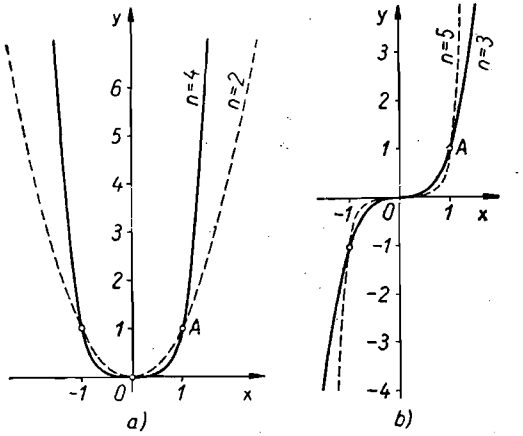
Graf je *krivulja n-tog reda**, parabolnog tipa.

a) n neparan, y se neprekinuto mijenja za $a_0 > 0$ od $-\infty$ do $+\infty$, a za $a_0 < 0$ od $+\infty$ do $-\infty$; krivulja može sjeći os x (ili je dira) od 1 do n puta**. Ekstrema ova funkcija ili uopće nema ili ih ima paran broj (od 2 do n—1), maksimumi i minimumi međusobno se izmjenjuju; točaka infleksije ima neparan broj (od 1 do n—2).

b) n paran, y se neprekinuto mijenja za $a_0 > 0$, od $+\infty$ do $+\infty$, za $a_0 < 0$ od $-\infty$ do $-\infty$; os x ili uopće ne siječe, ili je siječe (ili dira) od 1 do n puta. Funkcija ima neparan broj ekstrema (od 1 do n—1), maksimumi i minimumi se međusobno izmjenjuju; točaka infleksije ima paran broj (od 0 do n—2).

Asimptota i singularnih točaka takve krivulje nemaju.

Za crtanje grafa preporučuje se naći najprije ekstreme i točke infleksije (a također i vrijednost derivacije u tim točkama), ucrtati te točke i u njima tangente na krivulju, a zatim još nacrtati neprekinutu glatku krivulju.



Sl. 6

* Za red krivulje vidi str. 254.

** Za rješavanje algebarske jednadžbe n-tog stupnja vidi str. 182 ... 185 i 187 ... 189.

Kod česte upotrebe grafova polinoma 4. stupnja $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, uz zadani a, podesno je nacrtati graf funkcije $y = ax^4$ (vidi niže) i zatim prenijeti ishodište koordinatnog sistema u točku $\left(-\frac{b}{4a}, 0\right)$, svesti jednadžbu na oblik $Y = aX^4 + a'X^2 + b'X + c'$ i načiniti geometrijski zbroj ordinata krivulje $Y = aX^4$ i parabole $Y = a'X^2 + b'X + c'$.

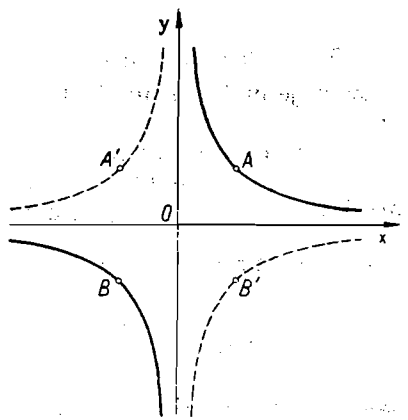
Potencija: $y = ax^n$ (n = cio broj > 1) (sl. 6).

Graf je *parabola n-tog reda.* 1) $a = 1$; krivulja $y = x^n$ prolazi kroz točke O (0, 0) i A (1, 1), i dira os x u ishodištu. Ako je n paran (sl. 6, *a*), krivulja je simetrična s obzirom na os y i ima minimum u ishodištu; ako je pak n neparan (sl. 6, *b*) tada je krivulja simetrična s obzirom na ishodište, koje je točka infleksije. Asimptota nema. 2) Opći slučaj. Krivulju $y = ax^n$ dobijemo iz krivulje $y = x^n$ sa $|a|$-strukim rastezanjem u smjeru osi y; ako je $a < 0$, tada je ona zrcalna slika krivulje $y = |a| x^n$ s obzirom na os x.

2. RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

Obrnuta proporcionalnost: $y = \frac{a}{x}$ (sl. 7).

Graf je *istostrana hiperbola* kojoj su asimptote koordinatne osi. Prekinutost pri $x = 0$ ($y = \pm\infty$). Ako je $a > 0$, funkcija pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0 (puna krivulja u 1. i 3. kvadrantu); ako je $a < 0$, funkcija raste od 0 do $+\infty$ i od $-\infty$ do 0 (crtkana krivulja u 2. i 4. kvadrantu). Tjemena hiperbole A, B $(\pm\sqrt{|a|}, \pm\sqrt{|a|})$; predznaci su isti pri $a > 0$ i suprotni pri $a < 0$. Ekstrema nema. O hiperboli vidi stranice 261 ... 264.

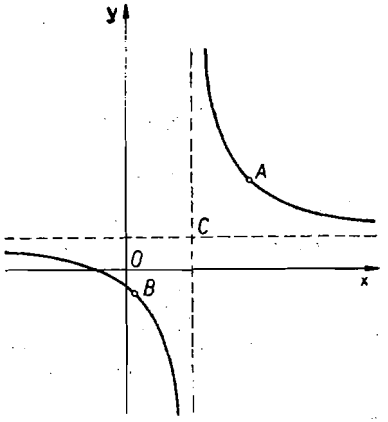


Sl. 7

Razlomljena linearna funkcija: $y = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$ (sl. 8).

Graf je *istostrana hiperbola* s asimptotama koje su paralelne s koordinatnim osima; središte je $C\left(-\frac{b_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$. Parametar koji

odgovara a u jednadžbi obrnute proporcionalnosti jest $-\frac{D}{a_2^2}$, gdje je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, i tjemena hiperbole su A, B $\left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$; predznaci su isti za $D < 0$ i različiti za $D > 0$. Prekinutost funkcije je kod $x = -\frac{b_2}{a_2}$. Ako je $D < 0$, onda funkcija pada od $\frac{a_1}{a_2}$ do $-\infty$ i od $+\infty$ do $\frac{a_1}{a_2}$;



Sl. 8

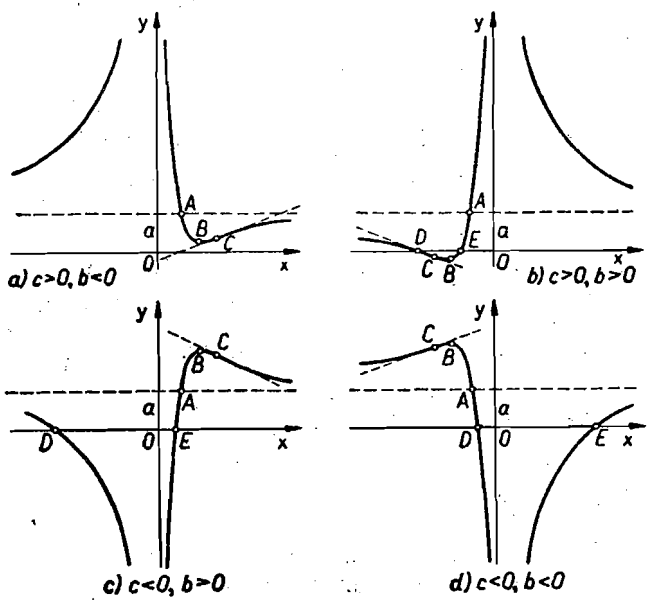
ako je $D > 0$, funkcija raste od $\frac{a_1}{a_2}$ do $+\infty$ i od $-\infty$ do $\frac{a_1}{a_2}$. Ekstrema nema.

Funkcija $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x^2}\right)$ (sl. 9). [$b \neq 0$, $c \neq 0$. Za $b = 0$ vidi str. 122 (potencija), za $c = 0$ vidi naprijed (razlomljenu linearnu funkciju)].

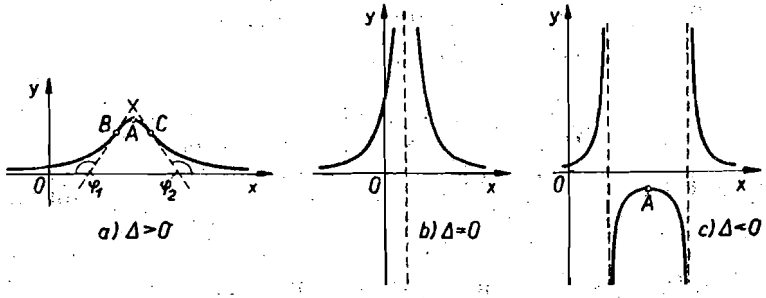
Graf je *krivulja 3. reda* sa dvije asimptote: $x = 0$ i $y = a$; sastoji se od dviju grana: jedne na kojoj se y monotono mijenja od a do $+\infty$ (ili $-\infty$) i druge koja prolazi kroz tri karakteristične točke: sjecište s asimptotom $A\left(-\frac{c}{b}, a\right)$, ekstrem $B\left(-\frac{2c}{b}, a - \frac{b^2}{4c}\right)$ i točku infleksije $C\left(-\frac{3c}{b}, a - \frac{2b^2}{9c}\right)$. Četiri slučaja mogućeg položaja tih grana zavisna su od predznaka b i c (sl. 9). Sjecišta s osi x: D, $E\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$; može ih biti dva, jedno (dodir) ili nijedno, što ovisi o predznaku $b^2 - 4ac$.

Funkcija $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (sl. 10).

Graf je *krivulja 3. reda*, simetrična s obzirom na vertikalni pravac $x = -\frac{b}{2a}$, os x je asimptota. Tok funkcije ovisi o predzna-



Sl. 9



Sl. 10

cima a i $\Delta = 4ac - b^2$. Razmotren je samo slučaj $a > 0$; za $a < 0$ treba razmotriti krivulju $y = \frac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ i njenu simetričnu sliku s obzirom na os x.

a) $\Delta > 0$. Funkcija je neprekinuta i pozitivna za svaki x. Raste od 0 do maksimuma i pada do 0. Maksimum je $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, točke infleksije su B, $C\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \frac{3a}{\Delta}\right)$, koeficijent smjera tangenata u njima je $\operatorname{tg}\varphi = \mp a^2\left(\frac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ (sl. 10, *a*).

b) $\Delta = 0$. Funkcija je pozitivna za svaki x. Raste od 0 do $+\infty$, ima beskonačnu prekinutost pri $x = -\frac{b}{2a}$ i pada od $+\infty$ do 0 (sl. 10, *b*).

c) $\Delta < 0$. Funkcija raste od 0 do $+\infty$, zatim ima beskonačnu prekinutost, prelazi od $-\infty$ k $-\infty$ kroz točku maksimuma, ima drugu prekinutost i pada od $+\infty$ do 0. Maksimum je $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, točke prekinutosti: $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ (sl. 10, *c*).

Funkcija $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$ (sl. 11).

Graf je *krivulja 3. reda*, koja prolazi kroz ishodište, asimptota je os x. Tok funkcije ovisi o predznacima a i $\Delta = 4ac - b^2$, a također i od predznaka korjenova α i β jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ (ako je $\Delta < 0$) i od predznaka b, ako je $\Delta = 0$. Razmotren je samo slučaj $a > 0$; za $a < 0$ treba razmotriti krivulju $y = \frac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ i njenu simetričnu sliku s obzirom na os x.

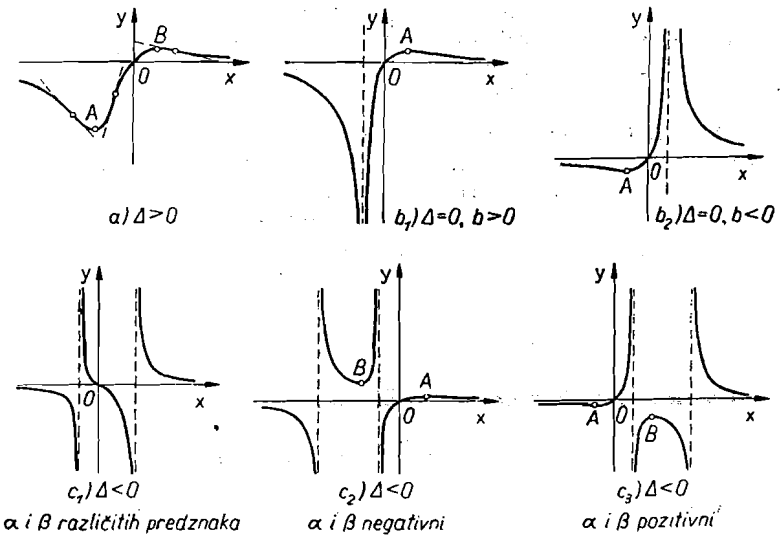
a) $\Delta > 0$. Funkcija je neprekinuta, pada od 0 do minimuma, raste do maksimuma i ponovno pada do 0. Minimum i maksimum jesu A, $B\left(\mp\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b \mp 2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, krivulja ima tri točke infleksije (sl. 11, *a*).

b) $\Delta = 0$. Tok funkcije zavisi od predznaka b: 1) $b > 0$; funkcija pada od 0 do $-\infty$, ima prekinutost, raste od $-\infty$ do maksimuma i pada do nule (sl. 11, b_1), maksimum je $A\left(+\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ac} + b}\right)$; 2) $b < 0$; funkcija pada od 0 do minimuma, prolazi kroz 0 i raste do $+\infty$, ima beskonačnu prekinutost i pada od $+\infty$

do 0 (sl. 11, b_2); minimum je $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{2\sqrt{ac} - b}\right)$. U oba slučaja graf ima prekinutost kod $x = -\frac{b}{2a}$ i jednu točku infleksije.

c) $\Delta < 0$. Dvije točke prekinutosti: $x = \alpha$ i $x = \beta$; tok funkcije zavisi od predznaka α i β.

1) α i β imaju različite predznake; funkcija pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0; ekstrema nema (sl. 11, c_1).



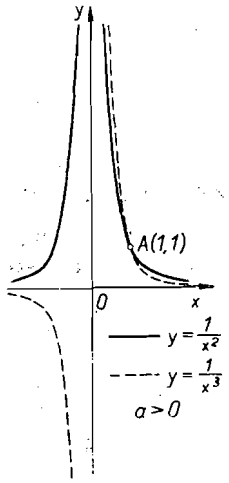
Sl. 11

2) α i β su negativni; funkcija pada od 0 do $-\infty$, zatim se mijenja od $+\infty$ do $+\infty$ prolazeći kroz točku minimuma i na kraju raste od $-\infty$ do maksimuma i pada do nule; točke maksimuma i minimuma A, B dobivamo prema istim formulama kao i u slučaju a) (sl. 11, c_2).

3) α i β su pozitivni; funkcija pada od 0 do minimuma i raste do $+\infty$, zatim se mijenja od $-\infty$ do $-\infty$ prolazeći kroz točku maksimuma i na kraju pada od $+\infty$ do 0; točke maksimuma i minimuma A, B dobivamo prema istim formulama kao i u slučaju a) (sl. 11, c_3).

U sva tri slučaja graf ima po jednu točku infleksije.

Potencija: $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n je cio pozitivan broj) (sl. 12).



Sl. 12

Graf je *krivulja hiperbolnog tipa*, kojoj su asimptote koordinatne osi. Prekinutost kod $x = 0$.

Ako je $a > 0$, funkcija za paran n raste od 0 do $+\infty$ i pada od $+\infty$ do 0, pri čemu je stalno pozitivna, a za neparan n pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0.

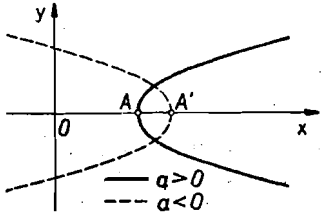
Ako je $a < 0$, funkcija za paran n pada od 0 do $-\infty$ i raste od $-\infty$ do 0, pri čemu je stalno negativna, a za neparan n raste od 0 do $+\infty$ i od $-\infty$ do 0.

Ekstrema nema. Krivulja se asimptotički približava osi x to brže, a osi y to sporije, što je veći n. Za paran n krivulja je simetrična s obzirom na os y, a za neparan n s obzirom na ishodište koordinata. Na sl. 12 predočena su dva slučaja: $n = 2$ i $n = 3$.

3. IRACIONALNE FUNKCIJE

Kvadratni korijen linearnog binoma:

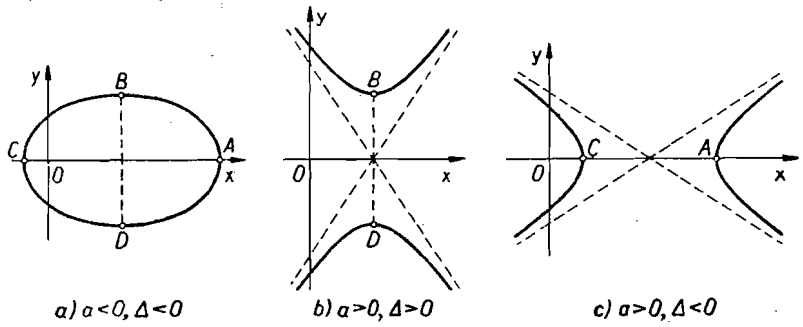
$$y = \pm \sqrt{ax + b} \quad \text{(sl. 13).}$$



Sl. 13

Graf je *parabola*, njena os je os x, a tjeme: $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, parametar $p = \frac{a}{2}$. Područje definicije i tok funkcije su ovisni od predznaka a (vidi sl. 13). Funkcija je dvoznačna, ekstrema nema. Detaljno o paraboli vidi na str. 264...266.

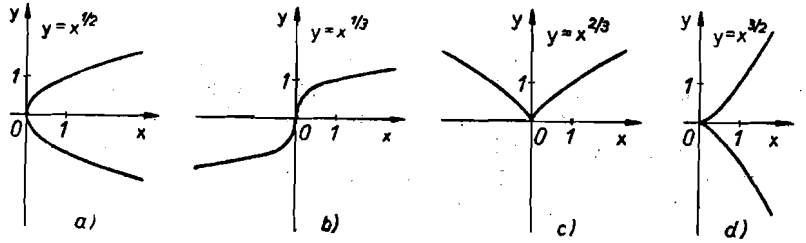
Kvadratni korijen kvadratnog trinoma: $y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (sl. 14). Graf je *elipsa* za $a < 0$ i *hiperbola* za $a > 0$; jedna os je os x, a druga pravac $x = -\frac{b}{2a}$; tjemena su A, $C\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$ i B, $D\left(-\frac{b}{2a}, \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)$, gdje je $\Delta = 4ac - b^2$. Područje definicije i tok funkcije ovise o predznacima a i Δ (vidi sl. 14). Funkcija je dvoznačna, ima ekstrem ako su Δ i a istog predznaka (točke B i D).



Sl. 14

Pri $a < 0$ i $\Delta > 0$ funkcija prima samo imaginarne vrijednosti, krivulja ne postoji. Detaljnije o elipsi i hiperboli vidi str. 259...264.

Potencija: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ (m i n su cijeli pozitivni prosti brojevi). Razmotren je slučaj $a = 1$ (pri $a \neq 1$ krivulja je u usporedbi sa $y = x^k$ rastegnuta u smjeru osi y $|a|$ puta i za negativan a zrcaljena na os x).

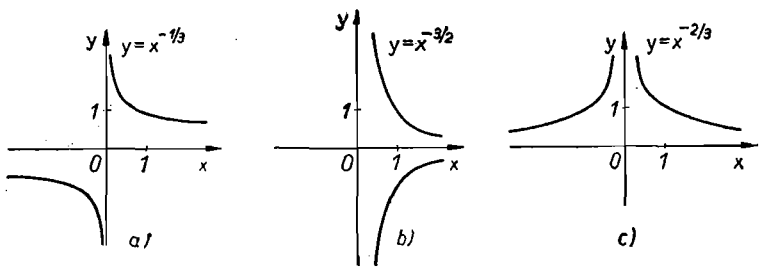


Sl. 15

1) $k > 0$, $y = x^{m/n}$. Graf (sl. 15) prolazi kroz točke (0,0) i (1,1). Za $k > 1$ dira (u ishodištu) os x (sl. 15, *d*), za $k < 1$ dira (u ishodištu) os y (slika 15 *a*, *b*, *c*). Za paran n krivulja je simetrična s obzirom na os x (funkcija je dvoznačna, sl. 15, *a*, *d*), za paran m je simetrična s obzirom na os y (sl. 15, *c*), za neparan m i n je simetrična s obzirom na ishodište (sl. 15, *b*). S tim u vezi krivulja

može imati u ishodištu tjeme, točku infleksije ili šiljak (vidi sl. 15); asimptota nema.

2) $k < 0$, $y = x^{-m/n}$. Graf je *krivulja hiperbolnog tipa* s asimptotama koje su koordinatne osi (sl. 16). Prekinutost kod $x = 0$. Krivulja se asimptotički približava osi x to brže, a osi y to sporije,



Sl. 16

što je veći $|k|$. Simetrija s obzirom na osi i ishodište zavisi od pariteta brojeva m i n jednako kao u slučaju $k > 0$ (vidi gore), time se određuje tok funkcije (vidi sl. 16); ekstrema nema.

4. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

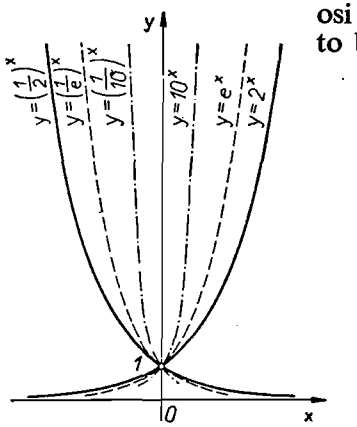
Eksponencijalna funkcija: $y = a^x = e^{bx}$ $(a > 0, \quad b = \ln a)$ (sl. 17).

Graf je *eksponencijalna krivulja* (za $a = e$ je prirodna eksponencijalna krivulja $y = e^x$). Funkcija prima samo pozitivne vrijednosti. Za $a > 1$ (tj. $b > 0$) monotono raste od 0 do ∞; za $a < 1$ (tj. $b < 0$) monotono pada od ∞ do 0, to brže, što je veći $|b|$. Krivulja prolazi kroz točku $A(0, 1)$ i asimptotički se približava k osi x (za $b > 0$ s lijeve strane, za $b < 0$ s desne strane) to brže, što je veći $|b|$. Funkcija $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ raste ako je $a < 1$ i pada ako je $a > 1$.

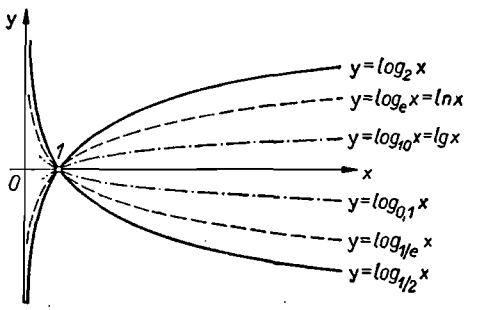
Logaritamska funkcija: $y = \log_a x$ $(a > 0)$ (sl. 18).

Graf je *logaritamska krivulja* (zrcalna slika eksponencijalne krivulje s obzirom na simetralu prvog kvadranta $y = x$); za $a = e$ je *prirodna* logaritamska krivulja $y = \ln x$. Funkcija postoji samo za $x > 0$. Za $a > 1$ monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, za $a < 1$

monotono pada od $+\infty$ do $-\infty$ to sporije, što je veći $|\ln a|$. Krivulja prolazi kroz točku $A(1, 0)$ i asimptotički se približava osi y (pri $a > 1$ odozdo, pri $a < 1$ odozgo) to brže, što je veći $|\ln a|$.



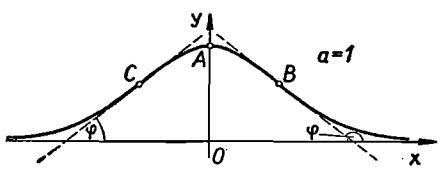
Sl. 17



Sl. 18

Funkcija $y = e^{-(ax)^2}$ (sl. 19).

Funkcija raste od 0 do 1 i pada od 1 do 0; krivulja je simetrična s obzirom na os y i asimptotički se približava osi x to brže, što je



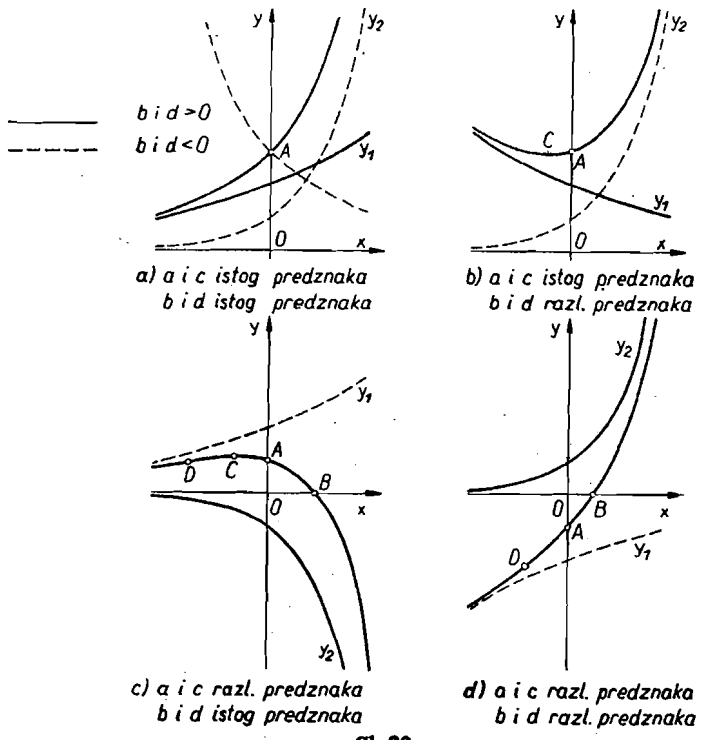
Sl. 19

veći a. Maksimum je u točki $A(0,1)$, točke infleksije su B, $C\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, tangensi smjera tangenata u tim točkama: $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{\frac{2}{e}}$. Važnu primjenu ima kao *krivulja normalne razdiobe pogrešaka (Gaussova krivulja)*: $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (vidjeti tablicu 24 na str. 99 i primjenu na str. 798).

Funkcija $y = ae^{bx} + ce^{dx}$ (sl. 20).

Krivulju je najbolje crtati tako da se grafički zbroje ordinate krivulja $y_1 = ae^{bx}$ i $y_2 = ce^{dx}$ (vidi sr. 124), koje su tanko nacrtane

(jedna izvučeno, druga crtkano). Funkcija je neprekinuta. U slučajevima kada niti jedan broj a, b, c i d nije jednak nuli, krivulja ima jedan od ova četiri oblika (pri čemu grafovi prikazani na sl. 20 u ovisnosti o predznacima parametara mogu biti zrcaljeni na koordinatnim osima):



Sl. 20

a) a i c imaju iste predznake, b i d imaju iste predznake. Funkcija se monotono mijenja ne mijenjajući predznak, od 0 do $+\infty$ (ili $-\infty$) ili od $+\infty$ ($-\infty$) do 0; točaka infleksije nema, a os x je asimptota (sl. 20, a).

b) a i c imaju iste predznake, b i d imaju različite predznake. Funkcija se mijenja od $+\infty$ do $+\infty$ ili od $-\infty$ do $-\infty$ ne mijenjajući predznak i prolazi kroz ekstrem; točaka infleksije nema (sl. 20, b).

c) a i c imaju različite predznake, b i d imaju iste predznake. Funkcija se mijenja od 0 do $+\infty$ ($-\infty$) ili od $+\infty$ ($-\infty$) do nule, jedanput mijenja predznak i prolazi kroz jedan ekstrem C i jednu točku infleksije D; os x je asimptota (sl. 20, c).

d) a i c imaju različite predznake, b i d imaju različite predznake. Funkcija se monotono mijenja od $-\infty$ do $+\infty$ ili od $+\infty$ do $-\infty$, nema ekstrema, no prolazi kroz jednu točku infleksije D (sl. 20, d).

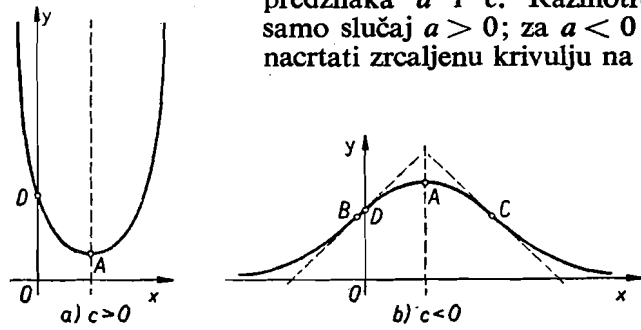
Sjecište s osi y: $A\,(0, a+c)$, sjecište s osi x:

$$B\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right],\ \text{ekstrem: } C\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right],$$

točka infleksije $D\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)\right]$.

Funkcija $y=ae^{bx+cx^2}$ (sl. 21).

Krivulja je simetrična s obzirom na vertikalni pravac $x=-\frac{b}{2c}$; os x ne siječe, os y siječe u točki $D\,(0, a)$. Tok funkcije zavisi od predznaka a i c. Razmotren je samo slučaj $a>0$; za $a<0$ treba nacrtati zrcaljenu krivulju na osi x.



Sl. 21

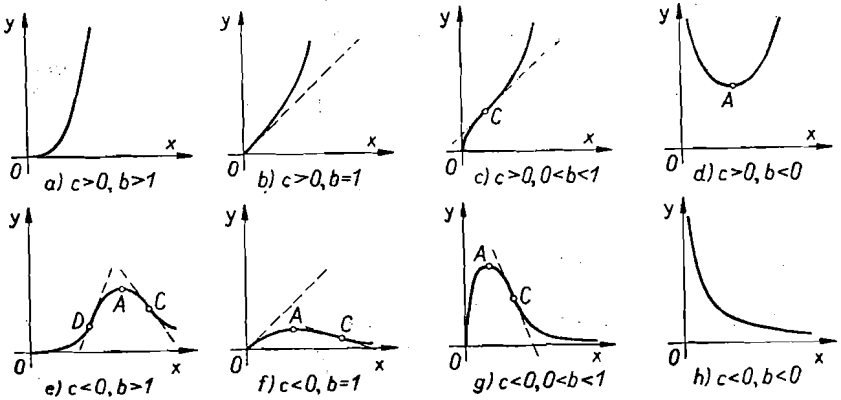
a) $c>0$. Funkcija pada od $+\infty$ do minimuma i raste do $+\infty$, ostaje stalno pozitivna. Minimum: $A\left(-\frac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, točaka infleksije i asimptota nema (sl. 21, a).

b) $c<0$. Funkcija raste od 0 do maksimuma i pada do nule. Asimptota je os x. Maksimum je $A\left(-\frac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, točke infleksije su $B,\ C\left(\frac{-b\pm\sqrt{-2c}}{2c},\ ae^{-(b^2+2c)/4c}\right)$ (sl. 21, b).

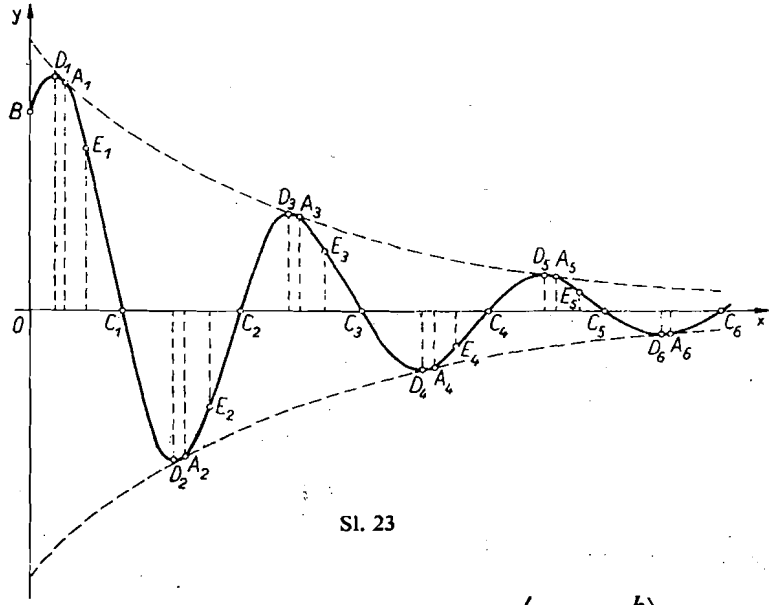
Funkcija $y=ax^be^{cx}$ (sl. 22).

Razmotren je slučaj $a>0$ (za $a<0$ treba nacrtati krivulju zrcaljenu na osi x) a razmotrene su samo pozitivne vrijednosti x. Funkcija prima samo pozitivne vrijednosti. Za $b>0$ krivulja prolazi kroz ishodište; tangenta u ishodištu je: os x ako je $b>1$,

simetrala prvoga kvadranta $y = x$ ako je $b = 1$, os y ako je $b < 1$. Za $b < 0$ os y je asimptota. Za $c > 0$ funkcija beskonačno raste kada x raste, za $c < 0$ asimptotički se približava nuli. Ako b i c imaju



Sl. 22



Sl. 23

različite predznake, funkcija ima ekstrem $A\left(x = -\frac{b}{c}\right)$. Krivulja može imati 0, 1 ili 2 točke infleksije: C, $D\left(x = -\frac{b \pm \sqrt{b}}{c}\right)$ (sl. 22, *c*, *d*, *e*, *f*).

Funkcija $y = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0)$ (sl. 23).

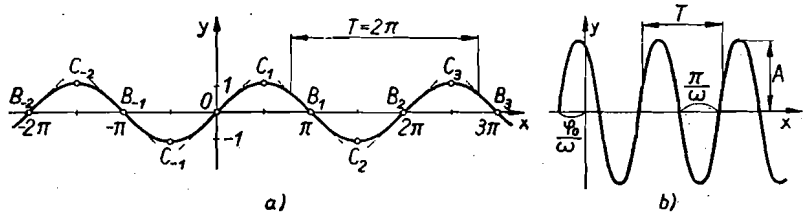
Graf je *krivulja prigušenog titranja.* Krivulja oscilira oko osi Ox i asimptotički joj se približava, pri čemu dvije eksponencijalne krivulje $y = \pm Ae^{-ax}$ tu krivulju obuhvaćaju i dotiču u točkama $A_1, A_2, \ldots \left(\frac{(k + 1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax}\right)$. Sjecišta s osima: B $(0, A \sin \varphi_0)$, $C_1, C_2, \ldots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$; ekstremi $D_1, D_2, \ldots$ kod $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$; točke infleksije: $E_1, E_2, \ldots$ kod $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$, gdje je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a}$.

Veličinu $\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = a \frac{\pi}{\omega}$ (gdje su y_i i y_{i+1} ordinate dvaju susjednih ekstrema) nazivamo *logaritamskim dekrementom prigušenja.*

5. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE*

Sinus: $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ (sl. 24).

Graf je *sinusoida.* Pri $A = \omega = 1$ i $\varphi_0 = 0$ je *obična sinusoida* $y = \sin x$ (slika 24, *a*), neprekinuta krivulja s periodom $T = 2\pi$.



Sl. 24

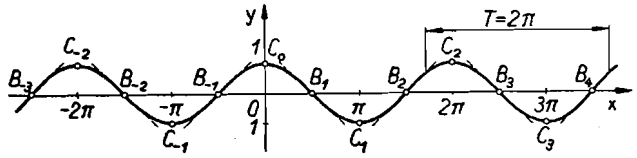
Sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots$ $(k\pi, 0)$, ujedno su točke infleksije s kutom $\pm \pi/4$ prema osi x. Ekstremi $C_1, C_2, \ldots$ $[(k + 1/2)\pi, (-1)^k]$.

Opća sinusoida (slika 24, *b*) je u odnosu na običnu rastegnuta duž osi y | A | puta (| A | je *amplituda*), duž osi x je stisnuta ω puta (ω — *frekvencija*) i pomaknuta ulijevo za $\frac{\varphi_0}{\omega}$ (φ_0 je *početna faza*).

* Trigonometrijske formule vidi na str. 231 ... 234; tablice vidi na str. 56 ... 67.

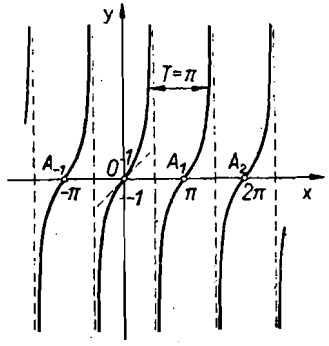
Period je $T = \frac{2\pi}{\omega}$; sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$, ekstremi $C_1, C_2, \ldots \left(\frac{(k + 1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$ (vidi također str. 234).

Kosinus: $y = A \cos(\omega x + \varphi_0)$; ovu jednadžbu možemo napisati i ovako: $y = A \sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. Graf je *sinusoida.*

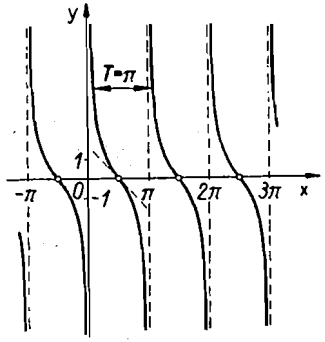


Sl. 25

Kosinusoida $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (sl. 25). Sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots$ $[(k + 1/2)\pi, 0]$ ujedno su točke infleksije s kutom $\pm \pi/4$ prema osi x. Ekstremi: $C_1, C_2, \ldots$ $[(k\pi, (-1)^k]$.



Sl. 26



Sl. 27

Tangens: $y = \operatorname{tg} x$ (sl. 26).

Graf je *tangentoida,* periodička krivulja s periodom $T = \pi$ i s asimptotama $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$. Kada se x mijenja od $-\frac{\pi}{2}$ do

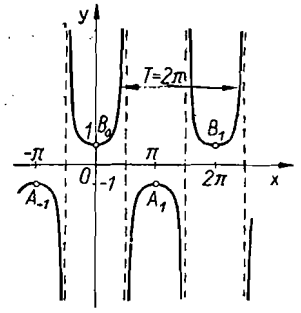
$+\frac{\pi}{2}$, y monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, zatim se vrijednosti y ponavljaju. Sjecišta s osi x: $0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots$ $(k\pi, 0)$ ujedno su točke infleksije s kutom $\pi/4$ prema osi x.

Kotangens: $y = \operatorname{ctg} x$ (sl. 27), ili $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

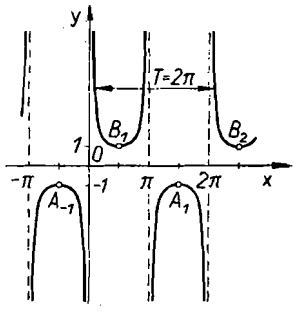
Graf je *tangentoida,* zrcaljena na osi x i pomaknuta ulijevo za $\pi/2$. Asimptote su $x = k\pi$. Kada se x mijenja od 0 do π, y monotono pada od $+\infty$ do $-\infty$, zatim se vrijednosti y ponavljaju. Sjecišta s osi x: $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots$ $[(k + \frac{1}{2})\pi, 0]$, ujedno su točke infleksije s kutom $-\pi/4$ prema osi x.

Sekans: $y = \operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x}$ (sl. 28).

Graf je periodička krivulja s periodom $T = 2\pi$ i asimptotama $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; $|y| \geqslant 1$. Maksimumi $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k + 1)\pi, -1]$, minimumi $B_1, B_2, \ldots$ $(2k\pi, +1)$.



Sl. 28



Sl. 29

Kosekans: $y = \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$ (sl. 29), ili $y = \operatorname{sc}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Graf je ista krivulja kao i za sc x, pomaknuta udesno za $\frac{\pi}{2}$. Asimptote su $x = k\pi$. Maksimumi $A_1, A_2, \ldots$ $\left(\frac{4k + 3}{2}\pi, -1\right)$, minimumi $B_1, B_2, \ldots$ $\left(\frac{4k + 1}{2}\pi, 1\right)$.

6. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE*

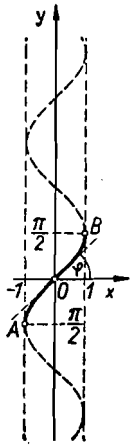
Grafovi tih funkcija se dobiju iz grafova trigonometrijskih funkcija zrcaljenjem na simetrali prvog kvadranta $y = x$.

Arkus-sinus: $y = \text{Arc sin } x$ (sl. 30).

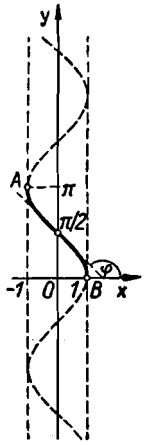
Funkcija je definirana samo za $|x| \leqslant 1$, i višeznačna je. Glavni njen dio $y = \text{arc sin } x$ (izvučeno na slici) monotono raste od $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ do $B\left(+1, +\frac{\pi}{2}\right)$; u ishodištu je točka infleksije $\left(\text{s priklonim kutom } \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje.

Arkus-kosinus: $y = \text{Arc cos } x$ (sl. 31).

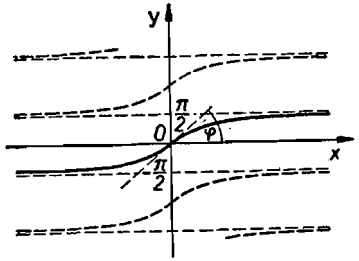
Ista krivulja kao i $\text{Arc sin } x$, spuštena za $\frac{\pi}{2}$. Funkcija je definirana samo za $|x| \leqslant 1$, i višeznačna je. Glavni njen dio $y = \text{arc cos } x$ (izvučeno na slici) monotono pada od $A(-1, +\pi)$ do $B(+1, 0)$. Točka $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je središte simetrije i točka infleksije krivulje (s priklonim kutom $3\pi/4$ prema osi x).



Sl. 30



Sl. 31

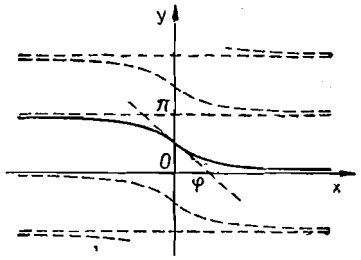


Sl. 32

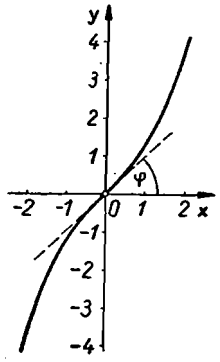
* Određivanje i formule vidi na str 239 i 240.

Arkus-tangens: $y = \text{Arc tg } x$ (sl. 32).

Funkcija je višeznačna. Glavni njen dio $y = \text{arc tg } x$ monotono raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$; ishodište je točka infleksije (s priklonim kutom $\frac{\pi}{4}$), a također je središte simetrije krivulje. Ostale vrijednosti y dobivamo iz glavnog dijela ako ovome pribrojimo $\pm k\pi$. Asimptote su: $y = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$.



Sl. 33



Sl. 34

Arkus-kotangens: $y = \text{Arc ctg } x$ (sl. 33).

Funkcija je višeznačna. Glavni njen dio $y = \text{arc ctg } x$ monotono pada od π do 0; točka infleksije (središte simetrije) je $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ s priklonim kutom $\frac{3\pi}{4}$. Ostale vrijednosti y dobivamo iz glavnog dijela oko ovome pribrojimo $\pm k\pi$. Asimptote su: $y = \pm k\pi$.

7. HIPERBOLNE FUNKCIJE*

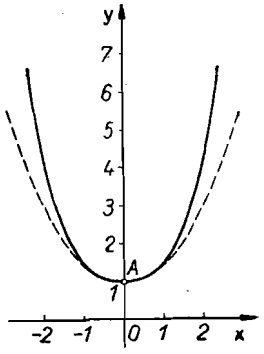
Sinus hiperbolni: $y = \text{sh } x$ (sl. 34).

Funkcija je neparna, monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, ishodište je točka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Asimptota nema.

* Teoretska objašnjenja vidi na str. 245 i 246. Tablice vidi na str. 68 ... 71.

Kosinus hiperbolni: $y = \operatorname{ch} x$ (sl. 35).

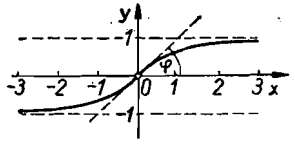
Graf je *lančanica* (vidi str. 150). Funkcija je parna. Za $x < 0$ pada od $+\infty$ do 1, za $x > 0$ raste od 1 do $+\infty$. Minimum je u točki $A\,(0, 1)$, asimptota nema. Krivulja leži simetrično prema osi y i iznad parabole $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ (isprekidano nacrtano).



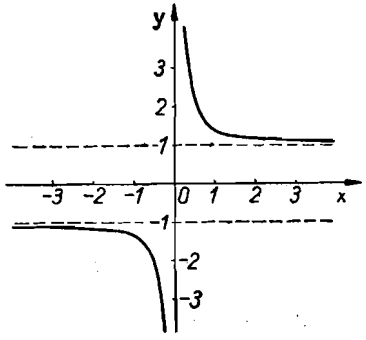
Sl. 35

Tangens hiperbolni: $y = \operatorname{th} x$ (sl. 36).

Funkcija je neparna, monotono raste od -1 do $+1$. Ishodište je točka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Ima dvije asimptote: $y = \pm 1$.



Sl. 36



Sl. 37

Kotangens hiperbolni: $y = \operatorname{cth} x$ (sl. 37).

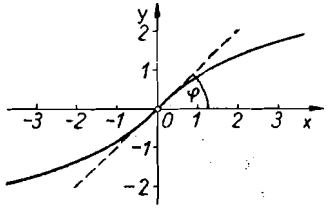
Funkcija je neparna, prekinutost pri $x = 0$. Za $x < 0$ pada od -1 do $-\infty$, za $x > 0$ pada od $+\infty$ do $+1$, Ekstrema i točaka infleksije nema. Ima tri asimptote: $x = 0$, $y = \pm 1$.

8. AREA-FUNKCIJE*

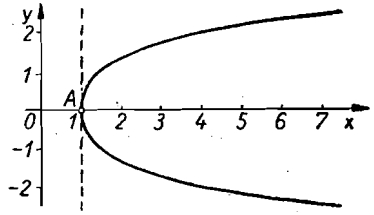
Grafovi se dobiju iz grafova hiperbolnih funkcija zrcaljenjem na simetrali kuta xOy.

Area-sinus: $y = \operatorname{Ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (sl. 38).

Funkcija je neparna; monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$. Ishodište je točka infleksije ($\varphi = \pi/4$) i središte simetrije krivulje. Asimptota nema.



Sl. 38



Sl. 39

Area-kosinus: $y = \operatorname{Ar\,ch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$ (sl. 39).

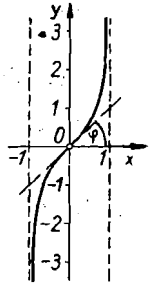
Funkcija je dvoznačna: definirana je samo za $x \geqslant 1$. Krivulja je simetrična s obzirom na os x; u točki $A\,(1, 0)$ dira vertikalni pravac $x = 1$, a zatim y po apsolutnoj vrijednosti raste.

Area-tangens:

$$y = \operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{(sl. 40).}$$

Funkcija je neparna, definirana je samo za $|x| < 1$; monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$. Ishodište je točka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Ima dvije asimptote:

$$x = \pm 1.$$



Sl. 40

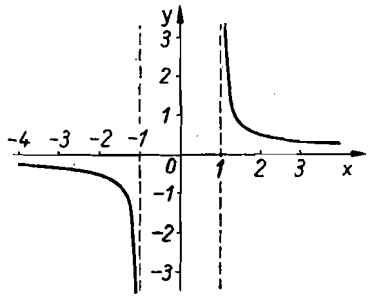
* Teoretska objašnjenja vidi na str. 248.

Area-kotangens:

$y = \operatorname{Ar\,cth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (sl. 41).

Funkcija je neparna, definirana je samo za $|x| > 1$. Za $-\infty < x < -1$ pada od 0 do $-\infty$, za $+1 < x < \infty$ pada od $+\infty$ do 0. Ekstrema i točaka infleksije nema. Ima tri asimptote:

$$y = 0, \quad x = \pm 1.$$



Sl. 41

B. VAŽNIJE KRIVULJE

Ovdje navodimo neke podatke o važnijim krivuljama koje susrećemo u praksi (pored onih koje su prije navedene u vezi s grafovima važnijih funkcija). U te podatke spada: određivanje krivulje kao geometrijskog mjesta te koordinata karakterističnih točaka, duljina krivulje ili njenog dijela, površina koja omeđuje krivulju ili njen dio, te polumjer zakrivljenosti u karakterističnim točkama.

Opće podatke o tome kako se crtaju krivulje po jednadžbama vidi na str. 304...306.

O krivuljama drugog reda (elipse, hiperbole i parabole) vidi na str. 259 do 266.

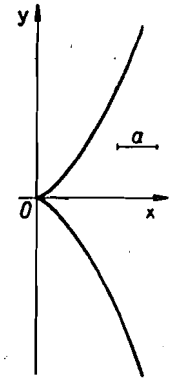
9. KRIVULJE TREĆEG REDA

Semikubna parabola (sl. 42).

Jednadžba: $y = ax^{3/2}$*, u parametarskom obliku: $x = t^2$, $y = at^3$.

U ishodištu je šiljak. Asimptota nema. Zakrivljenost $K = \frac{6a}{\sqrt{x}\,(4 + 9a^2x)^{3/2}}$ prima sve vrijednosti od ∞ do 0. Duljina krivulje od ishodišta do točke M**:

$$L = \frac{1}{27a^2}\left[(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8\right].$$



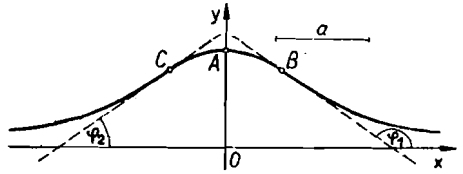
Sl. 42

* Ovdje i dalje $a > 0$.

** Ovdje i dalje M je pomična točka krivulje s koordinatama x, y.

»Versiera« Marije Agnesi (sl. 43).

Jednadžba: $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Asimptota $y = 0$. Maksimum: $A(0, a)$; polumjer zakrivljenosti u njemu je $r = \frac{a}{2}$. Točke infleksije: $B, C\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, tangens smjera krivulje u tim točkama: $\operatorname{tg}\varphi = \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}$.



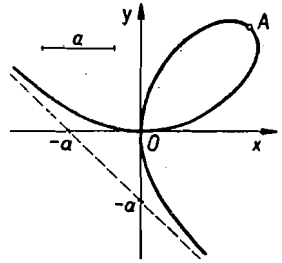
Sl. 43

Površina između krivulje i asimptote $S = \pi a^2$.

Descartesov list (sl. 44).

Jednadžba: $x^3 + y^3 = 3axy$; u parametarskom obliku: $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$).

Ishodište je čvorna točka, koja za tangente ima koordinatne osi, polumjer zakrivljenosti za obje grane u ishodištu: $r = \frac{3a}{2}$. Asimptota $x + y + a = 0$. Tjeme je $A\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Površina petlje $S_1 = \frac{3}{2}a^2$; površina između krivulje i asimptote $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.



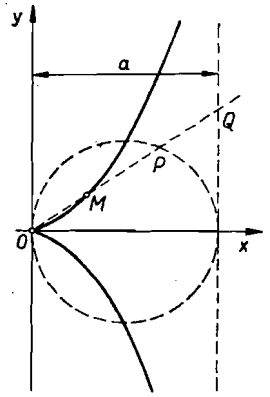
Sl. 44

Cisoida (sl. 45). Geometrijsko mjesto točaka M, za koje je $OM = PQ$ (P — po volji odabrana točka *kružnice izvodnice* s promjerom a).

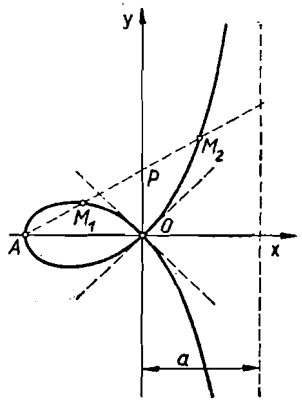
Jednadžba: $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$; u parametarskom obliku: $x = \frac{at^2}{1 + t^2}$,

$y = \frac{at^3}{1+t^2}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.

U ishodištu je šiljak. Asimptota je $x = a$. Površina između krivulje i asimptote $S = {}^3/_4 \pi a^2$.



Sl. 45



Sl. 46

Strofoida (sl. 46). Geometrijsko mjesto točaka M_1 i M_2 (koje leže na bilo kojim zrakama kroz točku A), za koje je $PM_1 = PM_2 = OP$ (P je bilo koja točka osi Oy).

Jednadžba: $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x}\right)$; u parametarskom obliku: $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); u polarnim koordinatama: $\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. Ishodište je čvorna točka (tangente: $y = \pm x$). Asimptota je $x = a$. Tjeme $A(-a, 0)$. Površina petlje: $S_1 = 2a^2 - {}^1/_2 \pi a^2$, površina između krivulje i asimptote: $S_2 = 2a^2 + {}^1/_2 \pi a^2$.

10. KRIVULJE ČETVRTOG REDA

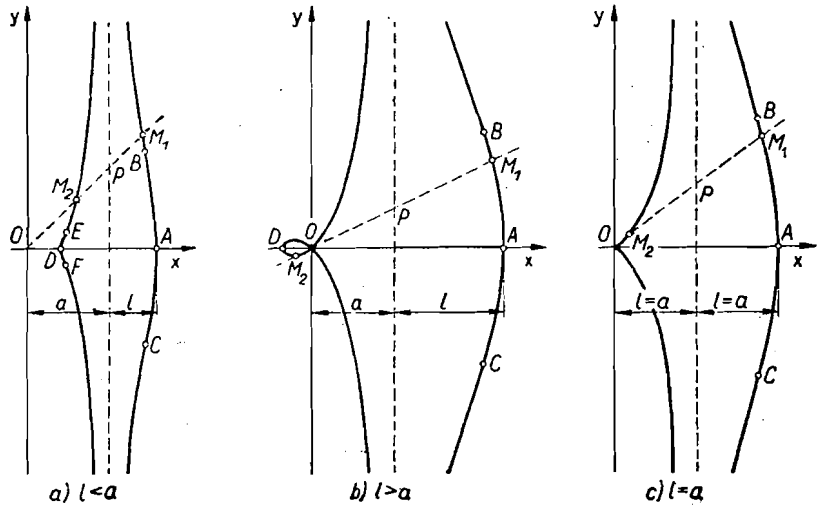
Nikomedova konhoida (sl. 47). Geometrijsko mjesto točaka M, za koje je $OM = OP \pm l$ (predznaku »+« odgovara vanjska grana, a predznaku »—« unutarnja)*.

* Općenito konhoidom dane krivulje nazivamo krivulju koju dobivamo tako da povećamo ili smanjimo radijvektor svake točke dane krivulje za konstantni odsječak l. Ako je jednadžba krivulje u polarnim koordinatama $\rho = f(\varphi)$, tada je jednadžba njene konhoide $\rho = f(\varphi) \pm l$. Nikomedova konhoida je konhoida pravca.

Jednadžba: $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$; u parametarskom obliku: $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi + l\sin\varphi$; u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$.

Vanjska grana: Asimptota: $x = a$. Tjeme: $A(a + l, 0)$. Ima dvije točke infleksije B, C [njihova apscisa x jednaka je najvećem korijenu jednadžbe $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$*]. Površina između grane i asimptote $S = \infty$.

Unutarnja grana: Asimptota: $x = a$. Tjeme: $D(a - l, 0)$. U ishodištu je dvostruka točka čiji karakter ovisi o veličinama a i l:



Sl. 47

a) Za $l < a$ to je izolirana točka (sl. 47, *a*). Krivulja ima i dvije točke infleksije E, F [apscisa x po veličini je jednaka drugom pozitivnom korijenu jednadžbe: $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$].

b) Za $l > a$ nastaje čvorna točka (sl. 47, *b*). Krivulja ima maksimum i minimum pri $x = a - \sqrt[3]{al^2}$. Tangensi smjera tangenata u ishodištu: $\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$; polumjer zakrivljenosti:

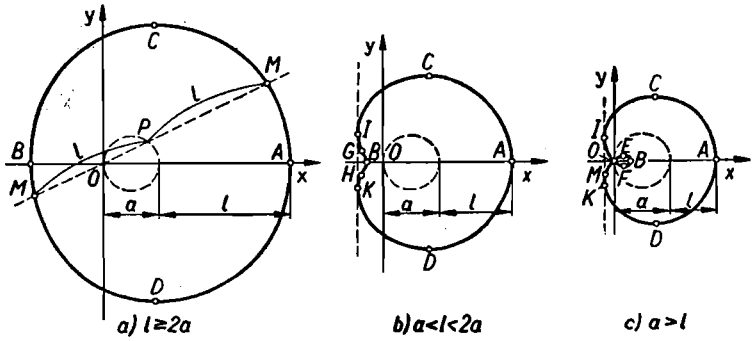
$$r_0 = \frac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2}.$$

c) Za $l = a$ dvostruka točka je šiljak (sl. 47, *c*).

* Za način rješavanja takvih jednadžbi vidi str. 178...182.

Pascalov puž (sl. 48). Konhoida kružnice*; $OM = OP \pm l$ (pol je na kružnici).

Jednadžba: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$; u parametarskom obliku: $x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$; u polarnim koordinatama: $\rho = a\cos\varphi + l$ (a je promjer kružnice). Tjemena A, $B(a \pm l, 0)$. Oblik krivulje ovisi o veličinama a i l, kako je to vidljivo na sl. 48 i 49. Četiri su ekstrema, ako je $a > l$,



Sl. 48

i dva, ako je $a \leqslant 1$: $C, D, E, F\left(\cos\varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}\right)$. Točke infleksije: $G, H\left(\cos\varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$ postoje, ako je $a < l < 2a$. Dvojna tangenta u točkama: $I, K\left(-\frac{l^2}{4a}, \pm\frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a}\right)$ postoji ako je $l < 2a$. Ishodište je dvostruka točka: izolirana pri $a < l$, čvorna pri $a > l$ (tangensi smjera tangenata u toj točki: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$, polumjer zakrivljenosti $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - l^2}$); šiljak za $a = l$. U posljednjem slučaju nazivamo krivulju *kardioidom* (vidi dalje).

Površina puža: $S = \frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [u slučaju $a > l$ (sl. 48, *c*) površina unutarnje petlje, ako je računamo prema toj formuli, računana je dvaput].

* Vidi str. 178...182.

Kardioida (sl. 49). Može se odrediti dvojako: 1) Posebni slučaj Pascalovog puža: $OM = OP \pm a$ (a je promjer kruga). 2) Epicikloida (vidi str. 144), kod koje je promjer pomičnog i nepomičnog kruga jednak ($= a$).

Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$; u parametarskom obliku: $x = a\cos\varphi(1 + \cos\varphi)$, $y = a\sin\varphi(1 + \cos\varphi)$; u polarnim koordinatama:

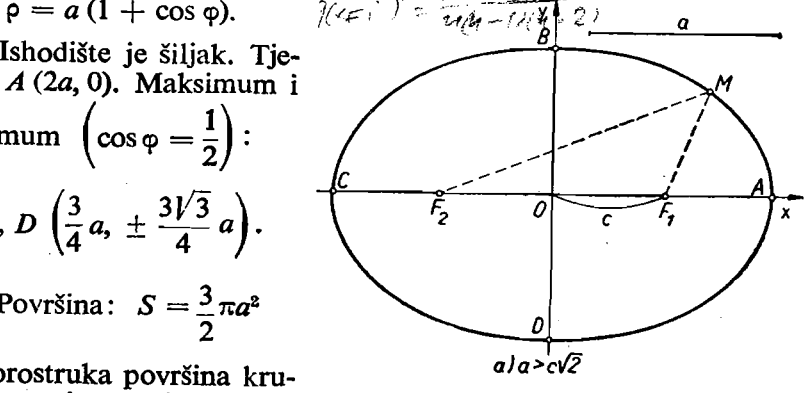
$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

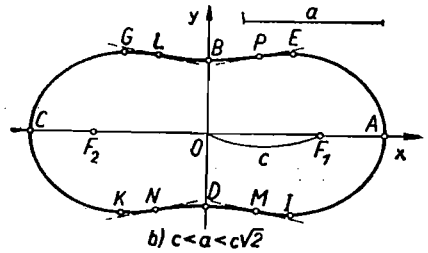
Ishodište je šiljak. Tjeme: $A(2a, 0)$. Maksimum i minimum $\left(\cos\varphi = \frac{1}{2}\right)$:

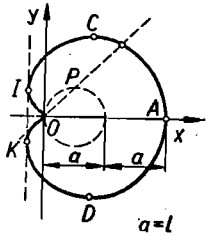
$$C, D\left(\frac{3}{4}a, \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right).$$

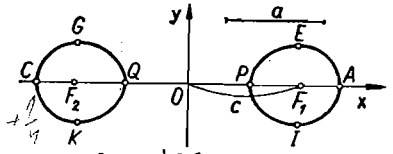
Površina: $S = \frac{3}{2}\pi a^2$

(šestorostruka površina kruga s promjerom a). Duljina krivulje: $L = 8a$.









Sl. 49 Sl. 50

Cassinijevi ovali (sl. 50). Geometrijsko mjesto točaka M, za koje je produkt udaljenosti $F_1M \cdot F_2M = a^2$ (F_1, F_2 su čvrsti fokusi, a je konstanta).

Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$, gdje je F_1, F_2 ($\pm c, 0$); u polarnim koordinatama:

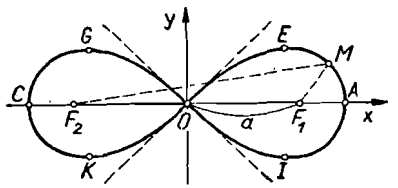
$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$. Oblik krivulje ovisi o omjeru između a i c:

a) $a > c\sqrt{2}$; *elipsi slični oval* (sl. 50, *a*). Sjecišta s osi x: A, $C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0)$; sjecišta s osi y: B, $D(0, \pm \sqrt{a^2 - c^2})$. Ako je $a = c\sqrt{2}$, *oval je istog tipa*; u tom slučaju A, $C(\pm c\sqrt{3}, 0)$, B, $D(0, \pm c)$; u točkama B i D zakrivljenost je jednaka nuli (tijesan dodir s pravcima $y = \pm c$).

b) $c < a < c\sqrt{2}$; *oval sa suženjem* (sl. 50, *b*). Sjecišta s osima su ista kao i u slučaju a); maksimumi i minimumi: B, D (za koordinate vidi naprijed), E, G, K, J $\left(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c}\right)$; četiri su točke infleksije; P, L, M, N $\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}(m - n)}, \pm \sqrt{\frac{1}{2}(m + n)}\right)$, gdje je $n = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}$, $m = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{3}}$.

c) $a = c$; *lemniskata* (vidi niže).

d) $a < c$; *dva ovala* (sl. 50, *c*). Sjecišta s osi x: A, $C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ i P, $Q(\pm \sqrt{c^2 - a^2}, 0)$; maksimumi i minimumi: E, G, K, I $\left(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c}\right)$.



Sl. 51

Polumjer zakrivljenosti

$$r = \frac{2a^2 \rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4}$$

(ρ — radijvektor).

Lemniskata (sl. 51).

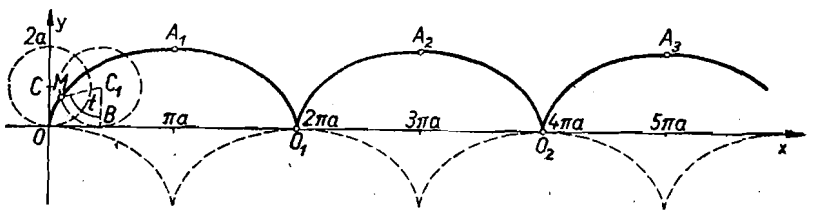
Poseban slučaj Cassinijevih ovala ($a = c$): $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, gdje je F_1, F_2 $(\pm a, 0)$.

Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$; u polarnim koordinatama: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ishodište je čvorna točka s tangentama $y = \pm x$; ono je uz to točka infleksije. Sjecište krivulje s osi x: A, C $(\pm a\sqrt{2}, 0)$; maksimumi i minimumi: E, G, K, I $\left(\pm \frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{a}{2}\right)$; polarni kut u tim točkama $\varphi = \pm \pi/6$. Polumjer zakrivljenosti: $r = \frac{2a^2}{3\rho}$. Površina svake petlje $S = a^2$.

11. CIKLOIDE

Cikloida (sl. 52). Krivulja koju opisuje točka kružnice kada se kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (a je polumjer kružnice, $t = \sphericalangle MC_1B$); u Descartesovim koordinatama: $x + \sqrt{y(2a - y)} = a \operatorname{Arccos} \frac{a - y}{a}$. Krivulja



Sl. 52

je periodična: period (*baza* cikloide) $OO_1 = 2\pi a$. Šiljci O, O_1, O_2, ... $(2k\pi a, 0)$; tjemena A_1, A_2, ... $[(2k + 1)\pi a, 2a]$. Duljina OM: $L = 8a \sin^2 {}^1/_4 t$; duljina jedne grane $L_{OA_1O_1} = 8a$, površina OA_1O_1O: $S = 3\pi a^2$. Polumjer zakrivljenosti $r = 4a \sin {}^1/_2 t$, u tjemenima $r_A = 4a$. Evoluta (str. 306) cikloide je isto takva cikloida (isprekidano prikazana).

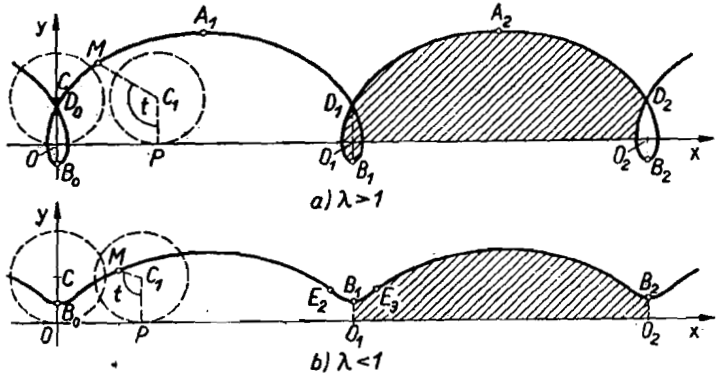
Rastegnuta (sl. 53, *a*) **i stegnuta** (sl. 53, *b*) **cikloida** (»*trohoida*«). Krivulje opisane točkom koja leži *a*) izvan i *b*) unutar kružnice, koja se kotrlja bez klizanja po pravcu.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a(t - \lambda \sin t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, gdje je a polumjer kružnice, $t = \sphericalangle MC_1P$, $\lambda a = C_1M$ (za rastegnutu cikloidu $\lambda > 1$, za stegnutu $\lambda < 1$). Krivulje su periodične: period $OO_1 = 2\pi a$; maksimumi A_1, A_2, ... $[(2k + 1)\pi a, (1 + \lambda) a]$, minimumi B_0, B_1, B_2, ... $[2k\pi a, (1 - \lambda) a]$. Za rastegnutu cikloidu čvorne su točke D_0, D_1, D_2, ... $[2k\pi a, a(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2})]$, gdje je t_0 najmanji pozitivni korijen jedna-

džbe $t = \lambda \sin t$*. Za stegnutu cikloidu su točke infleksije E_1, $E_2, \ldots$ $[a(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)]$. Duljina jednog cikla $L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt$; površina, šrafirana na sl. 53, je $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. Polumjer zakrivljenosti:

$$r = a\frac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t-\lambda)},$$ u točkama maksimuma:

$$r_A = -a\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda},$$ u točkama minimuma: $r_B = a\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.



Sl. 53

Epicikloida (sl. 54). Krivulja koju opisuje točka kružnice ako se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici izvan nje.

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\frac{A+a}{a}\varphi,$$

$$y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\frac{A+a}{a}\varphi$$

[A polumjer nepomičnog, a polumjer pomičnog kruga, $\varphi = \sphericalangle\, COx$].

Oblik krivulje ovisi o omjeru $\frac{A}{a} = m$. Za $m = 1$ izlazi *kardioida* (vidi str. 140).

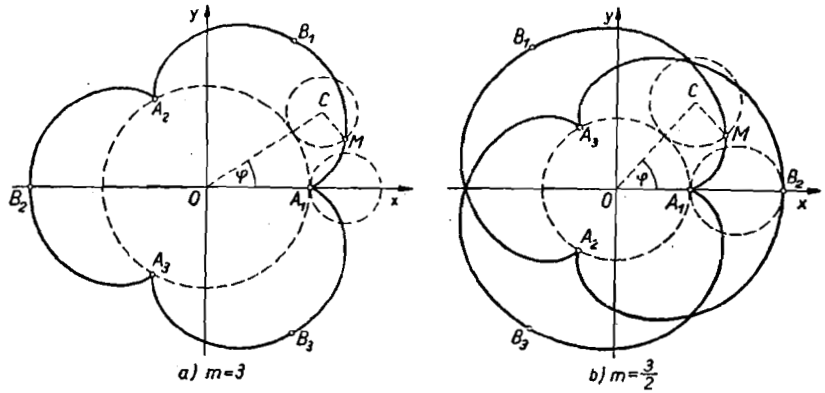
a) Ako je m cio broj, krivulja se sastoji od m grana (sl. 54, *a*), koje obuhvaćaju nepomični krug; točke infleksije jesu:

$$A_1,\ A_2, \ldots\ A_m\ \left[\rho = A,\ \varphi = \frac{2k\pi}{m}\ (k = 0, 1, \ldots, m-1)\right];$$

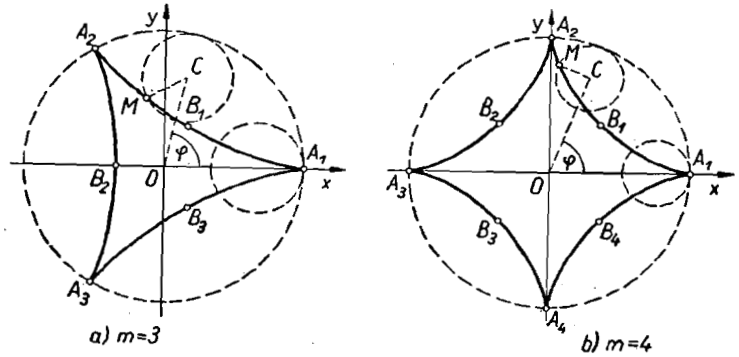
* Za rješavanje takvih jednadžbi vidi str. 187 ... 189.

tjemena $B_1,\ B_2, \ldots\ B_m\ \left[\rho = A + 2a,\ \varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$.

b) Ako je m racionalan razlomak, grane se prekrivaju (sl. 54, *b*), ali se pomična točka M, kada je opisala konačan broj grana, vraća u početni položaj. Ako je m iracionalan broj, tada je broj grana beskonačan, točka M se ne vraća u početni položaj.



Sl. 54



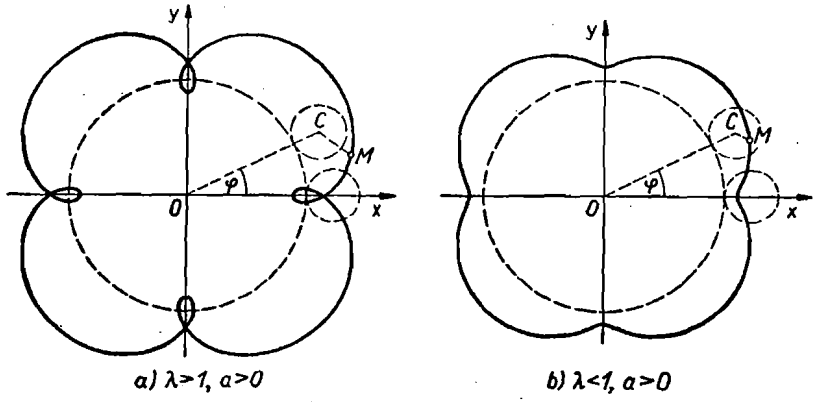
Sl. 55

Duljina jedne grane je $L_{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$, ako je m cio broj, duljina čitave krivulje je $L = 8(A+a)$. Površina sektora $A_1B_1A_2A_1$ (bez sektora nepomičnog kruga): $S = \pi a^2\left(\frac{3A+2a}{A}\right)$. Polumjer

zakrivljenosti $r = \frac{4a(A+a)}{2a+A} \sin\frac{A\varphi}{2a}$; u tjemenima $r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

Hipocikloida (sl. 55). Krivulja koju opisuje točka kružnice kada se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici unutar nje.

Jednadžbe hipocikloide, koordinate tjemena i točaka infleksije, formule za duljinu luka, površinu i polumjer zakrivljenosti iste su kao i za epicikloidu, samo treba zamijeniti »+ a« sa »— a«; broj šiljaka, ako je m cio broj, racionalan ili iracionalan (m je uvijek > 1) isti je kao kod epicikloide. Za $m = 2$ krivulja prelazi u promjer nepomičnog kruga. Za $m = 3$ ima hipocikloida tri grane (sl. 55, *a*): $x = a(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$; $L = 16a$, $S_{\text{polna}} = 2\pi a^2$. Za $m = 4$ (sl. 55, *b*) hipocikloida ima četiri grane (*astroida*): $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$; u Descartesovim koordinatama $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$; $S = \frac{3}{8}\pi A^2$.



a) $\lambda > 1$, $a > 0$ b) $\lambda < 1$, $a > 0$

Sl. 56

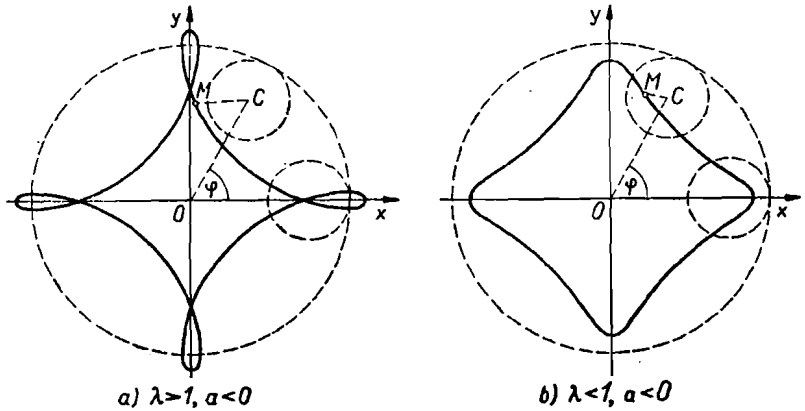
Rastegnuta i stegnuta epi- i hipocikloida (»*epi-* i *hipotrohoida*«) (sl. 56 i 57). Krivulja koju opisuje točka koja leži izvan ili unutar kružnice, kada se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici izvan nje (epicikloida, sl. 56) ili unutar nje (hipocikloida, sl. 57).

Jednadžba (u parametarskom obliku):

$$x = (A+a)\cos\varphi - \lambda a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A+a)\sin\varphi - \lambda a\sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right).$$

A je polumjer nepomičnog kruga, a je polumjer pomičnog kruga (pri čemu u slučaju hipocikloide »+ a« u jednadžbi zamijenimo sa »— a«), $\lambda a = CM$ (za rastegnutu je $\lambda > 1$, za stegnutu



a) $\lambda > 1$, $a < 0$ b) $\lambda < 1$, $a < 0$

Sl. 57

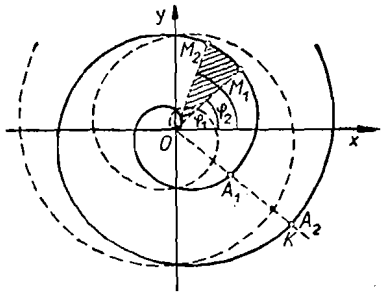
$\lambda < 1$). Za $A = 2a$ (λ bilo koji broj) postaje hipocikloida: $x = a(1+\lambda)\cos\varphi$, $y = a(1-\lambda)\sin\varphi$ elipsa s poluosima $a(1+\lambda)$ i $a(1-\lambda)$. Za $A = a$ izlazi Pascalov puž (vidi str. 140)*: $x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi)$.

12. ZAVOJNICE (SPIRALE)

Arhimedova zavojnica (sl. 58). Krivulja koju opisuje točka koja se giba konstantnom brzinom v po zraci koja se vrti oko pola O konstantnom kutnom brzinom ω.

Jednadžba u polarnim koordinatama: $\rho = a\varphi$; $a = \frac{v}{\omega}$. Krivulja se sastoji od dvije grane, koje leže simetrično prema osi Oy. Svaka zraka OK siječe krivulju u točkama $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$, koje su međusobno udaljene za $A_l A_{l+1} = 2\pi a$. Duljina luka OM je:

$$L = \frac{a}{2}(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Ar\,sh}\varphi),$$



Sl. 58

* Na str. 140 sa a je označena veličina koja je ovdje označena sa $2\lambda a$, a sa l promjer $2a$. Izmijenjen je također i koordinatni sistem.

$\frac{2L}{a\varphi^2} \to 1$ za velike φ. Površina sektora M_1OM_2:

$$S = \frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

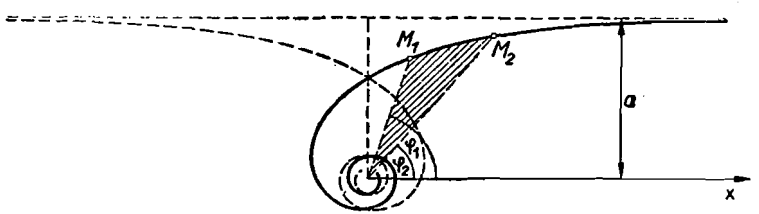
Polumjer zakrivljenosti: $r = a\frac{(\varphi^3+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$, u ishodištu: $r_0 = \frac{a}{2}$.

Hiperbolna zavojnica (sl. 59).

Jednadžba u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Krivulja se sastoji od dvije grane, koje leže simetrično prema osi y; svaka grana ima pravac $y = a$ za asimptotu, a ishodište O je asimptotična točka.

Površina sektora M_1OM_2: $S = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$; $\lim_{\varphi_2 \to \infty} S = \frac{a^2}{2\varphi}$.

Polumjer zakrivljenosti: $r = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

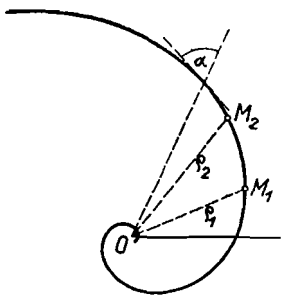


Sl. 59

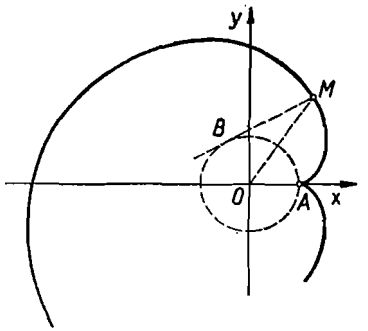
Logaritamska zavojnica (sl. 60). Krivulja koja siječe pod istim kutom α sve zrake koje izlaze iz točke O.

Jednadžba (u polarnim koordinatama): $\rho = ae^{k\varphi}$ [$k = \operatorname{ctg}\alpha$; ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tada je $k = 0$ i krivulja je kružnica]. Krivulja ima pol O za asimptotičnu točku. Duljina luka M_1M_2:

$L = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1)$, limes duljine luka OM od ishodišta: $L_0 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho$. Polumjer zakrivljenosti: $r = \sqrt{1+k^2}\,\rho = L_0 k$.



Sl. 60



Sl. 61

Evolventa* **kružnice** (sl. 61). Krivulja opisana krajem napete niti koja se odmata s kružnice ($\widehat{AB} = BM$).

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi,$$
$$y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi$$

(a polumjer kruga, $\varphi = \sphericalangle BOx$). Krivulja ima dvije grane simetrično smještene prema osi x; šiljak je $A\,(a, 0)$; sjecište s osi Ox: $x = \frac{a}{\cos\varphi_0}$, gdje je φ_0 korijen jednadžbe: $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$**. Duljina luka AM: $L = \frac{1}{2}a\varphi^2$. Polumjer zakrivljenosti: $r = a\varphi = \sqrt{2aL}$; središte zakrivljenosti B leži na kružnici.

---

* O evolventi vidi str. 306.

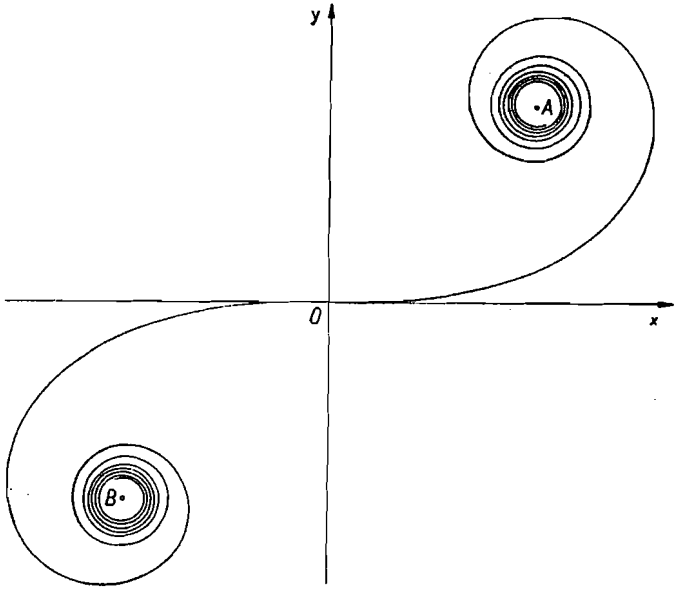
** O rješavanju takvih jednadžbi vidi str. 187 ... 189.

Klotoida (sl. 62). Krivulja za koju je polumjer zakrivljenosti obrnuto proporcionalan duljini luka: $r = a^2 : s$.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$, $y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}dt$*, gdje je $t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$, $s = \overset{\frown}{OM}$.

Krivulja je simetrična s obzirom na ishodište, koje je točka infleksije (tangenta je os x); ima dvije asimptotične točke:

$$A\left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad \text{i} \quad B\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right).$$



Sl. 62

13. NEKE DRUGE KRIVULJE

Lančanica (sl. 63). Oblik lančanice prima gipka, teška, nerastezljiva nit, ovješena u dvije točke.

Jednadžba: $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$.

* Ovi se integrali ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija.

Krivulja je simetrična s obzirom na os y i leži iznad parabole $y = a + \frac{x^2}{2a}$ (isprekidana krivulja). Tjeme A (0, a). Duljina luka AM: $L = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$, površina $OAMP$ je

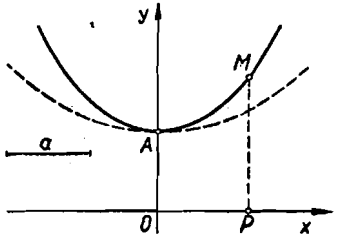
$$S = aL = a^2\,\mathrm{sh}\frac{x}{a};\quad \text{polumjer zakrivljenosti } r = \frac{y^2}{a} = a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}.$$

Traktrisa (sl. 64). Krivulja za koju je duljina dijela tangente od dirališta M do sjecišta s danim pravcem (na sl. 64 s osi apscisa) konstanta*.

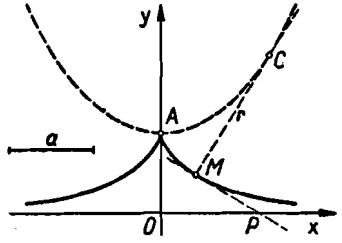
Traktrisa je evolventa (str. 306) lančanice, sa šiljkom u tjemenu A.

Jednadžba:

$$x = a\,\mathrm{Ar\,ch}\frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2}\quad\left(= a\ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}\right).$$



Sl. 63



Sl. 64

Asimptota je os x, šiljak (s vertikalnom tangentom): A (0, a). Krivulja je simetrična s obzirom na os y. Duljina luka AM: $L = a\ln\frac{a}{y}$; kada duljina luka L raste, tada je razlika $L - x$ (gdje je x apscisa točke M) $\approx a(1 - \ln 2) \approx 0{,}307a$. Polumjer zakrivljenosti: $r = a\,\mathrm{ctg}\frac{x}{y}$.

* Drugim riječima: ako je na jednom kraju nerastežljive niti određene duljine (a) pričvršćena materijalna točka (M), a drugi se kraj (P) giba po pravcu (Ox), tada ova točka (M) opisuje traktrisu (odavde naziv: traktrisa — povlačna krivulja).

DRUGI DIO

ELEMENTARNA MATEMATIKA

I. PRIBLIŽNO RAČUNANJE

1. PRAVILA PRIBLIŽNOG RAČUNANJA

Približno računanje. Pri računanju potrebno je stalno misliti na točnost koja nam treba ili se može postići. Potpuno je nedopustivo računati s većom točnošću ako to zadatak ne dopušta ili ne zahtijeva (npr. ne treba upotrebljavati sedmeroznamenkaste logaritme pri računanju s brojevima koji su dani na 5 decimala točno). Pouzdano poznavanje pravila približnog računanja neophodno je svakome tko mora računati.

Pogreške. Razliku između točnog broja x i njegove približne vrijednosti a nazivamo *pogreškom* tog približnog broja. Ako znamo da je $|x - a| < \Delta_a$, veličinu Δ_a nazivamo *krajnjom apsolutnom pogreškom* približne veličine a; odnos $\Delta_a : a = \delta_a$ nazivamo *krajnjom relativnom pogreškom*, koju često izražavamo u postocima.

Primjer: 3,14 je približna vrijednost broja π, njegova pogreška je 0,00159..., krajnja apsolutna pogreška je 0,0016, a krajnja relativna pogreška je $\frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}00051 = 0{,}051\%$.

Zbog kratkoće obično riječ »krajnja« izostavljamo.

Značajne brojke. Ako apsolutna pogreška veličine a ne prelazi jedinicu vrijednosti posljednje znamenke broja a, kažemo da su u broju a sve znamenke *točne**. Približne brojeve treba da pišemo tako, da zadržimo samo točne znamenke. Ako je npr. apsolutna pogreška broja 52400 jednaka 100, onda taj broj moramo pisati u obliku $524 \cdot 10^2$ ili $5{,}24 \cdot 10^4$. Pogrešku približnog broja lako ćemo ocijeniti tako da kažemo koliko ima značajnih točnih znamenaka. Pri brojanju značajnih znamenaka ne brojimo nule s lijeve strane.

* U toj definiciji se često zahtijeva da pogreška ne prelazi polovinu jedinice posljednje mjesne vrijednosti približnog broja. U vezi s time vidi str. 153 (»Zaokruženje«).

Primjeri: 1) 1 kubna stopa = 0,0283 m^3 — tri točne značajne znamenke; 2) 1 palac = 2,5400 cm — pet točnih značajnih znamenaka.

Ako broj a ima n točnih značajnih znamenaka, onda je njegova relativna pogreška $\delta_a \leqslant \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, gdje je z prva značajna znamenka broja a. U broju a s relativnom pogreškom δ_a ima n značajnih znamenaka, gdje je n najveći cijeli broj koji zadovoljava nejednadžbu:

$$(1 + z)\,\delta_a \leqslant 10^{1-n}\text{*}.$$

Primjer: Ako smo broj $a = 47{,}542$ dobili kao rezultat računanja s približnim brojevima (vidi niže) i znamo da je $\delta_a = 0{,}1\%$ onda a ima tri točne znamenke, jer je $(4 + 1) \cdot 0{,}001 < 10^{-2}$.

Zaokruženje. Ako približan broj sadrži suvišne (ili netočne) brojke, treba ga *zaokružiti*. Pri zaokruživanju zadržavamo samo točne brojke; suvišne brojke izostavljamo, pri čemu posljednju zadržanu znamenku povećamo za jedinicu, ako je prva ispuštena brojka veća od 4. Ako se ispušteni dio sastoji samo od jedne brojke 5, zaokružimo obično tako, da je posljednja zadržana znamenka parna. Pri zaokružavanju javljaju se dopunske pogreške koje ne prelaze polovinu jedinice mjesne vrijednosti posljednje značajne znamenke zaokruženog broja. Da bi nakon zaokruženja sve znamenke bile točne, prije zaokruženja ne smije pogreška biti veća od polovine jedinice one mjesne vrijednosti, do koje namjeravamo zaokružiti.

Računanje s približnim vrijednostima. Rezultat računanja s približnim brojevima opet je približan broj. Pogrešku rezultata možemo izraziti pogreškom prvotnih podataka pomoću ovih teorema:

1) Granična apsolutna pogreška algebarske sume jednaka je sumi graničnih apsolutnih pogrešaka komponenata.

2) Relativna pogreška sume zatvorena je između najveće i najmanje relativne pogreške komponenata.

3) Relativna pogreška produkta i kvocijenta jednaka je sumi relativnih pogrešaka faktora, odnosno dividenda i divizora.

4) Relativna pogreška n-te potencije približnog broja je n puta veća od relativne pogreške baze (kako za cijele, tako i za razlomljene n).

Služeći se tim teoremima možemo odrediti pogreške rezultata bilo koje kombinacije aritmetičkih operacija s približnim brojevima.

Primjeri: 1) $V = r^2 h$; $\Delta_V = V\delta_V \doteq V(2\delta_r + \delta_h)$.

$$2)\ z = \sqrt{\frac{x}{1+y}};\quad \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1+y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{1+y}\right).$$

* Ako uzimamo u obzir moguću pogrešku zaokruženja (vidi dalje), treba pretpostaviti da je $(1 + z)\,\delta_a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{1-n}$.

Pogreška funkcije. Pogreška pri računanju vrijednosti neke funkcije kojoj su argumenti približno zadani može se, pored po pravilima prije navedenim, ocijeniti i pomoću diferencijala te funkcije. Pogreška funkcije nije ništa drugo nego mogući prirast funkcije, koji funkcija dobije kada njenim argumentima damo priraste jednake njihovim pogreškama. Kako su pogreške obično dovoljno malene, praktički je sasvim dopustiva zamjena prirasta s diferencijalima (vidi str. 373). Ako su poznate samo krajnje apsolutne pogreške argumenata, onda pri računanju diferencijala treba za sve derivacije uzeti njihove apsolutne vrijednosti.

Primjeri: 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$; $\mathrm{d}\varphi = \frac{b\,\mathrm{d}a - a\,\mathrm{d}b}{a^2 + b^2}$, $\Delta\varphi = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2 + b^2}$.

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, $\delta_z = \frac{\Delta_z}{z} = \frac{x\Delta_x + y\Delta_y}{x^2 + y^2}$.

Za funkciju kojoj vrijednosti uzimamo iz tablica, možemo veoma jednostavno ocijeniti pogrešku. Ako je argument zadan s pogreškom Δ_x, za određivanje pogreške $f(x)$ pomoću linearne interpolacije (vidi str. 19) potražit ćemo prirast funkcije, koji pripada $\pm\,\Delta_x$. Apsolutna vrijednost tog prirasta i daje krajnju apsolutnu pogrešku $f(x)$.

Primjeri: 1) Ako promjer kruga $D = 5{,}92$ cm ima pogrešku $\Delta_D = 0{,}005$, onda su pripadne pogreške za opseg kruga i površinu kruga jednake (vidi str. 79 i 81) 0,015 cm i 0,05 cm^2. 2) Ako je $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}818 \pm 0{,}002$, onda je $\alpha = 39°17' \pm 0°4'$ (vidi str. 58).

Obrnuti zadatak. Kada nam treba rezultat s određenom točnošću, najprije uvodimo formule za pogreške rezultata po jednom od gore navedenih načina; tako možemo odrediti dopustive pogreške početnih podataka.

Primjer: S kolikom točnošću moramo izmjeriti katete pravokutnog trokuta, od kojih je jedna približno tri puta kraća od druge, a da pogreška kuta određenog njihovim tangensom nije veća od jedne minute? Iz $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ dobivamo (vidi gore): $\Delta\varphi = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2 + b^2}$, odakle, ako uzmemo da je $b = 3a$ i $\Delta_a = \Delta_b$ dobivamo $1' = 0{,}00029 = 0{,}4 \cdot \frac{\Delta_a}{a}$ ili $\delta_a = 0{,}0007$. Tako dopustiva jednaka apsolutna pogreška mjerenja kateta daje za manju katetu relativnu pogrešku 0,07%.

Računi bez točnog obzira na pogreške. Gore opisanim načinom možemo ocijeniti krajnju apsolutnu pogrešku, tj. veličinu koja nesumnjivo prelazi apsolutnu veličinu stvarne pogreške. Pri tom čitavo vrijeme pretpostavljamo da različite pogreške jedna drugu pojačavaju, što se u praksi veoma rijetko događa. Pri opsežnim računima, kada ne uzimamo u obzir pogreške svakog pojedinačnog rezultata, služimo se niže navedenim *pravilima za broj znamenaka.* Pri poštivanju tih pravila možemo smatrati da prosječni postignuti rezultati imaju sve znamenke točne, premda je u pojedinim slučajevima moguća pogreška od nekoliko jedinica posljednje znamenke*.

1) Pri *zbrajanju i oduzimanju* približnih brojeva u rezultatu treba zadržati toliko *decimala*, koliko ih ima približni broj s najmanje decimala.

2) Pri *množenju i dijeljenju* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih uz približne podatke ima broj s najmanjim brojem značajnih znamenaka.

3) Pri *kvadriranju i kubiranju* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih ima približni broj koji potenciramo. (Posljednja znamenka kvadrata, a naročito kuba, pri tom je manje pouzdana od posljednje znamenke baze).

4) Pri *vađenju kvadratnog i kubnog korijena* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih ima približna vrijednost broja pod korijenom. (Posljednja znamenka kvadratnog, a naročito kubnog korijena je pri tome pouzdanija od posljednje znamenke radikanda).

5) U svim međurezultatima treba zadržati jednu znamenku više nego što preporučuju prethodna pravila. U konačnom rezultatu tu »rezervnu znamenku« odbacujemo.

6) Ako poneki podaci imaju više decimala (pri zbrajanju i oduzimanju) ili više značajnih znamenaka (pri množenju, dijeljenju, potenciranju, korjenovanju) od drugih, te podatke prethodno zaokružimo tako da zadržimo samo jednu suvišnu znamenku.

7) Ako podatke možemo odabrati s po volji velikom točnošću, a u rezultatu želimo imati k znamenaka, onda podatke treba odabrati s toliko znamenaka, koliko ih je po pravilima 1 do 4 potrebno za $(k + 1)$ znamenku u rezultatu.

8) Pri računanju jednočlanog izraza pomoću logaritama treba odrediti broj značajnih znamenaka približnog broja s najmanjim brojem značajnih znamenaka i upotrijebiti tablice logaritama koje su računane na jednu decimalu više. U konačnom rezultatu posljednju značajnu znamenku odbacujemo.

Množenje i dijeljenje približnih brojeva. Da ne bismo dobili nepotrebnih znamenaka, množenje i dijeljenje približnih brojeva obavljamo na ovaj način.

* Pravila su dana u obliku koji im je dao V. M. Bradys.

Pri množenju odabiremo kao multiplikator manje točan broj od oba faktora. Množenje započinjemo od strane viših mjesnih vrijednosti, a nakon svakog djelomičnog produkta precrtamo posljednju znamenku desne strane multiplikanda. Poželjno je pri tome da za posljednju precrtanu znamenku izvršimo popravak.

Pri dijeljenju, u suglasnosti s pravilom 6, ako je moguće zadržimo dividendu jednu znamenku više nego što ih ima divizor. Umjesto da ostacima pri dijeljenju pripisujemo nule, odjeljujemo po jednu znamenku divizora. Pri množenju treba za odbačenu znamenku izvršiti popravak.

Primjeri: 1) Pomnožimo 4,128 sa 2,953. 2) Razdijelimo 12,189 sa 4,128. Konačni je oblik računa ovaj:

1)
$$\begin{array}{r} 4{,}128 \times 2{,}953 \\ \hline 8{,}256 \\ 3{,}715 \\ 206 \\ 12 \\ \hline 12{,}189 \approx 12{,}19 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 12{,}189 : 4{,}128 = 2{,}953 \\ -8{,}256 \\ \hline 3{,}933 \\ -3{,}715 \\ \hline 218 \\ -\ 206 \\ \hline 12 \\ -\ 12 \\ \hline \end{array}$$

2. PRIBLIŽNE FORMULE

U mnogo slučajeva složenije funkcije možemo približno zamijeniti jednostavnijim funkcijama, koje daju rezultat s dopustivom pogreškom. U tu svrhu možemo se koristiti s nekoliko prvih članova razvoja tih funkcija u Taylorov red (vidi str. 395) ili upotrijebiti metodu najmanjih kvadrata (vidi str. 974). U posljednjem slučaju formula će bitno ovisiti o intervalu za koji je ona unaprijed određena. Na str. 157. navedeno je nekoliko najčešće upotrebljavanih formula, dobivenih iz Taylorova reda, s oznakom njihove tačnosti.

3. LOGARITAMSKO RAČUNALO

Namjena logaritamskog računala. Jednostavnija računanja, sastavljena od množenja, dijeljenja, vađenja drugog i trećeg korijena, potenciranja zadanih brojeva i računanja s trigonometrijskim funkcijama zadanih brojeva, mogu se približno obaviti logaritamskim računalom. Točnost računanja različita je u raznim slučajevima, ali u prosjeku, računanje logaritamskim računalom duljine 25 cm odgovara računanju s tri značajne znamenke, tj. s relativnom pogreškom od 0,1% do 1%. U slučajevima kada nas takva točnost zadovoljava, treba računati logaritamskim računalom.

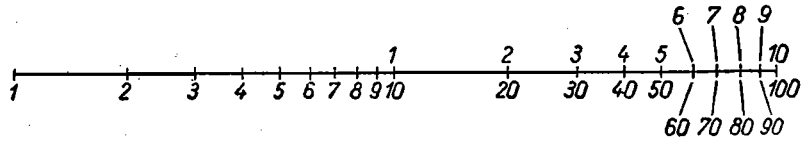
Logaritamska skala. Osnova konstrukcije logaritamskog računala jest logaritamska skala, konstruirana kako slijedi. Po osi

Formula	Pogreška formule ne prelazi 0,1% ako se x mijenja od	do	Pogreška formule ne prelazi 1,0% ako se x mijenja od	do	Pogreška formule ne prelazi 10% ako se x mijenja od	do
$\sin x = x$	$-0{,}077 = -4°{,}4$	$0{,}077 = 4°{,}4$	$-0{,}245 = -14°{,}0$	$0{,}245 = 14°{,}0$	$-0{,}786 = -45°{,}0$	$0{,}786 = 45°{,}0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$-0{,}580 = -33°{,}2$	$0{,}580 = 33°{,}2$	$-1{,}005 = -57°{,}6$	$1{,}005 = 57°{,}6$	$-1{,}632 = -93°{,}5$	$1{,}632 = 93°{,}5$
$\cos x = 1$	$-0{,}045 = -2°{,}6$	$0{,}045 = 2°{,}6$	$-0{,}141 = -8°{,}1$	$0{,}141 = 8°{,}1$	$-0{,}451 = -25°{,}8$	$0{,}451 = 25°{,}8$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-0{,}386 = -22°{,}1$	$0{,}386 = 22°{,}1$	$-0{,}662 = -37°{,}9$	$0{,}662 = 37°{,}9$	$-1{,}036 = -59°{,}3$	$1{,}036 = 59°{,}3$
$\operatorname{tg} x = x$	$-0{,}054 = -3°{,}1$	$0{,}054 = 3°{,}1$	$-0{,}172 = -9°{,}8$	$0{,}172 = 9°{,}8$	$-0{,}517 = -29°{,}6$	$0{,}517 = 29°{,}6$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$	$-0{,}293 = -16°{,}8$	$0{,}293 = 16°{,}8$	$-0{,}519 = -29°{,}7$	$0{,}519 = 29°{,}7$	$-0{,}895 = -51°{,}3$	$0{,}895 = 51°{,}3$
$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a}$*	$-0{,}085\,a^2$	$0{,}093\,a^2$	$-0{,}247a^2$	$0{,}328\,a^2$	$-0{,}607a^2$	$1{,}545a^2$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$	$-0{,}051a^2$	$0{,}052a^2$	$-0{,}157a^2$	$0{,}166\,a^2$	$-0{,}448\,a^2$	$0{,}530\,a^2$
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$-0{,}031a$	$0{,}031a$	$-0{,}099a$	$0{,}099a$	$-0{,}301a$	$0{,}301a$
$e^x = 1 + x$	$-0{,}045$	$0{,}045$	$-0{,}134$	$0{,}148$	$-0{,}375$	$0{,}502$
$\ln(1+x) = x$	$-0{,}002$	$0{,}002$	$-0{,}020$	$0{,}020$	$-0{,}176$	$0{,}230$

* Formulu možemo napisati u obliku $\sqrt{a^2+x} = \frac{1}{a}\left(a + \frac{a^2+x}{a}\right)$. U tom se obliku ona obično i upotrebljava u praksi. Kako je a približna vrijednost korijena (»prvo približenje«), iz te formule izlazi pravilo: da postignemo točniju vrijednost korijena treba uzeti aritmetičku sredinu prvog približenja i kvocijenta iz radikanda i prvog približenja; pri tome možemo smatrati da je broj točnih znamenaka dobivenog rezultata dvostruko veći od broja točnih znamenaka prvog približenja.

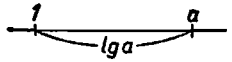
Također treba primijetiti da formula $\sqrt{a^2+b^2} = 0{,}960\,a + 0{,}398\,b$, gdje je $a > b$, dobivena po principu jednolike aproksimacije daje pogrešku koja nije veća od 4%.

nanosimo od početne točke dužine, koje u nekom mjerilu odgovaraju dekadskim logaritmima niza brojeva (sl. 65). Ako smo nanijeli lg a, pripadnu točku označimo sa a (sl. 66). Početnu točku treba označiti sa 1 (lg 1 = 0). Tako je na logaritamskoj skali razmak

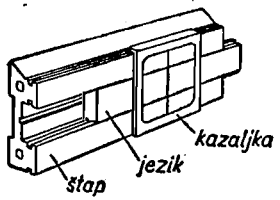


Sl. 65

od oznake 1 do oznake a u odabranom mjerilu jednak lg a. Kako je lg (10a) = 1 + lg a, to će i oznake na logaritamskoj skali za dio od 10 do 100 potpuno odgovarati oznakama za dio od 1 do 10 za 10 puta manje brojeve. Isto rasuđivanje možemo provesti



Sl. 66



Sl. 67

i za druge dijelove skale. Zbog toga dio skale dug jednu jedinicu mjerila može poslužiti za predočivanje čitave beskonačne logaritamske skale. Brojevima s istim rasporedom brojaka, tj. onih koji se razlikuju za faktor 10^n (npr. 7,15; 0,0715; 71500), odgovarat će na tom dijelu skale jedna te ista oznaka.

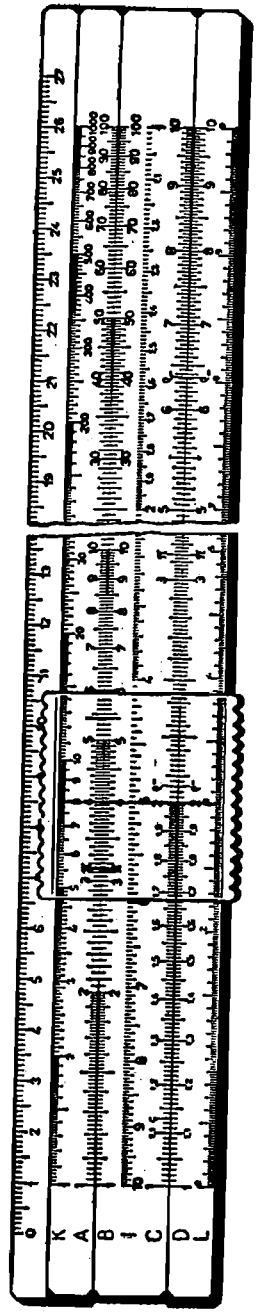
Skale računala. Logaritamsko računalo sastavljeno je od *štapa, jezika,* koji klizi po utorima štapa, i *kazaljke* — okvira sa staklom na kojem je urezana jedna, ili tri usporedne indeksne crte (sl. 67). Na štapu i na obje strane jezika nanesene su skale. Te skale nazivat ćemo: *A, B, C, D, I, K, L* (sl. 68); neki tipovi računala nemaju skale *I* i *K*, a skala *L* smještena je na poleđini jezika. Prije no što počnemo računati s logaritamskim računalom *treba da proučimo njegove skale.*

Skale *A, B, C, D, I, K* su logaritamske. Skalama *C, D* i *I* jedinica mjerila je 25 cm. Suprotno svim drugim skalama pozitivni smjer skale *I* izabran je ulijevo. Za skale *A* i *B* jedinica mjerila je 12,5 cm, a za skalu *K* — 8 $^1/_3$ cm; u vezi s time te skale imaju na računalu dva (*A* i *B*) odnosno tri (*K*) potpuno jednaka dijela. Razdiobe su na svim logaritamskim skalama nejednolike i na raznim

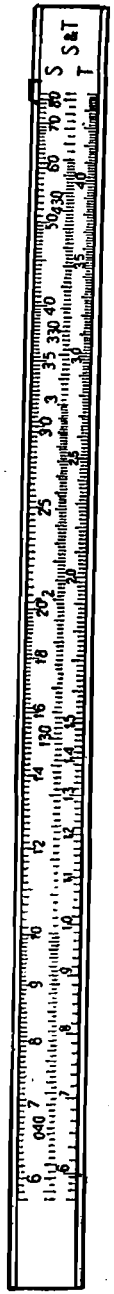
mjestima nejednako fine. Ako na računalu tražimo broj za koji nema oznake, smatramo da je između dvije susjedne oznake logaritamska skala jednolika, tj. da npr. oznaka za broj 235 leži u sredini između oznaka 234 i 236.

Skala *L* jednoliko je raspodijeljena, a razmak između dvije susjedne oznake iznosi 0,002 jedinice (za jedinicu je uzeta duljina 25 cm).

Na poleđini jezika (sl. 69) nanesene su logaritamske skale trigonometrijskih funkcija: *T* ili *Tg* (tangens), *S* ili *Sin* (sinus) i *S* & *T* (sinus et tangens). Na skali *T* je razmak od početne točke do oznake *T*° jednak lg tg *T*°, pri čemu je za jedinicu mjerila izabrano 25 cm. U početnoj točki je oznaka 45° (lg tg 45° = 0). Kako je lg tg *T*° < 0 za *T*° < < 45°, pripadne oznake moraju biti raspoređene lijevo od početne točke (sl. 70). Dio skale *T* na jeziku odgovara vrijednostima lg tg *T*°, sadržani u intervalu od —1 do 0, što odgovara kuto-

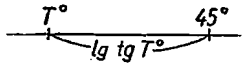


Sl. 68

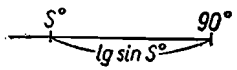


Sl. 69

vima koji leže između 5°43′ (tg 5°43′ = 0,1) i 45°. Analogno, na skali S razmak od početne točke (s oznakom 90°) do oznake $S°$ jednak je lg sin $S°$. Za $S° < 90°$ pripadne oznake raspoređene su lijevo od početne točke (sl. 71), jer je lg sin $S° < 0$. Dio skale $S°$



Sl. 70

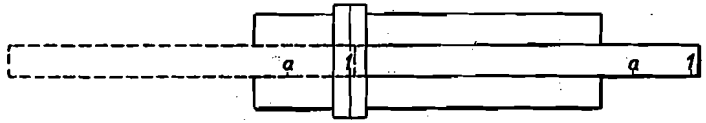


Sl. 71

na jeziku obuhvaća kutove od 5°44′ do 90° (sin 5°44′ = 0,1). Za kutove manje od 5°44′ u granicama točnosti računala, vrijednosti sinusa i tangensa se podudaraju, pa je skala $S \& T$ zajednička za skale lg tg $T°$ i lg sin $S°$ za kutove između 0°35′ i 5°44′. Za te kutove se sinus i tangens mijenjaju od 0,01 do 0,1 (na nekim tipovima računala skala S nanesena je u mjerilu s jedinicom 12,5 cm; tada ta skala obuhvaća kutove od 0°35′ do 90°; niže navedene sheme za računanje skalom S treba u tom slučaju preraditi).

Pravila računanja. Proces računanja sastoji se u postavljanju dvaju brojeva raznih skala štapa i jezika jedan nasuprot drugom, a rezultat očitavamo na jednoj skali nasuprot nekom broju na drugoj skali. Ta operacija izvodi se pomoću kazaljke. Niže su dane sheme po kojima na logaritamskom računalu izvodimo jednostavne račune.

Opća pravila. 1) Logaritamsko računalo daje samo brojevne vrijednosti rezultata, za koji treba odrediti decimale (mjesto decimalnog zareza). Stoga je najbolje napamet izvesti grub račun i ocijeniti red veličine rezultata. 2) Pri kombiniranim računima međurezultate ne očitavamo, nego samo na njih postavljamo indeksnu crtu kazaljke. Zbog toga treba izabrati takvu shemu ra-



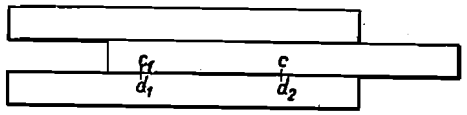
Sl. 72

čunanja, da rezultat svake operacije ili skupine operacija očitamo na štapu, a ne na jeziku. 3) Ako rezultat računanja moramo očitati na štapu, nasuprot oznaci a na jeziku, a oznaka je izvan štapa, onda moramo prebaciti jezik: indeksnu crtu kazaljke postavimo na onu krajnju oznaku jezika koja leži unutar štapa, a zatim jezik pomaknemo tako, da na indeksnu crtu kazaljke dođe druga krajnja oznaka iste skale na jeziku (sl. 72). Tada je oznaka a unutar štapa, i rezultat možemo očitati.

Sheme. U shemama je važan samo međusobni raspored oznaka, a ne i relativni raspored raznih parova oznaka. Jezik možemo pomicati i ulijevo i udesno.

Množenje, dijeljenje, razmjeri.

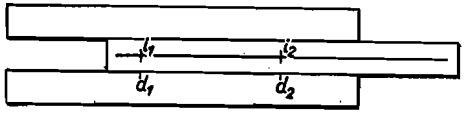
I



$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}.$$

Ako je $c_1 = 1$, onda je $d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

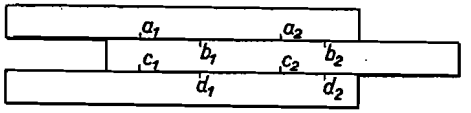
II



$$i_1 d_1 = i_2 d_2.$$

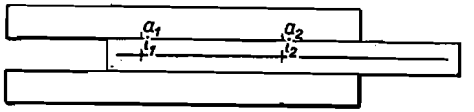
Ako je $i_1 = 1$, onda je $d_1 = i_2 d_2$.

III



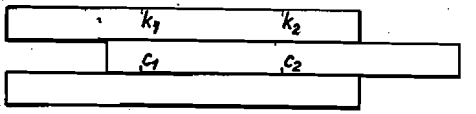
$$\frac{a_1}{c_1^2} = \frac{a_2}{c_2^2} = \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}.$$

IV



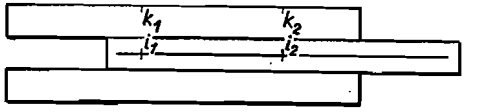
$$a_1 i_1^2 = a_2 i_2^2$$

V



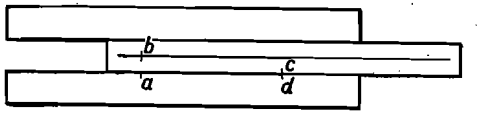
$$\frac{k_1}{c_1^3} = \frac{k_2}{c_2^3}.$$

VI



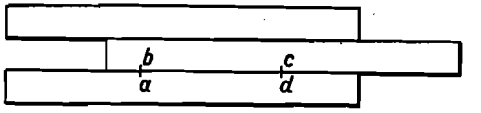
$$k_1 i_1^3 = k_2 i_2^3.$$

VII



$$d = abc; \quad a = \frac{d}{bc}.$$

VIII

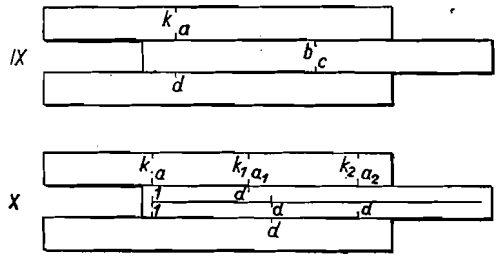


$$d = \frac{ac}{b}.$$

Za množenje i dijeljenje obično se koristimo shemama I i II. Sheme III do VI omogućavaju istovremeno množenje i dijeljenje s kvadratom ili kubom zadanog broja. Za kombinirane operacije

primjenjujemo sheme VII i VIII. Npr. računanje po formuli: $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f \cdot g}$ izvodimo u tri postupka — dva puta po shemi VIII i jedanput po shemi VII: $\frac{a \cdot b}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{1}{f \cdot g}$.

Potenciranje i korjenovanje.



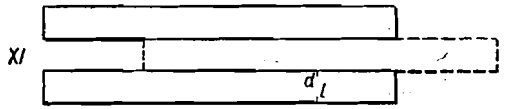
$a = d^2$; $b = c^2$; $k = d^3$.
$d = \sqrt{a}$; $d = \sqrt[3]{k}$; $k = \sqrt{a^3}$.

$a = d^4$; $a_1 = d^5$; $k = d^6$;
$a_2 = d^6$; $k_1 = d^{7,5}$; $k_2 = d^9$.

Računanje po shemi IX izvodimo samo pomoću indeksne crte. Po istoj shemi računamo kvadratni i kubni korijen. Pri tome radikand moramo odijeliti u grupe po dvije ili tri znamenke od decimalnog zareza (vidi str. 22), a u ovisnosti o broju značajnih znamenaka u prvoj grupi na lijevoj strani odredimo položaj radikanda na skali *A* ili *K* (sl. 73). Npr. pri računanju $\sqrt{3|75}$ broj 3|75 postavimo na prvu polovinu skale *A*; pri računanju $\sqrt[3]{0{,}000|05}$ broj 0,000|050 postavimo na drugom dijelu skale *K*.

Sl. 73

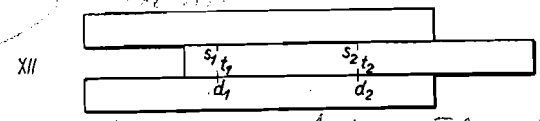
Logaritmiranje.



$l = \lg d$.

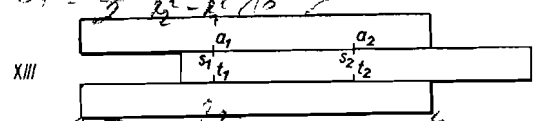
Računanja po shemi XI izvodimo samo pomoću indeksne crte; jezikom se ne služimo. Karakteristiku nalazimo po uobičajenim pravilima (vidi str. 175).

Trigonometrijsko računanje.



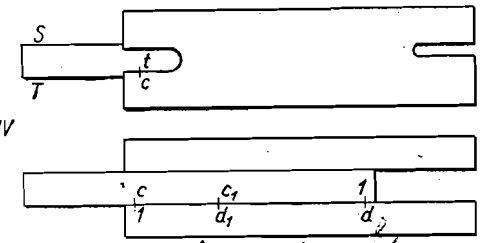
a) $\frac{\operatorname{tg} t_1^\circ}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} t_2^\circ}{d_2}$;

b) $\frac{\sin s_1^\circ}{d_1} = \frac{\sin s_2^\circ}{d_2}$*.



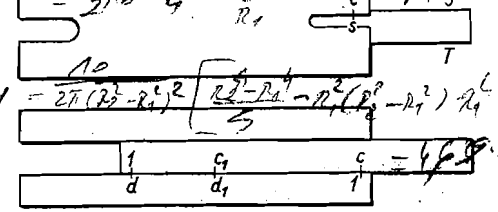
a) $\frac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1^\circ} = \frac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2^\circ}$;

b) $\frac{a_1}{\sin^2 s_1^\circ} = \frac{a_2}{\sin^2 s_2^\circ}$*.



$c = \operatorname{tg} t^\circ$; $d = \operatorname{ctg} t^\circ$;

$\frac{c_1}{d_1} = \operatorname{tg} t^\circ$.



$c = \sin s^\circ$; $d = \frac{1}{\sin s^\circ}$*;

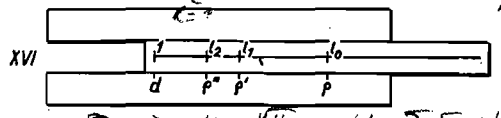
$\frac{c_1}{d_1} = \sin s^\circ$*.

Računanja po shemama XII i XIII izvode se jezikom koji smo prethodno okrenuli poleđinom prema gore. Neka računanja s trigonometrijskim veličinama možemo izvoditi i neobrnutim jezikom. Pri tome oznake na skalama *S* i *T* očitavamo pomoću crtica urezanih na poleđini štapa (sheme XIV i XV).

* Ta shema ne vrijedi za logaritamska računala kojima je skala *S* izvedena u mjerilu 12,5 cm. Vidi str. 160.

Posebne oznake.

Preračunavanje stupanja u radijane i obrnuto:



$\rho^\circ = 57{,}30;$
$\rho' = 3438;$
$\rho'' = 206265.$

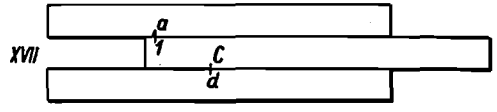
$$d^\circ = i_0 \text{ rad } \left(= \frac{d^\circ}{\rho^\circ} \text{ rad}\right); \quad d' = i_1 \text{ rad } \left(= \frac{d'}{\rho'} \text{ rad}\right);$$

$$d'' = i_2 \text{ rad } \left(= \frac{d''}{\rho''} \text{ rad}\right);$$

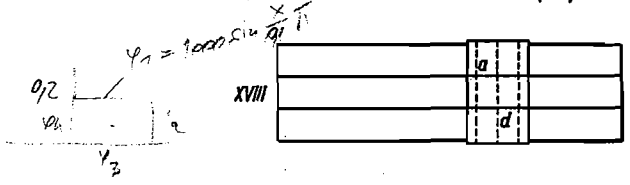
(npr. $15^\circ = 0{,}262$ rad, $15' = 0{,}00436$ rad, $15'' = 0{,}0000727$ rad)

Umjesto sheme XVI možemo također upotrijebiti shemu I.

Površina kruga (shema XVII):



$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}1248; \quad a = \left(\frac{d}{C}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$



Ako su na kazaljki ucrtane tri indeksne crte, površinu kruga možemo naći i bez pomoći jezika, prema shemi XVIII.

II. ALGEBRA

A. IDENTIČKE PRETVORBE

1. OSNOVNI POJMOVI

Definicije. *Algebarskim izrazom* nazivamo jednu ili više algebarskih veličina (brojeva ili slova), povezanih međusobno znakovima algebarskih operacija (+, —, :, $\sqrt{}$ itd.) i znakovima poređaja tih operacija (različnim zagradama). *Identitetom* nazivamo takvu jednakost dvaju algebarskih izraza, koja ostaje točna ako umjesto slova u nju uvrstimo ma koje veličine; ako je jednakost točna samo pri uvrštenju nekih određenih vrijednosti, nazivamo je *jednadžbom*+.

Identičku pretvorbu kojom dobivamo iz jednog algebarskog izraza drugi, njemu identički jednak možemo izvesti na razne načine, u ovisnosti o namjeni zbog koje pretvaramo i koju uvijek moramo imati u vidu. Npr. dovođenje izraza u sažetiji oblik prikladan za supstituciju brojevnih vrijednosti umjesto slova ili za daljnje pretvaranje: svođenje izraza na oblik prikladan za rješavanje jednadžbi, za logaritmiranje, za diferenciranje, za integriranje itd.

Klasifikacija algebarskih izraza. U svakom pojedinom slučaju u algebarskom izrazu određuju se *osnovne veličine* po kojima klasificiramo; neosnovne veličine (ostala slova) nazivamo *parametrima* izraza. Izraz pripada jednoj ili drugoj klasi, prema tome kakve se operacije vrše na njegovim osnovnim veličinama. U *cijelim racionalnim* izrazima na osnovnim veličinama izvodi se samo zbrajanje, oduzimanje i množenje (uključujući u to i potenciranje s cijelim pozitivnim eksponentom), u *razlomljene* racionalne izraze ulazi (pored spomenutih operacija) dijeljenje s osnovnom veličinom* (ili potenciranje s negativnim eksponentom), u *iracionalnim izrazima* pridružuje mu se korjenovanje osnovnih veličina+* (potenciranje s razlomljenim eksponentom), u *eksponencijalnim izrazima* potenciranje eksponentom koji sadrži osnovne veličine**, u *logaritamskim* logaritmiranje osnovnih veličina**.

+ O jednadžbama vidi str. 176... 181.
* A također dijeljenje sa cijelim racionalnim izrazom iz osnovnih veličina.
+* A također iz cijelih ili razlomljenih racionalnih izraza iz osnovnih veličina.
** A također racionalni ili iracionalni izrazi osnovnih veličina.

U svim narednim primjerima osnovne veličine označene su posljednjim slovima abecede (x, y, z, ...), a parametri početnim (a, b, c...) ili srednjim, gdje srednja slova (m, n, p...) primaju samo cijele pozitivne vrijednosti.

2. CIJELI RACIONALNI IZRAZI

Predočenje u obliku polinoma. Svaki cio racionalan izraz možemo predočiti u obliku polinoma pomoću elementarnih pretvorbi (stezanje istovrsnih članova, zbrajanje, oduzimanje i množenje monoma i polinoma).

Primjer:

$$(-a^3 + 2a^2x - x^3)\ (4a^2 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) -$$
$$- (a^5 + 4a^3x^2 - 4ax^4) = -4a^5 + 8a^4x - 4a^2x^3 - 8a^4x + 16a^3x^2 -$$
$$- 8ax^4 + a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4 - a^5 - 4a^3x^2 + 4ax^4 =$$
$$= -5a^5 + 13a^3x^2 - 2a^2x^3 - 8ax^4.$$

Rastavljanje polinoma na faktore. U mnogo slučajeva polinom možemo izraziti u obliku faktora (monoma i polinoma) pomoću izlučivanja iz zagrada, načina grupiranja, primjene formule za skraćeno množenje i dijeljenje i korištenja svojstava jednadžbi.

Primjeri:

1) Izlučivanje:

$$8ax^2y - 6bx^3y^2 + 4cx^5 = 2x^2(4ay - 3bxy^2 + 2cx^3).$$

2) Razvrstavanje u skupine:

$$6x^2 + xy - y^2 - 10xz - 5yz = 6x^2 + 3xy - 2xy - y^2 -$$
$$- 10xz - 5yz = 3x(2x + y) - y(2x + y) - 5z(2x + y) =$$
$$= (2x + y)\ (3x - y - 5z).$$

3) Upotreba svojstava algebarskih jednadžbi*:

$P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2$. a) Izlučimo x^2, b) Ustanovimo da su brojevi $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -1$ korijeni jednadžbe $P(x) = 0$. Dijelimo li $P(x)$ sa $x^2(x - 1)(x + 1) = x^4 - x^2$, dobijemo kvocijent $x^2 - 2x + 5$. U tome izrazu je $p = -2$, $q = 5$, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: i taj se izraz ne može dalje rastaviti na realne faktore.

* Vidi str. 182.

Prema tome:

$$x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 5).$$

Formule skraćenog množenja i dijeljenja:

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$,

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,

$(x + y + z + \ldots + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + t^2 + u^2 +$
$+ 2xy + 2xz + \ldots + 2xu + 2yz + \ldots + 2yu + \ldots + 2tu$,

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$,

$(x \pm y)^n$ računa se po formuli Newtona (binomni teorem, vidi na str. 210),

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,

$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$

$(x^n + y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - yx^{n-2} + y^{n-1}$
(samo za neparan n!),

$(x^n - y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$
(samo za paran n!).

Određivanje najveće zajedničke mjere dvaju polinoma. Dva polinoma $P(x)$ (n-tog stupnja) i $Q(x)$ (m-tog stupnja) ($n \geqslant m$) mogu imati zajedničke faktore, u kojima se javlja x; produkt svih tih faktora nazivamo *najvećom zajedničkom mjerom* tih polinoma. Ako $P(x)$ i $Q(k)$ nemaju takve zajedničke faktore, nazivamo ih *relativno prostim* (njihova najveća zajednička mjera = const).

Najveću zajedničku mjeru polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ možemo, ne rastavljajući ga na faktore, naći na ovaj način (*Euklidov algoritam*):

1) $P(x)$ dijelimo sa $Q(k)$: kvocijent je $T_1(x)$, ostatak $R_1(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot T_1(x) + R_1(x).$$

2) $Q(x)$ dijelimo sa $R_1(x)$: kvocijent je $T_2(x)$, ostatak $R_2(x)$:

$$Q(x) = R_1(x) \cdot T_2(x) + R_2(x) \quad \text{itd.}$$

Posljednji ostatak $R_k(x)$ različit od nule najveća je zajednička mjera polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Najveću zajedničku mjeru tražimo pri rješavanju jednadžbi (odvajanje višestrukih korijena — vidi str. 183, upotreba Sturmove metode — str. 184, pri integriranju po metodi Ostrogradskog — str. 416 i 417, i u drugim problemima).

3. RAZLOMLJENI RACIONALNI IZRAZI

Svođenje na jednostavniji oblik. Svaki razlomljeni racionalni izraz možemo dovesti u oblik kvocijenta dvaju polinoma bez zajedničkih faktora, pomoću elementarnih pretvorbi (zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja polinoma i razlomaka i skraćivanja razlomaka).

Primjer: Pretvori u jednostavniji oblik:

$$\frac{3x+\dfrac{2x+y}{z}}{x\left(x^2+\dfrac{1}{z^2}\right)}-y^2+\frac{x+z}{z}=$$

$$=\frac{(3xz+2x+y)\,z^2}{(x^3z^2+x)\,z}+\frac{-y^2z+x+z}{z}=$$

$$=\frac{3xz^3+2xz^2+yz^2+(x^3z^2+x)\,(-y^2z+x+z)}{x^3z^3+xz}=$$

$$=\frac{3xz^3+2xz^2+yz^2-x^3y^2z^3-xy^2z+x^4z^2+x^2+x^3z^3+xz}{x^3z^3+xz}.$$

Odvajanja cijelog racionalnog dijela. Kvocijent dvaju polinoma sa zajedničkom osnovnom veličinom x nazivamo algebarskim *pravim razlomkom* tada, kada je eksponent m najvišeg člana* brojnika manji od eksponenta n najvišeg člana nazivnika; *nepravim* ako je $m \geqslant n$. Svaki nepravi razlomak možemo pretvoriti u sumu polinoma i pravog razlomka odvajanjem *cijelog racionalnog dijela* (dijelimo polinom s polinomom).

Primjer: Odvoji cijeli racionalni dio u:

$$R(x)=\frac{3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4}{x^2-2ax+3a^2}$$

$$\begin{array}{l}(3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4):(x^2-2ax+3a^2)= \\ \underline{-\ 3x^4\mp\ 6ax^3\pm\ 9a^2x^2} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad =3x^2-4ax+5a^2 \\ \qquad -\ 4ax^3+13a^2x^2-24a^3x \\ \qquad \underline{\mp\ 4ax^3\pm\ 8a^2x^2\mp\ 12a^3x} \\ \qquad\qquad\quad 5a^2x^2-12a^3x+10a^4 \\ \qquad\qquad \underline{-\ 5a^2x^2\mp\ 10a^3x\pm\ 15a^4} \\ \qquad\qquad\qquad -\ 2a^3x-\ 5a^4\end{array}$$

$$R(x)=3x^2-4ax+5a^2+\frac{-2a^3x-5a^4}{x^2-2ax+3a^2}.$$

* Tj. člana koji sadrži x sa najvišom potencijom.

Rastavljanje na parcijalne razlomke. Svaki pravi *neskrativi** razlomak

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n},$$

gdje su koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi (koeficijent najvišeg člana nazivnika učinimo jednakim 1, podijelivši s njime brojnik i nazivnik) možemo jednoznačno rastaviti u sumu parcijalnih razlomaka oblika $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ ili $\dfrac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$ gdje je $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q<0$. Pri tome su moguća četiri slučaja**.

1) Nazivnik $P(x)$ je takav da jednadžba $P(x)=0$ ima samo realne jednostruke*** korijene $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Rastavljanje vršimo po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}=$$

$$=\frac{A}{x-\alpha_1}+\frac{B}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{C}{x-\alpha_n},$$

gdje su koeficijenti $A, B, \ldots, C$ određeni formulama

$$A=\frac{Q(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)},\quad B=\frac{Q(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)},\quad \ldots,\quad C=\frac{Q(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}$$

(u nazivnicima su vrijednosti derivacije $\dfrac{dP}{dx}$ za $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$, ...).

Primjer: $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$;

$\alpha_1=0,\ \alpha_2=+1,\ \alpha_3=-1;\quad Q(x)=6x^2-x+1;$

$P'(x)=3x^2-1;\quad A=\dfrac{Q(0)}{P'(0)}=-1,\quad B=\dfrac{Q(1)}{P'(+1)}=3$

i $C=\dfrac{Q(-1)}{P'(-1)}=4;\quad \dfrac{Q(x)}{P(x)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x+1}$.

* Tj. takav kojemu brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih faktora koji sadrže x.

** Ako se ne ograničavamo samo na realne brojeve, onda se slučaj 3) ne razlikuje od slučaja 1), a slučaj 4) od slučaja 2). S toga gledišta svaki razlomak $R(x)$ možemo rastaviti u sumu samo parcijalnih razlomaka oblika $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, gdje su A i α kompleksni brojevi. Tim se koristimo pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi (vidi str. 559).

*** O višestrukosti korijena vidi na str. 182.

Drugi način određivanja $A, B, \ldots, C$ je metoda neodređenih koeficijenata (primjenjuje se u sva četiri slučaja).

Primjer: $$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

Izjednačenjem koeficijenata pri jednakim potencijama x brojnika lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo sistem jednadžbi: $6=A+B+C$, $-1=B-C$, $1=-A$; rješenjem dobivamo da A, B i C imaju iste vrijednosti kao gore.

2) Korijeni nazivnika su realni, ali među njima ima višestrukih. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\ldots+\frac{L_{k_l}}{(x-\alpha_l)^{k_l}}.$$

Primjer: $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3};$$

koeficijente A, B_1, B_2 i B_3 dobivamo metodom neodređenih koeficijenata.

3) Među korijenima nazivnika ima jednostrukih kompleksnih korijena. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Fx+G}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots$$

Primjer: $$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Koeficijente A, D, E računamo metodom neodređenih koeficijenata.

4) Među korijenima nazivnika ima višestrukih kompleksnih korijena. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+$$

$$+\ldots+\frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots$$

Primjer:

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}.$$

A, D_1, E_1, D_2, E_2 izračunavamo metodom neodređenih koeficijenata.

Pretvaranje razmjera. Iz razmjera $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ izlazi jednadžba $ad=bc$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, te također *izvedeni razmjeri:*

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\quad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Iz jednakosti nekoliko omjera $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ izlazi:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}.$$

4. IRACIONALNI IZRAZI; PRETVARANJE POTENCIJA I KORIJENA

Svođenje na normalni oblik. Svaki iracionalni izraz možemo pretvoriti u tzv. normalni oblik pomoću; 1) skraćivanja eksponenta 2) izlučivanja iz korijena, 3) uklanjanja iracionalnosti nazivnika.

Skraćivanje eksponenta provodimo s najvećom zajedničkom mjerom eksponenta korijena i eksponenata svih faktora pod korijenom (izraz pod korijenom prethodno rastavimo na faktore).

Primjer:

$$\sqrt[6]{16\,(x^{12}-2x^{11}+x^{10})} = \sqrt[6]{4^2\cdot x^{5\cdot 2}\,(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x^5\,(x-1)}.$$

Pred korijen možemo staviti takve faktore X kojima je eksponent potencije m veći ili jednak eksponentu korijena n. Tada m dijelimo sa n, i X stavimo ispred korijena s eksponentom potencije kvocijenta, a pod korijenom ostaje X s eksponentom ostatka tog dijeljenja.

Primjer: $\sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}u^2} = 2xy^2z^3\sqrt[3]{4xzu^2}$.

Uklanjanje iracionalnosti nazivnika provodimo na razne načine.

Primjeri:

1) $\sqrt{\dfrac{x}{2y}} = \sqrt{\dfrac{2xy}{4y^2}} = \dfrac{\sqrt{2xy}}{2y}$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}$;

3) $\dfrac{1}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{(x+\sqrt{y})\,(x-\sqrt{y})} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$;

4) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{(x+\sqrt[3]{y})\,(x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})} = \dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x^3+y}$.

Primjer: Svedimo na normalni oblik

$$\sqrt[4]{\frac{81x^6}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^4}} = \sqrt{\frac{9x^3}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}\,(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x} = \frac{3x\sqrt{2x}+3x^2}{2-x}.$$

Pretvaranje potencija i korijena

$$x^m x^n = x^{m+n};\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n};\quad (xy)^n = x^n y^n;\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n};\quad (x^m)^n = x^{mn}. \qquad (*)$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y};\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}};$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}.$$

Poopćenje pojma eksponenta: Dogovorno uzimamo:

$$x^0 = 1,\quad x^{-n} = \frac{1}{x^n},\quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x},\quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m},\quad x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

U odnosu na nulte, negativne i razlomljene eksponente vrijede iste formule za pretvaranje (*) kao i za cijele pozitivne eksponente; to često pojednostavnjuje računanja.

Primjer:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[12]{x^7}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[12]{x^5}\right) =$$

$$= (x^{1/2}+x^{2/3}+x^{3/4}+x^{7/12})\,(x^{1/2}-x^{1/3}+x^{1/4}-x^{5/12}) =$$

$$= x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{19/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} +$$

$$+ x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x =$$

$$= x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3}.$$

5. EKSPONENCIJALNI I LOGARITAMSKI IZRAZI

Pretvaranje eksponencijalnih izraza oblika a^x provodi se po formulama analognim (*):

$$a^x a^y = a^{x+y};\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\quad (a^x)^y = a^{xy};\quad \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y},$$

pri tom x i y mogu imati svaku brojevnu vrijednost. Eksponencijalne izraze, u kojima su različite baze a^x, b^y, c^z, ..., možemo pretvarati u izraze sa zajedničkom bazom, ako upotrijebimo identitet $b = a^{\log_a b}$.

Primjer: Izrazi $(a^x b^y) : c^z$ u obliku potencije s bazom a.

$$\frac{a^x b^y}{c^z} = \frac{a^x a^{y\log_a b}}{a^{z\log_a c}} = a^{x+y\log_a b - z\log_a c}.$$

Na sličan oblik možemo svesti svaki izraz u kojemu nema ni sume ni razlike potencija.

Izraz e^x, gdje je e baza prirodnih logaritama (vidi niže), ponekad se označava $\exp(x)$.

Logaritmi. Logaritmom A broja N za bazu a (oznaka: $A = \log_a N$) nazivamo eksponent, s kojim treba potencirati bazu a, da dobijemo N. Prema tome iz jednadžbe $a^A = N$ izlazi $\log_a N = A$, i obrnuto, iz druge jednadžbe izlazi prva.

Svaki *pozitivan* broj ima za svaku pozitivnu bazu (osim za jedinicu) svoj logaritam; logaritmi različnih brojeva za istu bazu a tvore *sistem logaritama* za tu bazu. Ako znamo logaritme brojeva za bazu a, možemo odrediti logaritme tih brojeva za drugu bazu b po formuli:

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \text{ gdje je } M = \frac{1}{\log_a b} \text{ (\textit{modul pretvorbe}*).}$$

Osnovna svojstva logaritama pri istoj bazi a ($a \neq 1$):

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty \text{ pri } a > 1, \\ +\infty \text{ pri } a < 1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log (N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2; \ \log \dfrac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2; \\ \log (N^n) = n \log N; \ \log \sqrt[n]{N} = \dfrac{1}{n} \log N. \end{array}\right\} (**)$$

Logaritmiranjem neke veličine nazivamo traženje njenog logaritma**; traženje veličine po njenom logaritmu nazivamo *antilogaritmiranjem.*

Sistemi logaritama koji su u upotrebi: dekadski ili *Briggsovi* sa bazom 10, koje obično upotrebljavamo pri računanju (oznaka: $\log_{10} N = \lg N$), i *prirodni* ili *Neperovi* (*hiperbolni*) sa bazom $e = 2{,}71828\ldots$*** (oznaka $\log_e N = \ln N$).

Modul pretvorbe prirodnih logaritama u dekadske:

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429; \quad \log N = 0{,}43429 \ln N;$$

modul pretvorbe dekadskih logaritama u prirodne:

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}30259; \quad \ln N = 2{,}30259 \lg N.$$

Svojstva dekadskih logaritama. Dekadske logaritme pišemo u obliku decimalnog razlomka s točnošću do određene decimale; njegov cijeli dio nazivamo *karakteristikom* logaritma, a razlomljeni dio *mantisom*, npr. $\lg 324 = 2{,}5105$; karakteristika je 2, mantisa

* Podesno je upotrebljavati ovu formulu koju lako pamtimo: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, gdje su na desnoj strani logaritmi za bilo koju (jednu te istu) bazu.

** Logaritmiranjem nazivamo također pretvaranje logaritamskih izraza po formulama (**) — izražavanje logaritma složenog izraza logaritmima veličina koje u njega ulaze (vidi str. 175).

*** Definiciju broja e vidi na str. 341.

0,5105. Brojevi koje dobivamo iz zadanog broja množenjem ili dijeljenjem sa 10^n (npr. 3240; 324000; 3,24; 0,0324 iz 324) imaju dekadske logaritme s jednakom mantisom (0,5105). Mantisu tražimo u *logaritamskim tablicama**, pri čemu ne obraćamo pažnju na decimalni zarez niti na nule s lijeve i s desne strane broja. Karakteristiku određujemo po pravilu: 1) ako je broj > 1, karakteristika je za jedinicu manja od broja njegovih znamenaka ispred decimalnog zareza, 2) ako je broj < 1, karakteristika je negativna i po apsolutnoj vrijednosti jednaka broju nula na lijevoj strani, uključujući i nulu cijelog broja. *Npr.*: $\lg 3240 = 3{,}5105$; $\lg 324000 = 5{,}5105$; $\lg 3{,}24 = 0{,}5105$; $\lg 0{,}0324 = \bar{2}{,}5105$. Znak »—« postavljamo *iznad* karakteristike, tako da mantisa ostane pozitivna; takav »nepotpun« — *umjetan* oblik negativnog logaritma možemo pretvoriti u »potpun« po ovim pravilima: 1) apsolutna vrijednost karakteristike nepotpunog negativnog logaritma za jedinicu je veća od apsolutne veličine karakteristike potpunog negativnog logaritma; 2) znamenke mantise dopunjavaju se do 9, a njena posljednja značajna znamenka (koja nije nula) do 10; nule na kraju ostaju na svojim mjestima.

Primjeri: $\bar{2}{,}5105 = -1{,}4895$; $-3{,}2780 = \bar{4}{,}772$.

Često (naročito u tablicama) nepotpunom negativnom logaritmu dodajemo brojku 10, da bismo izbjegli postavljanje predznaka iznad brojke. Npr. umjesto $\bar{1}{,}324$ pišemo 9,324.

Pretvaranje logaritamskih izraza (logaritmiranje) izvodimo po formulama (**)**.

Primjer: Logaritmirajmo izraz $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log (3x^2\sqrt[3]{y}) - \log (2zu^3) =$$

$$= \log 3 + 2 \log x + \frac{1}{3} \log y - \log 2 - \log z - 3 \log u.$$

Često upotrebljavamo obrnute pretvorbe, tj. prikazujemo izraz koji sadrži nekoliko logaritama različitih veličina u obliku logaritma samo jednog izraza.

* Tablice dekadskih logaritama (točnije — tablice mantisa) vidi na str. 51 i 52; tablice antilogaritama (tj. brojeva po zadanim mantisama) vidi na str. 53 i 54 i tablice prirodnih logaritama vidi na str. 74 do 76.

** Za logaritmiranje izraza koji su suma ili razlika treba te izraze prethodno pretvoriti u izraze pogodne za logaritmiranje (tj. produkte i kvocijente).

Primjer:

$$\log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

O logaritamskom računalu vidi str. 156 do 164.

B. JEDNADŽBE

6. PRETVARANJE ALGEBARSKIH JEDNADŽBI U NORMALNI OBLIK

Definicija. *Jednadžbom* s jednom nepoznanicom

$$F(x) = f(x)$$

nazivamo izjednačenje dviju funkcija jedne iste promjenljive veličine, točne samo pri nekim određenim vrijednostima te promjenljive*. Promjenljivu (varijablu) u jednadžbi nazivamo *nepoznanicom*, a vrijednosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koje jednadžbu zadovoljavaju *korijenima* ili *rješenjima* jednadžbe. Dvije jednadžbe nazivamo *ekvivalentnim* ako one imadu iste korijene.

Jednadžbu nazivamo *algebarskom* ako je svaka njena funkcija $F(x)$ i $f(x)$ algebarska (racionalna ili iracionalna). Jedna od tih funkcija može biti konstanta.

Iz svake algebarske jednadžbe možemo algebarskim pretvorbama dobiti jednadžbu u *normalnom obliku:*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0^{**}$$

(a_0 možemo učiniti jednakim 1) koja ima iste korijene kao zadana jednadžba (i, možda, neki korijen više — vidi dalje).

Eksponent n nazivamo *stupnjem jednadžbe.*

Primjer: Pretvorimo u normalni oblik jednadžbu:

$$\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x}.$$

Postupne pretvorbe daju:

$$x(x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3);$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2 - 6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18;$$

$$x\sqrt{x^2 - 6} = 5x^2 - 20x + 18;$$

$$x^2(x^2 - 6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324;$$

$$24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0 \text{ (normalni oblik).}$$

Prema tome, dana je jednadžba 4. stupnja.

* Ako je jednakost točna za bilo koje vrijednosti promjenljive x, nazivamo je *identitetom.*

** Ovdje i dalje pretpostavljamo da su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots$ realni, a gdje to nisu, posebno ćemo na to upozoriti.

Sistem n algebarskih jednadžbi je skup n jednakosti ispravnih samo za određene skupine $(x_1, y_1, \ldots, z_1; x_2, y_2, \ldots z_2; \ldots)$ vrijednosti nepoznanica $(x, y, \ldots, z)$; svaku takvu skupinu nazivamo *rješenjem* tog sistema. Svaki sistem algebarskih jednadžbi može se pretvoriti u *normalni oblik:*

$$\begin{aligned} P_1(x, y, \ldots) &= 0, \\ P_2(x, y, \ldots) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n(x, y, \ldots) &= 0, \end{aligned}$$

gdje je P_1 polinom u $x, y, z, \ldots$

Primjer: Pretvorimo u normalni oblik* sistem:

$$1)\ \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z}, \quad 2)\ \frac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}, \quad 3)\ xy = z.$$

Normalni oblik: 1) $x^2z^2 - y = 0$,

2) $x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0$, 3) $xy - z = 0$.

Prekobrojni korijeni. Pri pretvaranju algebarskih jednadžbi u normalni oblik $P(x) = 0$ može se dogoditi da $P(x) = 0$ ima rješenje koje ne zadovoljava prvotnu jednadžbu. Pri tom su moguća dva slučaja:

I. Iščezavanje nazivnika. Ako jednadžba ima oblik razlomka

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

gdje su P i Q polinomi, tada obje strane jednadžbe pomnožimo sa nazivnikom, pa dobijemo jednadžbu u normalnom obliku:

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

koja ima iste korijene kao jednadžba (1), osim u slučaju kada je neki od korijena $x = \alpha$ jednadžbe $P(x)$ također korijen jednadžbe $Q(x) = 0$. Tada razlomak treba prethodno skratiti sa $x - \alpha$ [ili sa $(x - \alpha)^k$, ako je to moguće]; inače bi jednadžba $P(x) = 0$ sadržavala korijen $x = \alpha$ koji nije korijen jednadžbe (1) ili je njen korijen, ali manje višestrukosti*.

* O višestrukosti korijena vidi na str. 183.

Primjeri:

1) $$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{ili} \quad \frac{x^3-1}{x-1} = 0; \qquad (1')$$

ako ne skratimo sa $x-1$ i ne odbacimo nazivnik, tada korijen $x_1 = 1$ jednadžbe $x^3 - 1 = 0$ ne zadovoljava jednadžbu (1'), jer se njen nazivnik poništava.

2) $$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0; \qquad (2')$$

ako ne skratimo sa $(x-1)^2$ i ne odbacimo nazivnik dobivamo jednadžbu $(x-1)^3 = 0$ s trostrukim korijenom $x_1 = 1$, dok jednadžba (2') ima jednostruki korijen $x = 1$.

II. Iracionalne jednadžbe. Ako zadana jednadžba sadrži nepoznanice pod korijenom, onda svođenjem te jednadžbe na normalni oblik dobivamo drugu jednadžbu koja ponekad može imati korijene koji ne zadovoljavaju prvotnu jednadžbu. Zato nakon rješavanja druge jednadžbe treba provjeriti korijene uvrštavanjem u prvotnu jednadžbu.

Primjer:

$$\sqrt{x+7} + 1 = 2x \quad \text{ili} \quad \sqrt{x+7} = 2x - 1, \qquad (1'')$$

$$x + 7 = (2x-1)^2 \quad \text{ili} \quad 4x^2 - 5x - 6 = 0. \qquad (2'')$$

Korijeni jednadžbe (2'') jesu: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$; x_1 zadovoljava jednadžbu (1''), a x_2 ne zadovoljava [u jednadžbi (1'') radikal (korijen) se uzima u aritmetičkom smislu].

7. JEDNADŽBE PRVOG, DRUGOG, TREĆEG I ČETVRTOG STUPNJA

Jednadžba prvog stupnja (*linearna*). Normalni oblik:

$$ax + b = 0.$$

Broj rješenja: uvijek postoji jedno realno rješenje $x_1 = -\frac{b}{a}$.

Jednadžba drugog stupnja (*kvadratna*). Normalni oblik:

$ax^2 + bx + c = 0$ ili (poslije dijeljenja sa a): $x^2 + px + q = 0$.

Broj realnih rješenja ovisi o predznaku *diskriminante D*, koja glasi $4ac - b^2$ ili $q - \frac{p^2}{4}$:

ako je $D < 0$, ima 2 rješenja (2 realna korijena),
ako je $D = 0$, ima 1 rješenje (2 podudarna korijena),
ako je $D > 0$, ima 0 rješenje (2 kompleksna korijena).

Rješenje kvadratnih jednadžbi. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijevog dijela na faktore:

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ili $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$;

tada su korijeni jednadžbe: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

Primjer: $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$;

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

2. *način* — primjenom formule:

a) za oblik $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ili} \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

(posljednja formula je prikladna za paran b):

b) za oblik $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Svojstva korijena kvadratne jednadžbe:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

Jednadžba trećeg stupnja (*kubna*). Normalni oblik:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ili $\left(\text{dijelimo sa } a \text{ i umjesto } x \text{ uvodimo novu varijablu } y = x + \frac{b}{3a}\right)$:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \qquad (*)$$

gdje je $2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ i $3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$.

Broj realnih rješenja jednadžbe (*) ovisi o predznaku *diskriminante* $D = q^2 - p^3$:

ako je $D > 0$, jednadžba ima 1 rješenje (jedno realno i dva kompleksna),
ako je $D < 0$, jednadžba ima 3 rješenja (tri realna različita korijena),
ako je $D = 0$, jednadžba ima 1 rješenje za $p = q = 0$ (tri podudarna korijena koji su nule), i 2 rješenja za $p^3 = -q^2 \neq 0$ (od 3 realna dva se podudaraju).

Rješenje kubnih jednadžbi. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijevog dijela na faktore:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

korijeni jednadžbe su: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$.

Primjer: $x^3 + x^2 - 6x = 0$;
$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

2. *način* — primjena *Cardanove formule* [za oblik (*)]:

$y_1 = u + v$, $y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$, $y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$, gdje je

$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}$, a ε_1 i ε_2 su korijeni jednadžbe $x^2 + x + 1 = 0$, tj. $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

U slučaju $D = q^2 + p^3 < 0$ tri su realna korijena jednadžbe izražena kompleksnim veličinama, a prikladnije je upotrijebiti *treći* način.

Primjer: $y^3 + 6y + 2 = 0$. Tu je $p = 2$, $q = 1$, $q^2 + p^3 = 9$;
$u = \sqrt[3]{-1+3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599$, $v = \sqrt[3]{-1-3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874$.

Realni korijeni: $y_1 = u + v = -0{,}3275$; kompleksni korijeni:

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) = 0{,}1638 \pm i \cdot 2{,}4659.$$

3. *način* — s *pomoćnim veličinama*, računanim pomoću tablica. U jednadžbi (*) označimo $r = \pm\sqrt{|p|}$; predznak od r mora se podudarati s predznakom od q. Tada pomoćnu veličinu φ i pomoću nje korijene y_1, y_2 i y_3 određujemo u ovisnosti o predznacima p i $D = q^2 + p^3$ iz ove tablice:

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \leqslant 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r\cos\varphi/3$ $y_2 = +2r\cos(60° - \varphi/3)$ $y_3 = +2r\cos(60° + \varphi/3)$	$y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$	$y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$

Primjer: $y^3 - 9y + 4 = 0$.

$p = -3$, $q = 2$; $q^2 + p^3 < 0$;
$r = \sqrt{3} = 1{,}7321$, $\cos\varphi = 2 : 3\sqrt{3} = 0{,}3849$; $\varphi = 67°22'$,
$y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}4641 \cdot 0{,}9242 = -3{,}201$;
$y_2 = 2\sqrt{3}\cos(60° - 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}7929 = 2{,}747$;
$y_3 = 2\sqrt{3}\cos(60° + 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}1314 = 0{,}455$.

Kontrola (vidi svojstva korijena):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}001 \text{ umjesto } 0.$$

4. *način* — približno rješenje jednadžbe — vidi dalje, str.187 do 189.

Svojstva korijena kubne jednadžbe:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Jednadžba četvrtog stupnja. Normalni oblik:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Broj realnih rješenja (različitih): od 0 do 4.

Ako je $b = d = 0$, tada korijene (*bikvadratne*) jednadžbe $ax^4 + cx^2 + e = 0$ određujemo po formulama:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}, \qquad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}.$$

Ako je $a = e$ i $b = d$, tada korijene (recipročne) jednadžbe:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

određujemo po formulama:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \qquad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}.$$

Rješenje jednadžbe četvrtog stupnja u općem obliku. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijeve strane na faktore:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$;
korijeni jednadžbe: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, $x_4 = \delta$;

Primjer: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$;
$x(x^2-1)(x-2) = x(x-1)(x+1)(x-2)$;
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

2. *način.* Korijeni jednadžbe $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ se podudaraju s korijenima dviju kvadratnih jednadžbi:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

gdje je $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, a y bilo koji realan korijen kubne jednadžbe $8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)\,y + e\,(4c - b^2) - d^2 = 0$.

3. *način* — približno rješenje jednadžbe — vidi str. 187 do 189.

Jednadžbe petog stupnja i viših stupanja u općem slučaju ne možemo riješiti pomoću korijena.

8. JEDNADŽBE n-tog STUPNJA

Opća svojstva algebarskih jednadžbi. Lijevu stranu jednadžbe:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^n = 0^* \qquad (1)$$

označimo sa $P(x)$; korijen jednadžbe $P(x) = 0$ nazivamo *korijenom polinoma* $P(x)$. Ako je α korijen jednadžbe $P(x) = 0$, onda je $P(x)$ djeljiv sa $(x - \alpha)$ bez ostatka; u općem je slučaju ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $(x - \alpha)$ jednak $P(\alpha)$. Ako je $P(x)$ djeljiv sa $(x - \alpha)^k$, ali nije djeljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$, onda α nazivamo *k-strukim* korijenom jednadžbe $P(x) = 0$; u tom je slučaju α zajednički korijen polinoma $P(x)$ i njegovih derivacija do uključivo $(k - 1)$-te. Jednostruki korijen jednadžbe nazivamo također *prostim* korijenom. *Osnovni teorem algebre:* svaka jednadžba n-tog stupnja, kojoj su koeficijenti realni ili kompleksni brojevi, ima n realnih ili kompleksnih korijena, ako k-struki korijen računamo kao k korijena. Ako su korijeni od $P(x)$ jednaki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ s višestrukošću $k, l, m \ldots$, tada je:

$$P(x) = (x - \alpha)^k\,(x - \beta)^l\,(x - \gamma)^m \ldots \qquad (*)$$

Možemo pojednostavniti traženje korijena jednadžbe $P(x) = 0$ tako da tražimo korijene jednadžbe koja ima iste korijene kao dana jednadžba, ali sve jednostruke. To postižemo tako da rastavimo polinome $P(x)$ na dva faktora:

$$P(x) = Q(x)\,T(x),$$

gdje je $Q(x) = (x - \alpha)^{k-1}\,(x - \beta)^{l-1} \ldots$, $T(x) = (x - \alpha)\,(x - \beta) \ldots$; $Q(x)$ dobivamo kao najveću zajedničku mjeru (vidi str. 167) polinoma $P(x)$ i $P'(x)$ (derivacija), a $T(x)$ dijeljenjem $P(x)$ sa $Q(x)$.

Zavisnost među korijenima jednadžbe i njenim koeficijentima. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svih n korijena jednadžbe (1), tada je

* Koeficijent a_0 najvišeg člana uzmimo jednak 1 (jednadžbu dijelimo s tim koeficijentom).

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} x_ix_j = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i<j<k)}}^{n} x_ix_jx_k = -a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Jednadžba s realnim koeficijentima. Kompleksni korijeni jednadžbe s realnim koeficijentima mogu se pojaviti samo u parovima konjugirano kompleksnih*, tj. ako takva jednadžba ima korijen $\alpha = a + bi$, ona također ima i korijen $\beta = a - bi$, koji je iste višestrukosti. Produkt $(x - \alpha)\,(x - \beta)$ u tom slučaju daje:

$$(x - \alpha)\,(x - \beta) = x^2 + px + q, \qquad (1)$$

gdje je $p = -(\alpha + \beta) = -2a$, $q = \alpha\beta = a^2 + b^2$, odatle izlazi da je $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

Ako u formuli $(*)$ zamijenimo produkt svakog para takvih faktora po formuli (1), dobivamo rastav polinoma s realnim koeficijentima na realne faktore:

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}\,(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\,(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \ldots, \qquad (**)$$

u kojima su svi brojevi α_i, p_l, q_l realni i $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2 - q_i < 0$.

Broj korijena jednadžbe s realnim koeficijentima. Iz prethodnog izlazi da svaka jednadžba neparnog stupnja ima najmanje jedan realan korijen.

Broj realnih korijena jednadžbe $P(x) = 0$, što leže između bilo kojih brojeva a i b $(a < b)$ koji nisu korijeni zadane jednadžbe, možemo tačno ustanoviti na ovaj način:

1) Odvojimo višestruke korijene jednadžbe $P(x) = 0$, tj. odredimo jednadžbu koja ima iste korijene kao i zadana, ali proste**. U daljnjem ćemo sa $P(x)$ označavati jednadžbu bez višestrukih korijena.

* O konjugirano kompleksnim brojevima vidi na str 601.

** Način dobivanja takove jednadžbe pokazan je gore. Praktički možemo početi ne s odjeljivanjem višekratnih korijena, nego odmah traženjem Sturmove funkcije: ako P_m nije konstanta, $P(k)$ ima višestruke korijene koje moramo odijeliti.

2) Tvorimo red *Sturmovih funkcija:*

$$P(x),\quad P'(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_m = \text{const},$$

gdje je $P(x)$ lijeva strana zadane jednadžbe, $P'(x)$ derivacija, $P_1(x)$ ostatak diobe $P(x)$ sa $P'(x)$ uzet sa suprotnim predznakom, $P_2(x)$ ostatak diobe $P'(x)$ sa $P_1(x)$ uzet sa suprotnim predznakom itd., P_m je posljednji ostatak (= const)*.

3) Izračunajmo broj *A promjena predznaka* (tj. prelaza od »+« na »—« i obrnuto) u slogu brojeva:

$$P(a),\quad P'(a),\quad P_1(a),\quad P_2(a),\quad \ldots,\quad P_m$$

i broj B promjena predznaka u slogu brojeva:

$$P(b),\quad P'(b),\quad P_1(b),\quad P_2(b),\quad \ldots,\quad P_m\text{**}.$$

Razlika $A—B$ jednaka je traženom broju realnih korijena jednadžbe $P(k) = 0$ u intervalu $[a, b]$ (*Sturmov teorem*).

Primjer: Odredi broj korijena jednadžbe

$x^4 — 5x^2 + 8x — 8 = 0$, koji leže između 0 i 2!

Određivanje Sturmovih funkcija daje nam:

$$P(x) = x^4 — 5x^2 + 8x — 8;\quad P'(x) = 4x^3 — 10x + 8,$$
$$P_1(x) = 5x^2 — 12x + 16,\quad P_2(x) = —3x + 284;\quad P_3 = —1.$$

Supstitucija $x = 0$ daje slog brojeva: —8, +8, +16, +284, —1 (2 promjene); supstitucija $x = 2$ daje: +4, +20, +12, +278, —1 (1 promjena). $A — B = 2 — 1 = 1$. tj. između 0 i 2 ima 1 korijen.

Broj pozitivnih korijena jednadžbe $P(x) = 0$ nije veći od broja promjena predznaka u slogu koeficijenata polinoma $P(x)$ i od njega se može razlikovati za paran broj (*Descartesovo pravilo*).

Primjer: Jednadžba $x^4 + 2x^3 — x^2 + 5x — 1 = 0$. Poređaj koeficijenata te jednadžbe ima predznake: + + — + —, tj. predznak se mijenja tri puta. Po Descartesovom pravilu ta jednadžba ima tri, ili jedan pozitivan korijen. Kako pri zamjeni x u $—x$ korijeni jednadžbe mijenjaju predznake, a pri zamjeni x u $x + h$ se umanjuju za h, pomoću Descartesova pravila možemo ocijeniti i broj negativnih korijena, a također i broj korijena većih od h. U našem primjeru zamjena x u $—x$ daje $x^4 — 2x^3 — x^2 — 5x — 1 = 0$, tj. jednadžba ima jedan negativni korijen. Zamjena x u $x + 1$ daje $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$, tj. svi pozitivni korijeni naše jednadžbe (1 ili 3) manji su od jedinice.

* Da bismo pojednostavnili računanja, dobivene ostatke pomnožimo s konstantnim pozitivnim faktorima, što ne mijenja rezultate.

** Ako je neki od tih brojeva jednak nuli, onda ga pri računanju promjena predznaka preskočimo.

Rješenje jednadžbe n**-tog stupnja,** ako je $n > 4$, u općem slučaju možemo naći samo približno; približne metode praktički primjenjujemo i pri rješavanju jednadžbe 3-ćeg i naročito 4-tog stupnja. Za približno istovremeno određivanje svih korijena algebarske jednadžbe n-tog stupnja (uključujući i kompleksne) možemo primijeniti *metodu Lobačevskog*. Za računanje odvojenih realnih korijena algebarske jednadžbe možemo s uspjehom primijeniti opće metode za približno rješavanje transcendentnih jednadžbi (vidi dalje, str. 185 do 187).

9. TRANSCENDENTNE JEDNADŽBE

Definicija. Jednadžbu $F(x) = f(x)$ nazivamo *transcendentnom,* ako bar jedna od funkcija $F(x)$ ili $f(x)$ nije algebarska.

Primjeri:

1) $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$
2) $2^{x-1} = 8^{x-2} — 4^{x-2}$,
3) $2 \lg_5 (3x — 1) — \lg_5 (12x + 1) = 0$,
4) $\sin x = \cos^2 x — \frac{1}{4}$,
5) $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$,
6) $x \cos x = \sin x$.

U nekim slučajevima rješavanje transcendentnih jednadžbi svodimo na algebarske jednadžbe, uz upotrebu tablica. Općenito transcendentne jednadžbe možemo riješiti samo približno.

Neki slučajevi transcendentnih jednadžbi koje svodimo na algebarske.

Eksponencijalne jednadžbe. Nepoznanice x ili $P(x)$ (polinom) nalaze se samo u eksponentima potencija nekih baza $a, b, c\ldots$ Takve jednadžbe svodimo na algebarske u ovim slučajevima:

1) Ako potencije $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... ne zbrajamo niti oduzimamo, jednadžbu moramo logaritmirati s obzirom na bilo koju bazu.

Primjer: $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $\quad x \log 3 = (x — 2) \log 4 + x \log 2$;

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 — \log 3 + \log 2}.$$

2) Ako su $a, b, c\ldots$ cijele ili razlomljene potencije jednog istog broja k ($a = k^\alpha$, $b = k^\beta$, $c = k^\gamma, \ldots$) tada, uz pretpostavku da je $y = k^x$, dobivamo u nekim slučajevima algebarsku jednadžbu s obzirom na y; kada tu jednadžbu riješimo dobivamo x iz tablica: $x = \frac{\lg y}{\lg k}$.

Primjer: $2^{x-1} = 8^{x-2} — 4^{x-2}$; $\quad \frac{2^x}{2} = \frac{2^{3x}}{64} — \frac{2^{2x}}{16}$; uz pretpostavku da je $2^x = y$, dobivamo $y^3 — 4y^2 — 32y = 0$ i $y_1 = 8$,

$y_2 = -4$, $y_3 = 0$; $2^{x_1} = 8$, $2^{x_2} = -4$, $2^{x_3} = 0$, odakle je $x_1 = 3$; druga realna rješenja ne postoje.

Logaritamske jednadžbe. Nepoznanica x ili $P(x)$ (polinom) nalazi se samo pod znakom logaritma. Takve jednadžbe svodimo na algebarske u ovim slučajevima:

1) Ako se u jednadžbi pojavljuje logaritam jednog te istog izraza; u tom slučaju uzmemo logaritam kao novu nepoznanicu, riješimo dobivenu algebarsku jednadžbu i potenciramo dobiveno rješenje.

Primjer: $m[\log_a P(x)]^2 + n = a\sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. Zamjena $\log_a P(x)$ s y daje jednadžbu $my^2 + n = a\sqrt{y^2 + b}$; iz nje izračunamo y i dobijemo jednadžbu za izračunavanje x: $P(x) = a^y$.

2) Ako se u jednadžbi pojavljuje linearna kombinacija (s cijelim koeficijentima) logaritama s istom bazom izraza, koji su polinomi od x:

$$m\log_a P_1(x) + n\log_a P_2(x) + \ldots = 0.$$

U tom slučaju izraze u oba dijela jednadžba svedemo (svaki) na logaritam jednog izraza; dobivenu jednadžbu potenciramo.

Primjer: $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, $\log_5 \frac{(3x-1)^2}{12x+1} = \log_5 1$; $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; ako rješenje $x_1 = 0$ uvrstimo u zadanu jednadžbu, dobivamo logaritam negativnog broja (imaginaran) i zato to rješenje ne uzimamo u obzir.

Trigonometrijske jednadžbe (koje se svode na algebarske). Nepoznanica x ili $nx + a$ (n je cio broj) samo je pod znakom trigonometrijske funkcije. Tada pomoću trigonometrijskih formula svedemo taj izraz na samo jednu funkciju od x; zamjenom te funkcije sa y dobijemo algebarsku jednadžbu. Kada je riješimo, x odredimo iz tablica; pri tome treba imati u vidu mnogoznačnost rješenja.

Primjer: $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$; ili druga mogućnost $\sin x = 1 - \sin^2 x - \frac{1}{4}$; stavimo da je $\sin x = y$, pa dobivamo $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$ i $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Rješenje y_2 ne daje realno rješenje zadane jednadžbe ($|\sin x| \leqslant 1$); $y_1 = \frac{1}{2}$ daje $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k je cio broj).

Hiperbolne jednadžbe*. Nepoznanica x nalazi se samo pod znakom hiperbolnih funkcija. Izraz hiperbolne funkcije zamijenimo

* Taj naziv nije uobičajen.

sa eksponencijalnim, stavimo $e^x = y$, $e^{-x} = 1/y$, i svedimo jednadžbu na algebarsku u odnosu na y; $x = \ln y$ odredimo iz tablica.

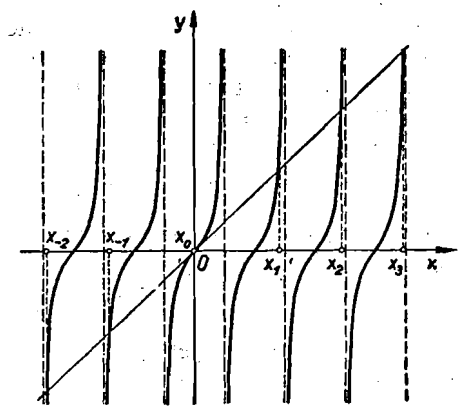
Primjer: $3\,\mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$;

$e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$;

$x_1 = \ln\frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 2{,}1716$, $x_2 = \ln\frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1{,}4784$.

Približno rješavanje jednadžbi. Ovdje prikazani način približnog rješavanja jednadžbi primjenjujemo kako za algebarske, tako i za transcendentne jednadžbe. Proces određivanja korijena rastavlja se u dva dijela: 1) grubo nalaženje približnih vrijednosti korijena i 2) točnije određivanje tih vrijednosti.

Gruba ocjena korijena. Ako je $f(x)$ neprekinuta funkcija*, i ako $f(a)$ i $f(b)$ imaju različite predznake, tada između a i b leži bar jedan korijen jednadžbe $f(x) = 0$. Odaberemo li različite vrijednosti za a i b, uvijek možemo dobiti dovoljno uzak interval u kojem će ležati samo jedan korijen razmatrane jednadžbe. *Grafičku metodu* primjenjujemo onda kad jednadžbu možemo dovesti u oblik $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ pa graf funkcije $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ možemo lako konstruirati. Tada su korijeni jednadžbe jednaki apscisama presjecišta krivulja $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$.



Sl. 74

Primjer. Korijeni jednadžbe $x\cos x = \sin x$ (pored očiglednog korijena $x = 0$) su blizu brojeva $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (gdje je $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Jednadžbu možemo napisati u obliku $x = \mathrm{tg}\,x$ i njeni korijeni odgovaraju presječnicama pravca $x = y$ i tangentoide $y = \mathrm{tg}\,x$ (sl. 74).

Metode točnijeg određivanja grubih približnih vrijednosti. 1) *Newtonova metoda.* Ako je x_0 približna vrijednost

* Vidi str. 345 i 346.

korijena jednadžbe $f(x) = 0$, onda kao točniju približnu vrijednost izabiremo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

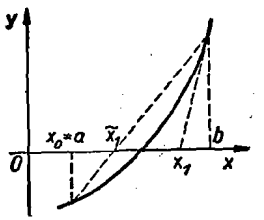
Zamjenom x_0 sa x_1 možemo dobiti iduću približnu vrijednost x_2 itd. Proces uzastopnih približnih vrijednosti uvijek konvergira ako korijen α nije višestruk (tj. $f'(\alpha) \neq 0$) i ako smo prvu približnu vrijednost uzeli dovoljno blizu. Prema tome korijen možemo naći sa željenom tačnošću. *Primjer:* vidi dolje.

2) *Linearna interpolacija* (regula falsi). Ako je korijen α jednadžbe $f(x) = 0$ zatvoren između a i b, onda kao približnu vrijednost možemo uzeti veličinu:

$$\tilde{x}_1 = a - f(a)\frac{a-b}{f(b)-f(a)}.$$

Ako $f''(x)$ u intervalu između a i b ne mijenja predznak, onda će približne vrijednosti dobivene tom metodom i Newtonovom metodom biti raspoređene na razne strane od korijena [za x_0 po Newtonovoj metodi moramo uzeti onu vrijednost (od a i b) za koju je $f(x) \cdot f''(x_0) > 0$]. Zbog toga uporedna primjena obiju metoda omogućava ocjenjivanje postignute točnosti.

Geometrijski, Newtonova metoda znači zamjenu grafa funkcije $f(k)$ s tangentom u točki x_0, a metoda linearne interpolacije s tetivom koja spaja točke $[a, f(a)]$ i $[b, f(b)]$ (sl. 75). *Primjer:* vidi niže.



Sl. 75

3) *Metoda iteracije.* Razmatranu jednadžbu stavimo u oblik $x = \varphi(x)$ i nađemo točnije vrijednosti korijena x_1 iz prve približne vrijednosti x_0 pomoću formule $x_1 = \varphi(x_0)$. Ponavljamo li (»iteriramo«) taj proces nekoliko puta dobit ćemo vrijednost korijena sa željenom točnošću, ako je u intervalu između korijena jednadžbe i prvog približenja $|\varphi'(x)| < 1$. Kada taj uvjet nije ispunjen, jednadžbu moramo preinačiti (možda prelazom na inverznu funkciju). *Na primjer:* na jednadžbu $x = \operatorname{tg} x$ ne možemo primijeniti metodu iteracije, ali je možemo primijeniti na jednadžbu $x = \operatorname{arc\,tg} x$.

Ako je $\varphi'(x) < 0$, tada će od dviju susjednih približnih vrijednosti korijena, dobivene iteracijom, biti jedna veća, a druga manja od korijena, što omogućava ocjenjivanje postignute točnosti.

Primjer: Nađi najmanji pozitivni korijen jednadžbe $\sin x - x\cos x = 0$. Zamjenom te jednadžbe s njoj ekvivalentnom $x = \operatorname{tg} x$ dobivamo grafički (vidi str. 187) da je traženi korijen približno $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ldots$ Točniju vrijednost naći ćemo postupno približenjima:

a) Newtonovom metodom i linearnom interpolacijom. Za funkciju $f(x) = \sin x - x\cos x$ imamo $f'(x) = x\sin x$. Ako uzmemo da je $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, dobivamo da je $f(x_0) = -1, f'(x_0) = -4{,}71$ i $x_1 = 4{,}71 - \frac{1}{4{,}71} = 4{,}50$.

Kako je $f(x_1) = -0{,}029$ istog predznaka kao i $f(x_0)$, linearnu interpolaciju ne možemo primijeniti. Račun pokazuje da je $f(4{,}45) = 0{,}189$ i traženi korijen prema tome leži između 4,45 i 4,50. Primjenom linearne interpolacije dobivamo ovo približenje:

$$\tilde{x}_1 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-0{,}029-0{,}189}(4{,}50-4{,}45) = 4{,}4930.$$

Računanje približenja za x_1 po Newtonovoj metodi [predznak $f''(x_1)$ podudara se s predznakom $f(x_1)$] daje:

$$x_2 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-4{,}399} = 4{,}4934.$$

Kako približenja po Newtonovoj metodi i metodi linearne interpolacije leže na raznim stranama korijena, pogreška x_2 ne prelazi 0,0004.

b) Metodom iteracije: jednadžba $x = \operatorname{tg} x$ neprikladna je za iteraciju jer je $(\operatorname{tg} x)' > 1$; prelazom na inverznu funkciju dobivamo jednadžbu $x = \operatorname{Arc\,tg} x$ koju možemo iterirati. Uzmemo li da je $x_1 = \operatorname{Arc\,tg} x_0 = 258° = 4{,}503$; $x_2 = \operatorname{Arc\,tg} x_1 = 257°29' = 4{,}4942$ $x_3 = \operatorname{Arc\,tg} x_2 = 257°27{,}3' = 3{,}4934$; $x_4 = \operatorname{Arc\,tg} x_3 = 257°27{,}2' = 4{,}4934$. Očigledno je da su u x_4 sve znamenke točne.

10. DETERMINANTE

Definicija. *Determinantom* n-tog reda nazivamo broj D, određen iz n^2 brojeva a_{ij} (*elemenata*) raspoređenih u kvadratnu tablicu od n redova i n stupaca na ovaj način*:

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^k a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{n\omega},$$

* Prvi indeks i elementa a_{ij} determinante pokazuje da je element uzet iz i-tog retka determinante; drugi indeks j, da je element uzet iz j-tog stupca (i je broj retka računajući odozgo; j je broj stupca računajući slijeva).

gdje $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ prolaze svih $n!$ mogućih permutacija* brojeva $1, 2, \ldots, n$; predznak »+« ili »—« ispred svakog *člana* determinante (tj. svakog sumanda) određujemo brojem *k inverzija* (»nereda«) u svakoj permutaciji. Na primjer član $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{42}$ u determinanti 4-tog reda ima predznak »minus«, jer *razmještaj* $3, 1, 4, 2$ drugih indeksa ima tri inverzije, označene lukovima.

Minorom elementa a_{ij} nazivamo determinantu $(n-1)$-vog reda, dobivenu iz zadane determinante precrtavanjem i-tog retka i j-tog stupca. *Adjunktom* A_{ij} elementa a_{ij} nazivamo njegov minor s predznakom »plus« ili »minus« po formuli:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Linearnom kombinacijom nekoliko redaka (stupaca) determinante nazivamo redak (stupac) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ kojem su elementi linearne kombinacije pripadajućih elemenata tih redaka (stupaca); npr. linearna kombinacija $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, a_n$ elemenata i-tog, j-tog i k-tog retka determinante tvori se ovako:

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= \alpha a_{i1} + \beta a_{j1} + \gamma a_{k1}, \\ \overline{a_2} &= \alpha a_{i2} + \beta a_{j2} + \gamma a_{k2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{a_n} &= \alpha a_{in} + \beta a_{jn} + \gamma a_{kn}; \end{aligned}$$

brojevi α, β, γ su *koeficijenti* linearne kombinacije.

Svojstva determinanata:

1) Determinanta ne mijenja vrijednost ako njene retke zamijenimo stupcima, ili obrnuto (stoga sva dalje navedena svojstva za retke vrijede i za njene stupce).

2) Determinanta je jednaka nuli ako su *elementi* dvaju njenih redaka *jednaki* ili *proporcionalni* ili je jedan redak *linearna kombinacija* nekih drugih redaka.

* O permutacijama vidi na str. 209.

3) *Faktor*, zajednički svim elementima nekog retka, možemo staviti ispred determinante.

4) Treba li *zbrojiti* determinante koje se razlikuju samo u elementima nekog (i-tog) retka, njihova suma jednaka je takvoj determinanti kojoj su elementi i-tog retka sume pripadnih elemenata i-tih redaka determinanata, a ostali elementi isti kao i u sumandima.

5) Dodamo (oduzmemo) li nekom retku elemente drugog retka ili linearnu kombinaciju drugih redaka, *ne mijenjamo* vrijednost determinante.

6) Determinantu možemo razviti po elementima *nekog* (i-tog) *retka* po formuli $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, gdje su A_{ij} adjunkti pripadnih elemenata.

7) Suma produkata svih elemenata a_{ik} nekog (i-tog) retka determinante s adjunktima A_{jk} pripadnih elemenata *drugog* (j-tog) retka jednaka je nuli: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$.

Izračunavanje determinanata:

2. *reda* po formuli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12} - a_{21};$$

3. *reda po Sarrusovom pravilu* (pripišemo prva dva stupca):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33};$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

n-tog reda: svedemo na $(n-1)$-vi red po svojstvu 6; prethodno pomoću ostalih svojstava preradimo determinantu tako da što veći broj elemenata postane jednak nuli.

Primjer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(svojstvo 5) (svojstvo 3)

$$= 3\left\{-5\begin{vmatrix}2 & 4 & 8\\ 4 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix} + 0\right\} =$$

(svojstvo 6)

$$= 0 - 21\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix} = -21\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix} =$$

(svojstvo 2) (svojstvo 5)

$$= -21\left\{\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4 & -5\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right\} = -21\ \{(4+10) - (16+5)\} =$$

(svojstvo 6) $= +147.$

11. RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNADŽBI

Slučaj kada je broj nepoznanica jednak broju jednadžbi. *Normalni sistem*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Oznaka: $D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}\\ \ldots\ldots\\ a_{n1} \ldots a_{nn}\end{vmatrix}$ (*determinanta sistema*), D_1 je determinanta koju dobijemo iz D zamjenom stupca sastavljenog od koeficijenata a_{kl} nepoznanice x_j, sa stupcem sastavljenim od slobodnih članova b_k; npr.:

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \ldots a_{1n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ b_n\ a_{n2} \ldots a_{nn}\end{vmatrix}$. Sistem $(*)$ nazivamo *homogenim* ako su svi $b_k = 0$ (a znači i svi $D_j = 0$), a *nehomogenim*, ako je barem jedan b_k različit od nule.

Rješenje sistema $(*)$. Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, sistem $(*)$ je *određen*; on ima jedno rješenje: korijeni se x_j izražavaju po *Cramerovom pravilu:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ako je $D = 0$ i nisu svi $D_j = 0$, tada je sistem $(*)$ *nesnošljiv* (inkompatibilan): sistem nema ni jednog rješenja (za homogeni sistem ne može nastupiti takav slučaj).

Slučaj kada je $D = 0$ i svi $D_j = 0$ razmatran je niže (vidi opći slučaj, primjer 4, na str. 197 i primjer 2, na str. 199).

Primjeri:

1) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9,\\ x - 2y + z &= -2,\\ 3x + 2y + 2z &= 7; \end{aligned}$

$$D = \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix} = 13, \qquad D_x = \begin{vmatrix}9 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 1\\ 7 & 2 & 2\end{vmatrix} = -13,$$

$$D_y = \begin{vmatrix}2 & 9 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{vmatrix} = 26, \qquad D_z = \begin{vmatrix}2 & 1 & 9\\ 1 & -2 & -2\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix} = 39,$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

[sistem je određen, nehomogen].

2) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1,\\ x - y + z &= 2,\\ 3x + 2y &= 5; \end{aligned}$

$$D = \begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix} = 0, \qquad D_x = \begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix} = 4$$

[sistem je nesnošljiv].

Matrica i njen rang. Sistem mn brojeva, raspoređenih u pravokutnoj tablici od m redaka i n stupaca, nazivamo *matricom.*

$$\text{Oznaka: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Minorom k-tog reda matrice A ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$) nazivamo determinantu D dobivenu (s održanjem reda) iz k^2 elemenata matrice, koji leže na presječnici nekih njenih k stupaca i k redaka (vidi shemu).

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \qquad D = \begin{vmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{vmatrix}$$

(minor trećeg reda)

Rangom matrice A nazivamo najveći red koji mogu imati njeni minori, a da nisu jednaki nuli. Da bismo odredili rang matrice, moramo razmotriti sve njene minore reda l (gdje je l najmanji između brojeva m, n ako je $m \neq n$ ili $l = m = n$); ako je makar jedan od njih $\neq 0$, tada je rang A jednak l; ako su svi oni $= 0$, onda treba razmotriti sve minore reda $l - 1$ itd. Praktički je korisno postupati obrnuto: prelaziti od minora nižeg reda na minor višeg reda, koristeći se ovim pravilom: Ako smo našli minor k-tog reda D_k, različit od nule, tada nam preostaje da izračunamo samo one minore $(k+1)$-vog reda koji »obrubljuju« D_k, npr.:

$$|\,\overset{\cdot\cdot}{D_k}\,|,\quad |\,\overset{\cdot\cdot}{D_k}\,|,\quad |\,\overset{\cdot\cdot}{D_k}\,|,\quad |\,\overset{\cdot\cdot}{D_k}\,|.$$

Ako su svi takvi minori $(k+1)$-vog reda jednaki nuli, rang matrice je k.

Primjer: odredimo rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Minor drugog reda je u gornjem lijevom uglu $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Ali minor drugog reda u matrici A nije jednak nuli: $D'_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Obrubimo ga slijeva i ispod:

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Kada obrubimo D_3 (to možemo načiniti samo na dva načina), dobijemo:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad D'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Prema tome je rang $A = 3$.

Opći slučaj sistema linearnih jednadžbi.

Nehomogene jednadžbe. Sistem nehomogenih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

nazivamo rješivim ako postoji barem jedno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$*, koje pretvara sve jednadžbe $(**)$ u identitet, i *nerješivim* ako ne

* U daljem tekstu ćemo u vitičastim zagradama pisati rješenja $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

postoji niti jedno takvo rješenje. *Obilježje rješivosti:* sistem $(**)$ je rješiv onda i samo onda, ako je rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jednak rangu »povećane« matrice:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Rješiv sistem jednadžbi nazivamo *određenim* ako ima jedno rješenje, i *neodređenim* ako ima beskonačno mnogo rješenja.

Rješiv sistem jednadžbi $(**)$ rješavamo na ovaj način. Odredimo rang r matrice A, i preinačimo jednadžbe $(**)$, a također i njihove nepoznanice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako, da minor matrice A različit od nule, reda r, postavimo u gornji lijevi ugao matrice (ta preinaka nije potrebna ako je minor matrice reda r u lijevom gornjem uglu različit od nule).

Pri tome su moguća dva slučaja:

1) $r = n$, $r \leqslant m$. Rješenjem sistema prvih n jednadžbi sa n nepoznanica dobivamo jednoznačno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, jer je determinanta tog sistema $\neq 0$ (vidi str. 192). Ako je $n < m$, tada to isto rješenje zadovoljava i ostalih $m - n$ jednadžbi, koje su proizašle iz prvih. Zadani sistem $(**)$ je određen.

2) $r < n$, $r \leqslant m$. Rješavamo sistem prvih r jednadžbi s prvih r nepoznanica $x_1, x_2, \ldots x_r$ izrazivši te nepoznanice pomoću ostalih $n - r$ nepoznanica $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Dobivamo jednoznačno rješenje u obliku linearnih funkcija:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

jer je determinanta sistema jednadžbi $\neq 0$. Nepoznanicama $x_{r+1}, \ldots x_n$ možemo davati vrijednosti po volji; tada nepoznanice $x_1, \ldots, x_r$ određujemo po formulama (1). Ta rješenja zadovoljavaju i ostalih $m - r$ jednadžbi (ako je $r < m$), koje su posljedica prvih. Zadani sistem $(**)$ je neodređen.

Primjeri:

1) $$\begin{aligned} x-2y+3z-u+2v &= 2,\\ 3x-y+5z-3u-v &= 6,\\ 2x+y+2z-2u-3v &= 8. \end{aligned}$$

Rang matrice A je 2, rang matrice B je 3. Sistem je nesnošljiv, rješenja nema.

2) $$\begin{aligned} x-y+2z &= 1,\\ x-2y-z &= 2,\\ 3x-y+5z &= 3,\\ -2x+2y+3z &= -4. \end{aligned}$$

Rangovi matrica A i B su 3; sistem je snošljiv. Matrica lijevog gornjeg ugla je trećeg reda: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$; preinačivanje nije potrebno. $r = n$; sistem je određen. Rješavamo sistem prvih triju jednadžbi: $x = \frac{10}{7}$; $y = -\frac{1}{7}$; $z = -\frac{2}{7}$; to rješenje zadovoljava i četvrtu jednadžbu.

3) $$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1,\\ x-y-z+u &= 0,\\ x-y-2z+2u &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rangovi matrica A i B su 2; sistem je snošljiv. $r < n$; sistem je neodređen. Matrica gornjeg lijevog ugla je drugog reda: $D = 0$; premjestimo stupac sa x na četvrto mjesto:

$$\begin{aligned} -y+z-u+x &= 1,\\ -y-z+u+x &= 0,\\ -y-2z+2u+x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Riješimo sistem prvih dviju jednadžbi s nepoznanicama y i z:

$$\begin{aligned} -y+z &= 1-x+u,\\ -y-z &= -x-u. \end{aligned}$$

Rješenja $y = x-\frac{1}{2}$, $z = u+\frac{1}{2}$ zadovoljavaju sve jednadžbe za bilo koje vrijednosti x i u.

4) $$\begin{aligned} x+2y-z+u &= 1,\\ 2x-y+2z+2u &= 2,\\ 3x+y+z+3u &= 3,\\ x-3y+3z+u &= 0. \end{aligned}$$

U tom slučaju je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, $D = 0$, a također i $D_x = D_y = D_z = D_u = 0$. Rang matrice A je 2, rang matrice B je 3. Sistem je nesnošljiv, rješenja nema.

Homogene jednadžbe. Sistem homogenih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

uvijek ima *trivijalno rješenje* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ako sistem ima netrivijalno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$*, tada on ima i beskonačno mnogo rješenja oblika $\{k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n\}$, gdje je k bilo koji broj. Ako sistem (***) ima p netrivijalnih rješenja:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\},\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}, \ldots, \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}, \qquad (1)$$

onda on ima i beskonačno mnogo rješenja oblika:

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\beta_1 + \ldots + k_p\mu_1,\quad k_1\alpha_2 + k_2\beta_2 + \ldots + k_p\mu_2,\ \ldots,\ k_1\alpha_n + k_2\beta_n + \ldots + k_p\mu_n\}, \qquad (2)$$

gdje su $k_1, k_2, \ldots, k_p$ brojevi po volji (a nisu svi jednaki nuli). Rješenje (2) nazivamo *linearnom kombinacijom* rješenja (1).

Rješenja (1) sistema jednadžbi (***) nazivamo *linearno nezavisnim*, ako ni jedno od njih nije linearna kombinacija ostalih; p linearno nezavisnih rješenja čini *fundamentalan sistem rješenja*, ako je bilo koje rješenje sistema jednadžbi (***) linearna kombinacija tih p rješenja**.

Ako je rang r matrice A koeficijenata jednadžbi (***) manji od broja n nepoznanica, tada jednadžbe (***) imadu fundamentalan sistem rješenja; ako je $r = n$, nema fundamentalnog sistema i jednadžbe imaju samo trivijalno rješenje. Za $r < n$ fundamentalni sistem sastoji se od $n - r$ linearno nezavisnih rješenja. Da nađemo fundamentalni sistem poređamo u sistemu (***) jednadžbe i nepoznanice tako, da u gornjem lijevom uglu matrice A bude minor r-tog reda, koji nije jednak nuli. (Ponekad je za to potrebno preinačiti jednadžbe i nepoznanice; vidi primjere). Zatim riješimo sistem

* Vidi napomenu na str. 194.

** Fundamentalnih sistema može biti beskonačno mnogo (vidi dalje).

(***) po prvih r nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_r$, izrazivši ih pomoću ostalih nepoznanica.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n),\\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nepoznanicama $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ možemo dati bilo koje vrijednosti i one zajedno s pripadnim vrijednostima $x_1, x_2, \ldots, x_r$, određenim po formulama (3), tvore jedno od rješenja sistema jednadžbi (***). Izaberemo li te vrijednosti $n-r$ puta:

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	$b_{1,n-r}$
2)	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	$b_{2,n-r}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-r$)	$b_{n-r,1}$	$b_{n-r,2}$	$\ldots$	$b_{n-r,n-r}$

tako da determinanta $B = |b_{ik}|$ nije jednaka nuli, dobivamo jedan od fundamentalnih sistema rješenja jednadžbi (***). Posebno možemo pretpostaviti da je $b_{ik} = 1$ pri $i = k$ i $b_{ik} = 0$ pri $i \neq k$; tada je $B = 1$, pa rješenja:

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	1	0	$\ldots$	0
2)	0	1	$\ldots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-r$)	0	0	$\ldots$	1

zajedno sa (3) određuju na najjednostavniji način fundamentalni sistem rješenja jednadžbi (***).

Primjeri: Naći fundamentalne sisteme rješenja jednadžbi:

1) $$\begin{aligned} x - y + 5z - u &= 0,\\ x + y - 2z + 3u &= 0,\\ 3x - y + 8z + u &= 0,\\ x + 3y - 9z + 7u &= 0. \end{aligned}$$

Rang matrice A je 2; determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; permutiranje nije potrebno. Riješimo sistem s obzirom na nepoznanice x i y. Stavimo $z = 1$, $u = 0$ pa dobivamo prvo fundamentalno rješenje:

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = 1, \quad u = 0 \quad \text{ili} \quad \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0\right\}.$$

Uz pretpostavku da je $z = 0$ i $u = 1$, dobivamo drugo fundamentalno rješenje:

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = 0, \quad u = 1 \quad \text{ili} \quad \{-1, -2, 0, 1\}.$$

Prema tome, svako rješenje zadanog sistema možemo predočiti u obliku: $\left\{-\frac{3}{2}k_1 - k_2, \ \frac{7}{2}k_1 - 2k_2, \ k_1, \ k_2\right\}$.

2) $$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0,\\ x - y + z &= 0,\\ 3x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Rang matrice A je 2; determinanta $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, permutiranje nije potrebno.

Riješimo sistem s obzirom na x i y. Stavimo da je $z = 1$, pa dobivamo jedino linearno nezavisno fundamentalno rješenje: $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$. Prema tome svako rješenje zadanog sistema možemo predočiti u obliku

$$x = -\frac{2}{5}k, \quad y = \frac{3}{5}k, \quad z = k \quad \text{ili} \quad x = -2k, \quad y = 3k, \quad z = 5k.$$

12. SISTEMI JEDNADŽBI VIŠEGA STUPNJA

Uvjeti za nezavisnost jednadžbi. Dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi(x, y) = 0$$

bit će nezavisne, ako njihova jakobijana (vidi str. 355).

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ne iščezava identički; u protivnom slučaju jedna jednadžba je posljedica druge, i one imaju beskonačno mnogo rješenja.

Za tri jednadžbe sa tri nepoznanice analogni su uvjeti nezavisnosti.

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0$$

itd.

Ti uvjeti vrijede i za sisteme algebarskih i za sisteme transcendentnih jednadžbi.

Broj rješenja sistema dviju algebarskih jednadžbi $P_1(x, y) = 0$ i $P_2(x, y) = 0$. Ako je P_1 polinom m-tog stupnja, a P_2 n-tog stupnja s obzirom na x i y*, sistem ima $m \cdot n$ realnih ili kompleksnih parova rješenja. Sistem od tri jednadžbe m-tog, n-tog i p-tog stupnja ima $m \cdot n \cdot p$ trojki rješenja itd.

Određivanje rješenja sistema dviju algebarskih jednadžbi u općem slučaju svodimo na rješenje jednadžbe $m \cdot n$-tog stupnja — *resolvente* sistema — s jednom od nepoznanica (npr. x) pomoću eliminacije druge nepoznanice (y) iz sistema; dobivene korijene resolvente uvrstimo u jednu od jednadžbi sistema da bismo izračunali drugu nepoznanicu. Najjednostavnije možemo riješiti sistem jednadžbi od kojih je jedna linearna, a druga n-tog stupnja; riješimo linearnu jednadžbu po y i rješenje uvrstimo u drugu jednadžbu pa dobivamo resolventu n-tog stupnja u odnosu na x. U slučaju dviju jednadžbi drugog stupnja dobivamo resolventu četvrtog stupnja; ponekad takav sistem možemo riješiti *posebnim doskočicama.*

Primjer: $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Dobijemo $(x + y)^2 = a + 2b$; $(x - y)^2 = a - 2b$; $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$, $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$. odakle nalazimo 4 para vrijednosti x i y.

Grafička metoda rješavanja sistema dviju jednadžbi svodi se na traženje točaka sjecišta krivulja koje imaju jednadžbe $f(x, y) = 0$ i $\varphi(x, y) = 0$.

C. DOPUNSKE GLAVE ALGEBRE

13. NEJEDNADŽBE

Definicije: *Nejednadžbom* nazivamo povezanost dvaju brojevnih ili slovnih izraza pomoću jednog od ovih znakova:

1) $>$ (»veće«)
2) $<$ (»manje«)
3) $\neq$ (»nejednako«)
3a) $\gtrless$ (»veće ili manje«)
4) $\geqslant$ (»veće ili jednako«)
4a) $\not<$ (»ne manje«)
5) $\leqslant$ (»manje ili jednako«)
5a) $\not>$ (»ne veće«)

* Stupanj polinoma dviju varijabli najveća je suma stupanja x i y u njegovim članovima. Npr. polinom $x^3 + x^2y^2 + y^3$ četvrtog je stupnja.

Znakovi 3) i 3a), 4) i 4a), 5) i 5a) imaju isto značenje i mogu se međusobno zamijeniti*.

Nejednadžbe tipova 1), 2) i 3) nazivamo *striktnim*, nejednadžbe tipova 4) i 5) nestriktnim.

Nejednadžbu nazivamo *identičnom*, ako je ona točna za sve vrijednosti koje uvrštavamo za opće brojeve. Točnu nejednadžbu, sastavljenu samo od brojeva, također nazivamo identičnom.

Kao i jednadžbe, i nejednadžbe mogu sadržavati nepoznanice (one se obično označavaju posljednjim slovima abecede). *Riješiti nejednadžbu* (ili sistem nejednadžbi) znači odrediti granice za vrijednosti nepoznanica, u kojima će nejednadžba (ili sve nejednadžbe u sistemu) biti točna. Riješiti možemo nejednadžbe tipova 1) do 5); najčešće rješavamo čiste nejednadžbe tipova 1) i 2). Ako dvije nejednadžbe pripadaju obje tipu 1) ili obje tipu 2), nazivamo ih *nejednadžbama istoga smisla*; ako jedna jednadžba pripada tipu 1), a druga tipu 2), nazivamo ih *nejednadžbama suprotnog smisla.* Dvije nejednadžbe koje imaju iste nepoznanice nazivamo *ekvivalentnim*, ako su one točne za jedne te iste vrijednosti nepoznanica.

Osnovna svojstva nejednadžbi tipova 1) i 2).

1) *Promjena znaka nejednakosti.* Ako je $a > b$, tada je $b < a$; ako je $a < b$, onda je $b > a$.

2) *Svojstva tranzitivnosti.* Ako je $a > b$ i $b > c$, onda je $a > c$; ako je $a < b$, $b < c$, tada je $a < c$.

3) *Zbrajanje i oduzimanje nejednadžbe i neke veličine.* Ako je $a > b$, tada je $a \pm c > b \pm c$, ako je $a < b$, tada je $a \pm c < b \pm c$: dodavanjem jedne te iste veličine na obje strane nejednadžbe njen smisao se ne mijenja.

4) *Zbrajanje nejednadžbi.* Ako je $a > b$, $c > d$, tada je $a + c > b + d$; ako je $a < b$, $c < d$, tada je $a + c < b + d$: dvije nejednadžbe istog smisla zbrajamo tako da zbrojimo desne strane i zbrojimo lijeve strane.

5) *Oduzimanje nejednadžbi.* Ako je $a > b$, $c < d$, tada je $a - c > b - d$; ako je $a < b$, $c > d$, tada je $a - c < b - d$; od nejednadžbe oduzimamo drugu nejednadžbu da od lijeve strane prve nejednadžbe oduzmemo lijevu stranu druge nejednadžbe, a od desne desnu, a rezultatu damo znak nejednakosti prve nejednadžbe. (Nejednadžbe istog smisla ne možemo oduzimati!).

6) *Množenje i dijeljenje nejednadžbi.*

$$\text{Ako je } a > b \text{ i } c > 0, \text{ tada je } ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c},$$

* Ako se znak 3) odnosi na takve vrijednosti za koje pojam »veće« i »manje« nije definiran, npr. za kompleksne brojeve (str. 600) ili vektore (str. 627), onda taj znak ne možemo zamijeniti znakom 3a). Čitav ovaj paragraf odnosi se samo na realne brojeve.

ako je $a < b$ i $c > 0$, tada je $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

ako je $a > b$ i $c < 0$, tada je $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

ako je $a < b$ i $c < 0$, tada je $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(ako oba dijela nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo s istim pozitivnim brojem, dobivamo nejednadžbu istog smisla: ako oba dijela nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo s istim negativnim brojem, dobivamo nejednadžbu suprotnog smisla).

Nekoliko važnijih nejednadžbi.

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,
$|a+b+\ldots+k| \leqslant |a| + |b| + \ldots + |k|$
(apsolutna vrijednost sume dvaju ili nekoliko brojeva manja je ili jednaka sumi apsolutnih vrijednosti tih brojeva).

Jednakost vrijedi samo tada, kada su svi brojevi istog predznaka.

2) $|a| + |b| \geqslant |a-b| \geqslant |a| - |b|$
(apsolutna vrijednost razlike dvaju brojeva manja je ili jednaka sumi i veća ili jednaka razlici apsolutnih vrijednosti tih brojeva).

3) $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ za $a_i > 0$

(»*Cauchyjeva nejednadžba*«: aritmetička sredina n pozitivnih brojeva veća je ili jednaka korijenu n-tog stupnja produkta tih brojeva)*.

Jednakost vrijedi samo tada, kada je svih n brojeva međusobno jednako.

4) $\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$

(apsolutna vrijednost aritmetičke sredine nekoliko brojeva manja je ili jednaka drugom korijenu aritmetičke sredine kvadrata tih brojeva, vidi str. 207).

Jednakost vrijedi samo tada, kada je svih n brojeva međusobno jednako.

5) $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$
$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$

* Poseban slučaj te nejednadžbe za $n = 2$, vidi na sr. 207.

ili
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant$
$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$

(»*nejednadžba Bunjakovski-Cauchyja*«): ako imamo dva sloga od n brojeva, onda je suma produkata parova s jednakim indeksom manja ili jednaka produktu drugih korijena sume kvadrata tih brojeva*. Jednakost vrijedi samo za $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$).

6) Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni brojevi, onda je:

6_1) $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \leqslant$
$\leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$

za $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$
ili $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

6_2) $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geqslant$
$\geqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$

za $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$

nejednadžba Čebiševa: ako imamo dva sloga od n pozitivnih brojeva, produkt aritmetičkih sredina tih slogova manji je ili jednak (odnosno veći ili jednak) aritmetičkoj sredini produkata, kada su oba sloga uzlazna ili silazna (odnosno kada je jedan slog uzlazan, a drugi silazan).

7) Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ pozitivni brojevi, onda je:

* Ako je $n = 3$, a $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ promatramo kao pravokutne Descartesove koordinate vektora, onda nejednadžba Bunjakovski-Cauchyja pokazuje da je skalarni produkt dvaju vektora manji ili jednak produktu njihovih modula (vidi str. 631). Pri $n > 3$ ta se formulacija proširuje na vektore u n-dimenzionalnom prostoru.

Analogija nejednadžbe Bunjakovski-Cauchyja za beskonačne konvergentne redove jest nejednadžba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_nb_n)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2;$$

analogija je također nejednadžba za određene integrale:

$$\int_a^b [f(x) \cdot \varphi(x)]^2 \, dx \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \int_a^b [\varphi(x)]^2 \, dx.$$

$$7_1)\ \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\ldots+(a_nb_n)^k}{n}}$$

za $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ i $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$
ili $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ i $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$.

$$7_2)\ \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k}{n}}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\ldots+(a_nb_n)^k}{n}}$$

za $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ i $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$

(poopćenje jednadžbe Čebiševa).

Rješavanje nejednadžbe prvog i drugog stupnja. Rješavanje nejednadžbi svodimo na postupno zamjenjivanje nejednadžbe s njoj ekvivalentnim nejednadžbama. Kao i pri rješavanju jednadžbe, u nejednadžbi prenosimo sumande s jedne strane na drugu s obrnutim predznakom i množimo ili dijelimo obje strane nejednadžbe s jednim te istim brojem (različitim od nule; ako je množitelj pozitivan, znak nejednakosti nejednadžbe ostaje nepromijenjen, a ako je negativan, mijenja se u suprotni). Pomoću takvih pretvorbi možemo uvijek nejednadžbu prvog stupnja dovesti u oblik $ax>b$, a nejednadžbu drugog stupnja u jednostavnijem slučaju u oblik $x^2<m$ ili $x^2>m$, a u općem slučaju u oblik $ax^2+bx+c<$ ili $ax^2+bx+c>0$.

Nejednadžba prvog stupnja $ax>b$ ima rješenje:

$$x>\frac{b}{a}\ \text{za}\ a>0\ \text{i}\ x<\frac{b}{a}\ \text{za}\ a<0.$$

Primjer: $5x+3<8x+1$;

$5x-8x<1-3$; $\quad -3x<-2$, $\quad x>\frac{2}{3}$.

Jednostavnije nejednadžbe drugog stupnja $x^2<m$ i $x^2>m$ imaju rješenja:

a) $x^2<m$. Za $m>0$ rješenje je $-\sqrt{m}<x<+\sqrt{m}$ $(|x|<\sqrt{m})$;
za $m\leqslant 0$ rješenja nema;

b) $x^2>m$. Za $m>0$ rješenje je $x>\sqrt{m}$ i $x<-\sqrt{m}$ $(|x|>\sqrt{m})$;

za $m=0$ rješenje je $x>0$ i $x<0$ $(x\neq 0)$;
za $m<0$ nejednadžba vrijedi identički.

Opći slučaj nejednadžbe drugog stupnja $ax^2+bx+c<0$ ili $ax^2+bx+c>0$. Nejednadžbu podijelimo sa a (promijenimo znak nejednakosti u slučaju $a<0$) i svedemo je na oblik $x^2+px+q<0$ ili $x^2+px+q>0$. Posljednju nejednadžbu pretvorimo u oblik:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

odnosno u oblik:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Označimo $x+\frac{p}{2}$ sa z, a $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ sa m, pa dobivamo jednadžbu $z^2<m$ ili $z>m$; rješavanjem dobivamo x.

Primjeri: 1) $-2x^2+14x-20>0$; $x^2-7x+10<0$;

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2<\frac{9}{4};\ -\frac{3}{2}<x-\frac{7}{2}<\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}<x<\frac{3}{2}+\frac{7}{2}.$$

Rješenje: $2<x<5$.

2) $x^2+6x+15>0$; $(x+3)^2>-6$; nejednadžba je identička.

3) $-2x^2+14x-20<0$; $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2>\frac{9}{4}$, $\quad x-\frac{7}{2}>\frac{3}{2}$

i $x-\frac{7}{2}<-\frac{3}{2}$; rješenje: $x>5$ i $x<2$.

14. PROGRESIJE, KONAČNI REDOVI I SREDNJE VRIJEDNOSTI (sredine)

Aritmetičkom progresijom nazivamo takav niz brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (članova progresije) u kojem se svaki idući broj dobiva iz prethodnog, dodatkom određenog broja r (*razlike progresije*). Ako je $r>0$ progresiju nazivamo *uzlaznom*, a ako je $r<0$ *silaznom*.

Formule aritmetičke progresije:

$$a_n=a_1+(n-1)r\ \text{i}\ s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\quad (s_n\ \text{je suma}\ n\ \text{članova}).$$

Geometrijskom progresijom nazivamo takav niz brojeva a_1 $a_2, \ldots, a_n$ (*članova* progresije) u kojem svaki idući broj dobivamo

iz prethodnog množenjem s određenim brojem q (*kvocijentom* progresije). Ako je $q > 1$, progresiju nazivamo *uzlaznom*, a ako je $|q| < 1$ *silaznom*.

Formule geometrijske progresije:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{i} \quad s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Za sumu silazne geometrijske progresije prikladnije je upotrijebiti formulu $s_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$. Ako broj članova silazne geometrijske progresije n neograničeno raste, tada $q^n \to 0$ i s_n teži ka graničnoj vrijednosti:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s = \frac{a_1}{1 - q}$$

(*suma beskonačne silazne geometrijske progresije*).

Primjer: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Neki konačni redovi brojeva (konačne sume*):

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$;

7) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$;

9) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$.

* Tablicu beskonačnih redova brojeva vidi na str. 363 i 364.

Srednje vrijednosti (sredine). *Aritmetičkom sredinom* dviju veličina a i b nazivamo njihov poluzbroj $x = \frac{a+b}{2}$: veličine a, x i b tvore aritmetičku progresiju.

Aritmetička sredina n veličina $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest:

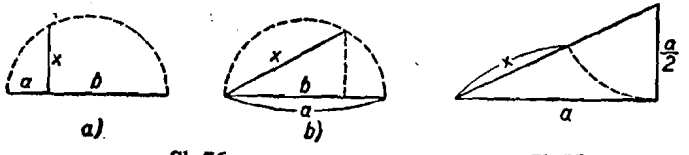
$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Kvadratnom sredinom n veličina $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pozitivnih ili negativnih) nazivamo veličinu:

$$+\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)},$$

koja ima veliku važnost u teoriji pogrešaka.

Geometrijskom sredinom (*srednjom geometrijskom proporcionalom*) dviju pozitivnih veličina a i b nazivamo veličinu $x = \sqrt{ab}$; veličine a, x i b tvore geometrijsku progresiju. Geometrijska sredina dviju nejednakih veličina uvijek je manja od njihove aritmetičke sredine. Ako su a i b duljine odsječka, onda odsječak duljine $x = \sqrt{ab}$ određujemo konstrukcijom prikazanom na slici 76 (a ili b).



Sl. 76

Sl. 77

Zlatnim rezom veličine a nazivamo razdiobu te veličine na dva takva dijela x i $a - x$, da x bude geometrijska sredina između a i $a - x$.

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a \approx 0{,}618a.$$

Ako je a duljina odsječka, onda odsječak duljine x određujemo konstrukcijom prikazanom na sl. 77. Veličina x je duljina stranice pravilnog deseterokuta upisanog u krug polumjera a.

15. FAKTORIJELA I GAMA-FUNKCIJA

Faktorijelom cijelog pozitivnog broja n [označavamo je sa $n!$ ili $\Pi(n)$] nazivamo produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Osnovno svojstvo faktorijele: $n! = n(n-1)!$

Faktorijele prvih brojeva i njihove recipročne vrijednosti vidi na str. 48.

Faktorijele većih brojeva možemo približno izraziti *Stirlingovom formulom:*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right),$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Ta formula vrijedi i onda, ako n nije cio broj (vidi niže, **Γ-funkcija**).

Gama-funkcija. Pojam faktorijele proširujemo na bilo koji broj x* pomoću *gama-funkcije* $\Gamma(x)$, određene na dva načina:

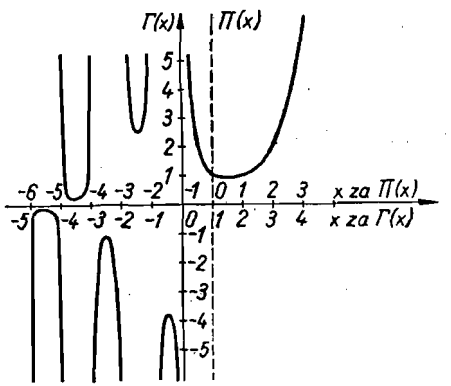
$$\Gamma(x)\begin{cases} = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad (\textit{Eulerov integral}) \text{ (samo za } x > 0\text{**)} \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \quad \text{(za bilo koji } x\text{).} \end{cases}$$

Osnovna svojstva gama-funkcija:

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ za cio, pozitivan n,

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$



Sl. 78

Poopćenje pojma faktorijele $\Pi(x)$. Pojam faktorijele $n!$, definiran u početku za cijele pozitivne n, poopćujemo na bilo koji realni n u obliku funkcije $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

* U tom broju i na kompleksne.
** Za kompleksni x za Re $x > 0$.

Za cio, pozitivan x: $\Pi(x) = x! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$,
za $x = 0$: $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$,
za cio, negativan x: $\Pi(x) = \pm\infty$,

za $x = \frac{1}{2}$: $\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

za $x = -\frac{1}{2}$: $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

za $x = -\frac{3}{2}$: $\Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Grafove funkcija $\Gamma(x)$ i $\Pi(x)$ vidi na sl. 78. Tablice funkcija $\Gamma(x)$ vidi na str. 90.

16. KOMPLEKSIJE

Varijacijama od n elemenata po k njih (varijacije k-toga razreda od n elemenata) nazivamo takve njihove kompleksije koje se međusobno razlikuju po elementima ili po njihovom rasporedu. Na primjer: varijacije od 3 elementa a, b, c po 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb. Broj svih varijacija od n različitih elemenata po k (označavamo $V_n^{(k)}$):

$$V_n^{(k)} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{\text{ukupno } k \text{ faktora}} = \frac{n!}{(n-k)!}\text{*}.$$

Na primjer: $V_3^{(2)} = 3\cdot 2 = 6$.

Permutacijama od n elemenata nazivamo njihove kompleksije, koje se međusobno razlikuju samo po rasporedu elemenata. Na primjer: permutacija od tri elementa a, b i c: abc, bca, cab, cba, bac, acb. Broj svih permutacija od n različitih elemenata (označavamo sa P_n) jest:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n! = V_n^{(n)}.$$

Ako među n elemenata a, b, c, ... ima jednakih (a se ponavlja α puta, b β puta, c γ puta itd.), onda je broj permutacija:

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

Kombinacijama n elemenata po m (kombinacije m-toga razreda od n elemenata), nazivamo njihove kompleksije, koje se međusobno razlikuju samo po elementima. Na primjer: kombinacije triju elemenata a, b, c po 2 jesu: ab, ac, bc. Broj svih kombinacija od n različitih elemenata po k [označavamo sa $\bar{C}_n^{(k)}$ ili $\binom{n}{m}$] jest:

* O simbolu »$n!$« vidi na str. 207.

$$\bar{C}_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k} = \frac{V_n^{(k)}}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\bar{C}_n^{(1)} = n, \quad \bar{C}_n^{(n)} = C_n^{(0)} = 1.$$

Osnovna svojstva kombinacija:

$$\bar{C}_n^{(k)} = \bar{C}_n^{(n-k)}.$$

17. BINOMNI TEOREM

Newtonova formula:

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \quad (*)$$

ili

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots$$
$$\dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Binomne koeficijente C_n^k možemo odrediti iz tzv. Pascalova trokuta:

n	koeficijenti
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
	.....

Svaki koeficijent tvorimo tako da zbrojimo dva koeficijenta iznad njega (s lijeve i s desne strane).

Svojstva binomnih koeficijenata:

1) Koeficijenti u Newtonovoj formuli rastu do sredine formule, a zatim se smanjuju.

2) Koeficijenti članova koji su jednako udaljeni od početka i od kraja međusobno su jednaki.

3) Suma binomnih koeficijenata u n-toj potenciji binoma jednaka je 2^n.

4) Suma koeficijenata neparnih mjesta jednaka je sumi koeficijenata parnih mjesta.

Potencija razlike:

$$(a-b)^n =$$

$$= a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + (-1)^n b^n.$$

Poopćenje na bilo koji eksponent. Formula $(*)$ se može proširiti na negativni i razlomljeni eksponent n: $(a+b)^n$ za $|b| < a$ izražavamo u tom slučaju u obliku beskonačnog reda (vidi str. 398 do 400):

$$(a+b)^n =$$

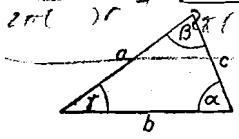
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

III. GEOMETRIJA

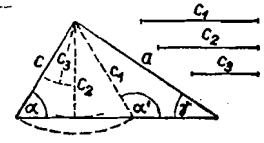
A. PLANIMETRIJA

1. LIKOVI

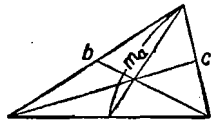
Trokut. Zbroj dviju stranica trokuta (sl. 79) uvijek je veći od treće stranice: $b + c > a$. Zbroj kutova u trokutu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Trokut je potpuno određen ako je zadano: 1) sve tri stranice ili 2) dvije stranice i kut među njima ili 3) stranica i dva kuta koji njoj prileže. Ako su zadane dvije stranice i kut nasuprot jednoj od tih stranica, onda prema tim podacima možemo odrediti dva, jedan ili nijedan trokut (vidi sl. 80, podrobnije o tome vidi na str. 238).



Sl. 79



Sl. 80



Sl. 81

Težišnicom (*medijanom*) trokuta nazivamo pravac koji spaja vrh trokuta sa sredinom nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki — težištu trokuta (sl. 81); težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha). Duljina težišnice na stranicu a je $m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$ (vidi također na str. 237).

Simetralom kuta trokuta nazivamo pravac koji raspolavlja unutarnji kut trokuta. Simetrale kutova sijeku se u jednoj točki koja je središte trokutu upisane kružnice (sl. 82); polumjer upisane kružnice r vidi na str. 238. Duljina simetrala kuta α (vidi također na str. 237) je: $l_\alpha = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$. Ako simetrala kuta α dijeli stranicu a na odsječke m i n, onda je $m : n = c : b$.

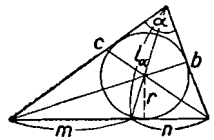
Središte opisane kružnice nalazi se u točki sjecišta okomica podignutih od sredine stranica trokuta (sl. 83). Polumjer opisane kružnice R vidi na str. 238.

Visinom trokuta nazivamo okomicu spuštenu iz vrha trokuta na nasuprotnu stranicu. Visine trokuta sijeku se u jednoj točki, koju nazivamo *ortocentrom*. Duljinu visine vidi na str. 237.

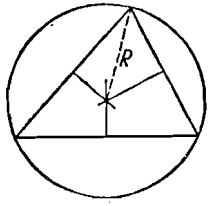
Visina, težišnica i simetrala kuta, spuštene na istu stranicu, podudaraju se ako su druge dvije stranice trokuta jednake (trokut je istokračan). Podudaranje dvaju od tih pravaca dovoljno je da ustanovimo istokračnost trokuta.

U *istostraničnom* trokutu ($a = b = c$) podudaraju se središte opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar.

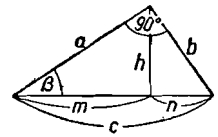
Središnjica je pravac koji spaja sredine dviju stranica trokuta; ona je paralelna sa trećom stranicom trokuta i jednaka polovini njene duljine.



Sl. 82



Sl. 83



Sl. 84

Površina trokuta: $S = \frac{1}{2} bh_b^* = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdje je $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Pravokutni trokut (sl. 84): c je hipotenuza, a i b su katete. $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorin poučak). $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. *Površina:* $S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2} c^2 \sin 2\beta$.

Trigonometrijske formule za trokut vidi na str. 236 do 238.

Trokuti (a također i višekuti sa jednakim brojem stranica) su *slični*, ako su im odgovarajući kutovi jednaki i odgovarajuće stranice proporcionalne. Za sličnost trokuta dovoljno je da su ispunjena dva od ovih uvjeta: 1) tri stranice jednog trokuta proporcionalne su trima stranicama drugog trokuta; 2) dva kuta jednog trokuta jednaka su dvama kutovima drugog trokuta; 3) dvije stranice jednog trokuta proporcionalne su dvjema stranicama drugog trokuta, a kutovi među njima su jednaki.

Površine sličnih likova proporcionalne su kvadratima odgovarajućih linearnih elemenata (stranica, visina, dijagonala itd.).

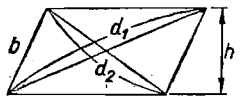
Paralelogram (sl. 85). Osnovna svojstva: 1) nasuprotne stranice su jednake, 2) nasuprotne stranice su paralelne, 3) dijagonale se u sjecištu raspolavljaju, 4) nasuprotni kutovi su jednaki. Ako je u četverokutu ispunjeno jedno od tih svojstava ili ako su jednake i paralelne nasuprotne stranice, kao posljedica ispunjena su sva ostala svojstva.

* Sa h_b označena je visina spuštena na stranicu b.

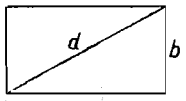
Veza među dijagonalama i stranicama: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.
Površina: $S = ah$.

Pravokutnik i kvadrat. Paralelogram je *pravokutnik* (sl. 86) ako ima: 1) sve kutove jednake ili 2) jednake dijagonale (jedno od tih svojstava posljedica je drugog). *Površina:* $S = ab$.

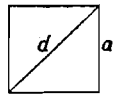
Pravokutnik je *kvadrat* (sl. 87) ako je $a = b$; $d = \sqrt{2}a \approx$ $\approx 1{,}414a$; $a = \frac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0{,}707\, d$. *Površina:* $S = a^2 = {}^1/_2\, d^2$.



Sl. 85



Sl. 86



Sl. 87

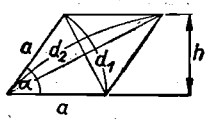
Romb. Paralelogram je *romb* (sl. 88) ako ima: 1) sve stranice jednake, 2) dijagonale međusobno okomite, 3) ako dijagonale raspolavljaju kutove (kada je ispunjeno jedno svojstvo onda su, kao posljedica, ispunjena i ostala dva svojstva).

$$d_1 = 2a \sin\frac{\alpha}{2}; \qquad d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

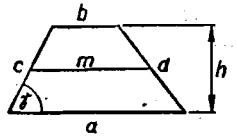
Površina: $S = ah = a^2 \sin\alpha = {}^1/_2\, d_1 d_2$.

Trapez je četverokut kome su dvije stranice paralelne (sl. 89), a i b su *osnovice* trapeza, h je *visina*, m je *središnjica* (pravac koji spaja sredine neparalelnih stranica; ona je paralelna s osnovicama): $m = {}^1/_2\,(a + b)$.

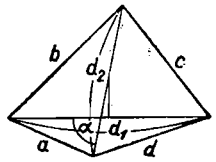
Površina: $S = {}^1/_2\,(a + b)\, h = mh$. Trapez je *istokračan* ako je $d = c$. U tom slučaju je $S = (a - c\cos\gamma)\, c\sin\gamma = (b + c\cos\gamma)\, c\sin\gamma$.



Sl. 88



Sl. 89

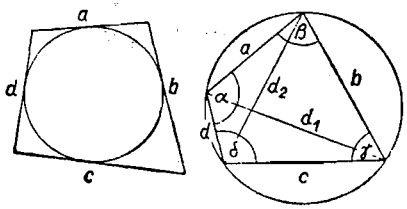


Sl. 90

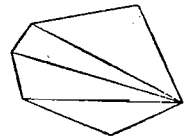
Četverokut (sl. 90). Zbroj kutova svakog konveksnog četverokuta je 360°. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, m je odsječak koji spaja sredine dijagonala. *Površina:* $S = {}^1/_2\, d_1 d_2 \sin\alpha$.

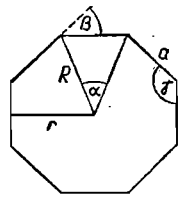
U četverokut možemo upisati kružnicu (sl. 91, *a*) tada i samo tada, kada je $a + c = b + d$. Oko četverokuta možemo opisati kružnicu (sl. 91, *b*) tada i samo tada, kada je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Za upisani četverokut je $ac + bd = d_1 d_2$. Površina upisanog četverokuta je $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdje je $p = {}^1/_2\,(a + b + c + d)$.

Poligon (višekut) (sl. 92). Ako je broj stranica n, suma unutarnjih kutova je 180° (n—2). Zbroj vanjskih kutova je 360°. *Površinu* određujemo tako da poligon rastavimo na trokute.



a Sl. 91 *b*


Sl. 92



Sl. 93

Poligon je *pravilan* ako su mu sve stranice i svi kutovi međusobno jednaki. Za pravilne poligone sa n stranica (sl. 93) jesu: središnji kut $\alpha = 360°:n$, vanjski kut $\beta = 360°:n$, unutarnji kut $\gamma = 180° - \beta$. Ako je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice (*apotema*), onda je stranica $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Površina: $S = {}^1/_2\, nar = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = {}^1/_2\, n R^2 \sin\alpha = {}^1/_4\, na^2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

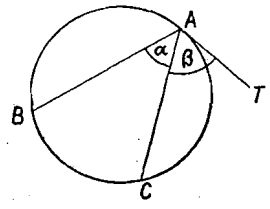
Podatke o pojedinim pravilnim poligonima vidi u donjoj tablici.

Elementi pravilnih poligona

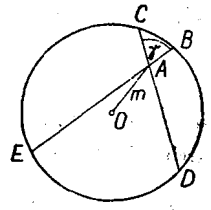
Oznake: n je broj stranica, a je stranica, R je polumjer opisane kružnice, r je apotema (polumjer upisane kružnice).

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Kružnica. Polumjer r, promjer d. *Kutovi u vezi s kružnicom** (sl. 94): obodni kut $\alpha = {}^1/_2 \overset{\frown}{BC}$, kut između tetive i tangente $\beta = {}^1/_2 \overset{\frown}{AC}$, kut između tetiva (sl. 95) $\gamma = {}^1/_2 (\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$, kut među sekantama (sl. 96) $\alpha = {}^1/_2 (\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$, kut među tangentom i sekantom $\beta = {}^1/_2 (\overset{\frown}{TE} - \overset{\frown}{TB})$, kut među tangentama (sl. 97) $\alpha = {}^1/_2 (\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BEC})$.

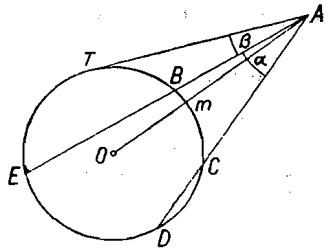


Sl. 94

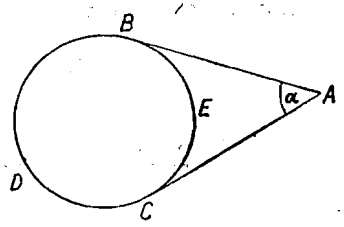


Sl. 95

Tetive koje se sijeku (sl. 95): $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$.
Sekante (sl. 96): $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.



Sl. 96



Sl. 97

Opseg kružnice C i *površina kruga* S (r je polumjer, d je promjer):

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

$$C = 2\pi r \approx 6{,}283\,r, \quad C = \pi d \approx 3{,}142\,d, \quad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S},$$

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142\,r^2, \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785\,d^2, \quad S = \frac{Cd}{4} = 0{,}25\,Cd,$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0{,}159\,C, \quad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

vidi također tablice na str. 78 do 81.

* U ovim jednadžbama su umjesto duljine lukova stavljene njihove kutne mjere, koje se podudaraju s mjerom pripadnog središnjeg kuta.

Odsječak (segment) i isječak (sektor) kruga (sl. 98). r je polumjer, l je duljina luka, a je tetiva, α je središnji kut (u stupnjevima), h je visina segmenta:

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4};$$

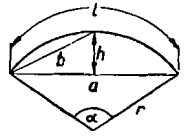
$$l = \frac{2\pi r\alpha}{360} \approx 0{,}01745\,r\alpha.$$

Približno:

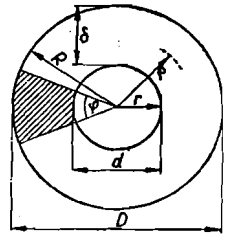
1) $l = \dfrac{8b - a}{3}$

ili:

2) $l = \sqrt{a^2 + \dfrac{16}{3}h^2}$.



Sl. 98



Sl. 99

Površina isječka:

$$S = \frac{\pi r^2\alpha}{360} \approx 0{,}00873\,r^2\alpha.$$

Površina segmenta:

$$S_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}[lr - a(r - h)].$$

Približno je $S_1 = \dfrac{h}{15}(6a + 8b)$. Tablice sa S_1, l, h i a vidi na str. 82 do 86.

Kružni vijenac (sl. 99). $D = 2R$ je vanjski promjer, $d = 2r$ unutarnji promjer, $\rho = \dfrac{R + r}{2}$ je srednji polumjer, $\delta = R - r$ je širina vijenca.

Površina kružnog vijenca je

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta.$$

Površina dijela kružnog vijenca (šrafirano na sl. 99) sa središnjim kutom φ (u stupnjevima):

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{1440}(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\rho\delta.$$

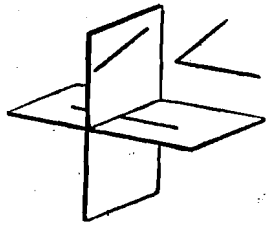
B. STEREOMETRIJA

2. PRAVCI I RAVNINE U PROSTORU

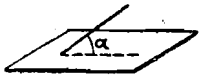
Dva pravca koja leže u istoj ravnini imaju ili jednu ili ni jednu zajedničku točku. U drugom slučaju su *paralelni*. Ako kroz dva pravca ne možemo postaviti ravninu, pravce nazivamo *mimosmjernima*.

Kut među mimosmjernim pravcima mjerimo kutom među njima paralelnim pravcima koji izlaze iz zajedničke točke (sl. 100). Udaljenost između mimosmjernih pravaca određujemo po odsječku zajedničke okomice.

Dvije ravnine se ili sijeku u pravcu ili nemaju zajedničkih točaka. U drugom slučaju ravnine su *paralelne*. Ako su dvije ravnine okomite na jedan isti pravac, ili ako su na svakoj ravnini po dva pravca koji se sijeku, a odgovarajući pravci su međusobno paralelni, i te ravnine su paralelne.



Sl. 100



Sl. 101

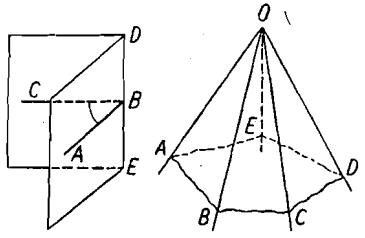
Pravac i ravnina. Pravac može ležati čitav u zadanoj ravnini, može s njom imati jednu zajedničku točku ili s njom ne imati ni jedne zajedničke točke. U posljednjem slučaju pravac je *paralelan* s ravninom. Kut između pravca i ravnine mjerimo kutom između pravca i njegove projekcije na ravninu (sl. 101). Ako je pravac okomit na dva pravca ravnine koji se sijeku, tada je okomit na svaki pravac u ravnini (*okomit je na ravninu*).

3. PROSTORNI UGLOVI

Dvostrani ugao je lik koji tvore dvije poluravnine što izlaze iz jednog pravca. Dvostrani ugao mjerimo njegovim *plošnim kutom* *ABC* (sl. 102), tj. kutom između okomica na *brid DE* dvostranog ugla, koje su postavljene u obje ravnine (*strane*) iz jedne točke *B*.

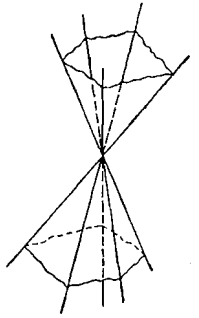
Višestruki ugao (višebrid) *OABCDE* (sl. 103) tvoren je od nekoliko ravnina (*strana*) koje imaju zajedničku točku (*vrh*) i sijeku se redom po pravcima *OA*, *OB*, ... (*bridovima*). Dva brida iste strane tvore *bridni kut* višestranog ugla, a dvije susjedne strane

plošni kut. Višestrani uglovi su *jednaki* ako ih možemo postaviti jedan u drugi, tako da se podudaraju; za to moraju biti jednaki odgovarajući elementi (plošni kutovi i bridni kutovi) višestranih uglova. Ako su suglasno jednaki elementi višestranog ugla obrnuto raspoređeni, višestrani uglovi se ne podudaraju kada ih postavimo jednog u drugog; u tom slučaju su uglovi *simetrični*, tj. možemo ih postaviti u položaj prikazan na slici 104.

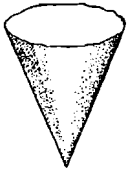


Sl. 102

Sl. 103



Sl.104



Sl. 105

Konveksni višestrani ugao leži čitav s jedne strane svake svoje strane. *Zbroj bridnih kutova* $AOB + BOC + \ldots + EOA$ (sl. 103) svakog konveksnog višestranog ugla manji je od 360°.

Trostrani uglovi (trobridi) jednaki su ako se: 1) podudaraju u plošnom kutu zatvorenom među pripadno jednakim i jednako raspoređenim bridnim kutovima ili 2) podudaraju u bridnom kutu zatvorenom između dva pripadno jednaka i jednako raspoređena plošna kuta, ili 3) podudaraju se u tri pripadno jednaka i jednako raspoređena bridna kuta ili 4) podudaraju se u tri pripadno jednaka i jednako raspoređena plošna kuta.

Prostorni kut je dio prostora ograničenog pravcima koji izlaze iz jedne točke (vrha) prema svim točkama neke zatvorene krivulje (sl. 105). On karakterizira vidni kut pod kojim je iz vrha vidljiva zadana krivulja. Mjera prostornog kuta je površina izrezana prostornim kutom na kugli jediničnog polumjera sa središtem u vrhu kuta. Npr. za stožac s kutom na vrhu od 120° prostorni kut je jednak π (vidi formule na str. 226).

4. UGLASTA TIJELA ILI POLIEDRI

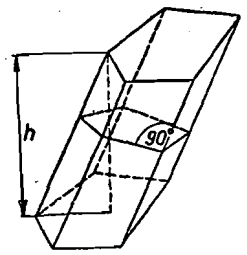
Oznake: V je volumen, S je ukupna površina, M je površina plašta, h je visina, F je površina osnovke (baze).

Poliedar je tijelo omeđeno ravnim plohama.

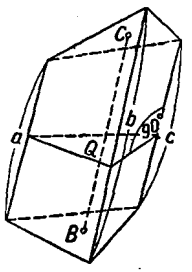
Prizma (sl. 106). Baza je ravni višekut; plašt je sastavljen od paralelograma. Prizma je *uspravna* ako su njeni bridovi okomiti na bazu. Prizma je *pravilna* ako je uspravna, a njena baza je pravilni višekut.

$M = pl$, gdje je l brid (strane), p je opseg presjeka prizme sa ravninom okomitom na brid. $S = M + 2F$; $V = F \cdot h$.

Za trostranu prizmu, presječenu neparalelno s bazom: $V = \frac{1}{3}(a + b + c)\,Q$ (sl. 107) gdje su a, b i c duljine paralelnih bri-

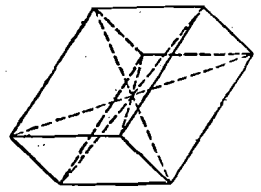


Sl. 106

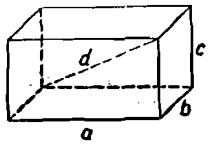


Sl. 107

dova, a Q je površina okomitog presjeka. Za n-stranu prizmu, presječenu neparalelno s bazom $V = l \cdot Q$, gdje je l duljina linije BC koja spaja težišta baza, a Q je površina presjeka, okomitog na tu liniju.



Sl. 108



Sl. 109

Paralelepiped (sl. 108) je prizma kojoj su baze paralelogrami. U paralelepipedu se sve četiri dijagonale sijeku u jednoj točki koja ih raspolavlja. Paralelepiped je *pravokutan* ako je uspravan, a njegove baze su pravokutnici. U pravokutnom paralelepipedu sve dijagonale su jednake. Ako su a, b i c bridovi pravokutnog paralelepipeda, a d njegova dijagonala, tada je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Kocka je pravokutni paralelepiped s jednakim bridovima:

$$a = b = c, \quad d^2 = 3a^2, \quad V = a^3, \quad S = 6a^2.$$

Piramida (sl. 110). Baza je neki poligon, stranice plašta su trokuti koji se sastaju u jednom vrhu. Piramidu nazivano n-stranom, ako ima n *pobočnih* ploha (zajedno s bazom $n + 1$ ploha). $V = \frac{1}{3}Fh$.

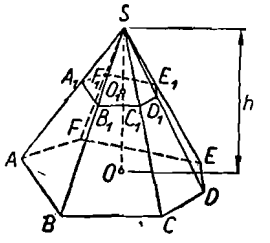
Ako je piramida presječena ravninom paralelnom s bazom, tada je:

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \dots = \frac{SO_1}{O_1O};$$

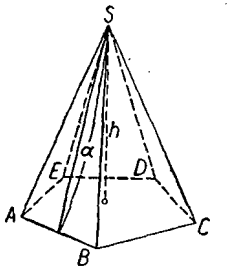
$$\frac{\text{površina } ABCDEF}{\text{površina } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2.$$

SO — *visina* piramide je okomica spuštena iz vrha na bazu.

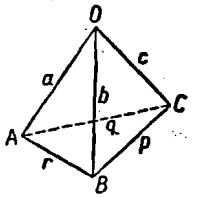
Piramida je pravilna (sl. 111) ako joj je baza pravilan poligon, a visina prolazi kroz središte baze.



Sl. 110



Sl. 111



Sl. 112

Za pravilnu piramidu je $M = \frac{1}{2}p\alpha$ [p je opseg baze, α je apotema pravilne piramide (visina bilo koje stranice njenog plašta)].

Tetraedar je trostrana piramida (sl. 112). Ako je $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, je*

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

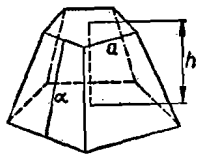
Krnja piramida (ravnina kojom je presječena paralelna je s bazom, sl. 113). Ako su F i f površine baza, h je visina (udaljenost baza), a i A su dvije odgovarajuće stranice baza, tada je:

$$V = \frac{1}{3}h\left[F + f + \sqrt{Ff}\right] = \frac{1}{3}hF\left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$$

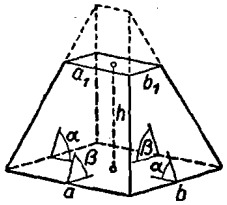
* O determinantama vidi str. 189.

Za pravilnu krnju piramidu je $M = \frac{P+p}{2}\alpha$, gdje su P i p opsezi baza, a α je apotema.

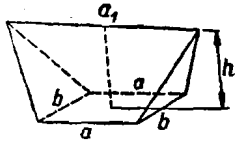
Obelisk. Baze su mu paralelni pravokutnici; nasuprotne plohe su jednako nakloњene na bazu, ali se ne sijeku u jednoj točki (sl. 114). Ako su a, b i a_1, b_1 stranice baza, a h je visina, onda je



Sl. 113



Sl. 114

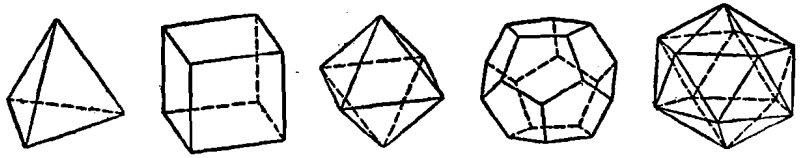


Sl. 115

$$V = \frac{h}{6}[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1] = \frac{h}{6}[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1].$$

Klin. Baza mu je pravokutnik, stranice plašta su istokračni trokuti i istokračni trapezi (sl. 115).

$$V = \frac{1}{6}(2a + a_1)bh.$$



Sl. 116

Pravilnim poliedrima su sve strane jednaki pravilni poligoni i svi su višestrani uglovi jednaki. Imamo pet pravilnih poliedara (sl. 116), o kojima su podaci navedeni u tablici (str. 223).

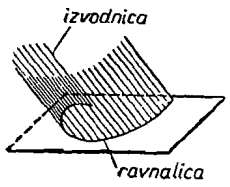
Elementi pravilnih poliedara (a je duljina brida)

Naziv	Broj strana i njihov oblik	Broj bridova	Broj vrhova	Ukupna površina	Volumen
tetraedar	4 trokuta	6	4	$1{,}7321 \cdot a^2$	$0{,}1179 \cdot a^3$
kocka	6 kvadrata	12	8	$6 \cdot a^2$	a^3
oktaedar	8 trokuta	12	6	$3{,}4641 \cdot a^2$	$0{,}4714 \cdot a^3$
dodekaedar	12 peterokuta	30	20	$20{,}6457 \cdot a^2$	$7{,}6631 \cdot a^3$
ikozaedar	20 trokuta	30	12	$8{,}6603 \cdot a^2$	$2{,}1817 \cdot a^3$

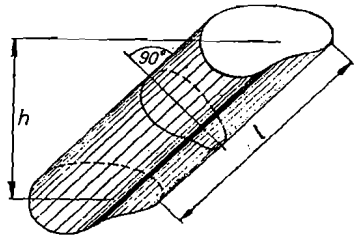
Eulerov teorem. Ako je e broj vrhova poliedra, f broj strana i k broj bridova, tada je $e - k + f = 2$ (pod uvjetom da je poliedar konveksan ili da se može napraviti konveksnim pomoću neprekinute deformacije). *Primjere* vidi u tablici pravilnih poliedara.

5. OBLA TIJELA

Oznake: V je volumen, S je ukupna površina, M je površina plašta, h je visina, F je površina baze.



Sl. 117



Sl. 118

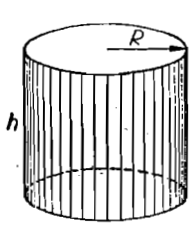
Valjkastu plohu (sl. 117) proizvodi pravac (*izvodnica*) koji pomičemo paralelno sa zadanim smjerom duž neke krivulje (*ravnalice*).

Valjak je tijelo omeđeno valjkastom plohom sa zatvorenom ravnalicom i sa dvije paralelne ravnine koje su baze valjka. Za valjak (sl. 118) (p je opseg baze, s je opseg presjeka okomitog na izvodnicu, Q je površina presjeka, l je duljina izvodnice) je:

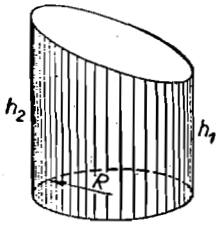
$$M = ph = sl; \qquad V = Fh = Ql.$$

Kružni uspravni valjak ima za bazu krug, a izvodnice su mu okomite na ravninu baze (sl. 119); R je polumjer baze:

$$M = 2\pi Rh; \quad S = 2\pi R(R + h); \quad V = \pi R^2 h.$$



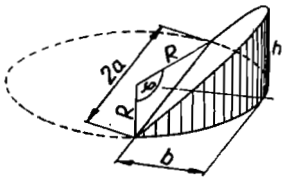
Sl. 119



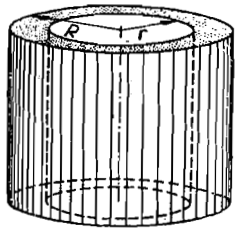
Sl. 120

Krnji kružni valjak (sl. 120): $M = \pi R(h_1 + h_2)$,

$$S = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right]; \quad V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$



Sl. 121



Sl. 122

Odsječak (segment) valjka (oznake vidi na sl. 121; $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ u radijanima):

$$V = \frac{h}{3b}[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha] =$$

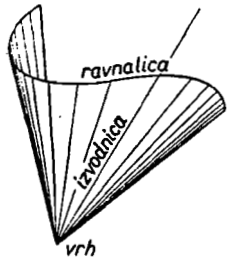
$$= \frac{hR^3}{b}\left(\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} - \alpha\cos\alpha\right). \qquad M = \frac{2Rh}{a}[(b - R)\alpha + a]$$

(formule vrijede i za slučaj kada je $b > R$, $\varphi > \pi$).

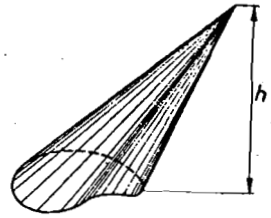
Valjkasta cijev (sl. 122). R i r su vanjski i unutarnji polumjeri $\delta = R - r$, $\rho = \frac{R + r}{2}$ (srednji polumjer):

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

Čunjastu plohu (sl. 123) proizvodi pravac (*izvodnica*) koji prolazi nepomičnom točkom (vrhom) i pomiče se duž krivulje (*ravnalice*).



Sl. 123

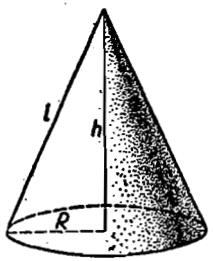


Sl. 124

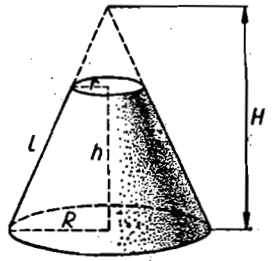
Čunj (stožac) (sl. 124) je omeđen čunjastom plohom sa zatvorenom ravnalicom i plohom baze. Za stožac je $V = \frac{1}{3}hF$.

Kružni uspravni čunj (sl. 125) ima za bazu krug, a visina mu prolazi kroz središte baze (l je duljina izvodnice, R je polumjer baze):

$$M = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}; \qquad S = \pi R(R + l); \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



Sl. 125



Sl. 126

Za uspravni krnji čunj (sl. 126) je:

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}; \qquad M = \pi l(R + r);$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr); \qquad H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

Čunjosječnice vidi na str. 266.

Kugla. R je polumjer kugle, $D = 2R$ je promjer kugle (sl. 127). Svaki presjek kugle s ravninom daje krug. *Glavna kružnica* je kružnica polumjera R, koju dobivamo presjekom kugle s ravninom kroz središte kugle. Kroz svake dvije točke na kugli (koje ne leže dijametralno) uvijek možemo povući samo jednu glavnu kružnicu. Manji luk te glavne kružnice je najkraća udaljenost između te dvije točke na kugli. O geometriji na kugli vidi str. 242 do 243.

Površina i volumen kugle:

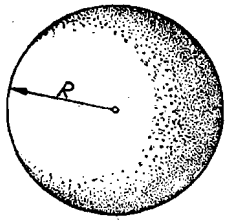
$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2,$$

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836\sqrt[3]{V^2},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189R^3, \quad V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0{,}5236D^3,$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0{,}09403\sqrt{S^3};$$

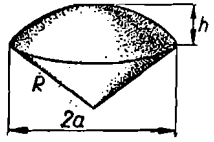
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0{,}2821\sqrt{S}; \qquad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}6204\sqrt[3]{V}.$$



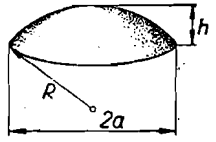
Sl. 127

Kuglin isječak (sektor) (sl. 128):

$$S = \pi R(2h + a); \quad V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$



Sl. 128



Sl. 129

Kuglin odsječak (segment) (Sl. 129):

$$a^2 = h(2R - h); \qquad M = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2);$$

$$S = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2);$$

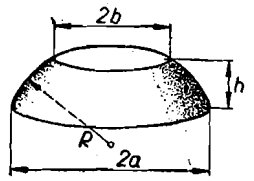
$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

Kuglin sloj (sl. 130):

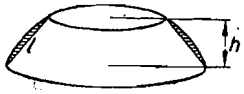
$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2; \quad M = 2\pi Rh;$$

$$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2); \qquad V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Ako je V_1 volumen krnjeg stošca, upisanog u kuglin sloj (sl. 131) i l njegova izvodnica, tada je $V - V_1 = \frac{1}{6}\pi h l^2$.



Sl. 130

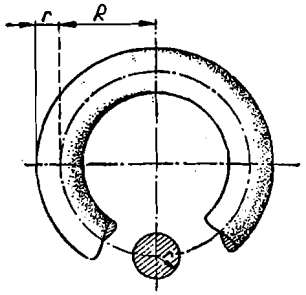


Sl. 131

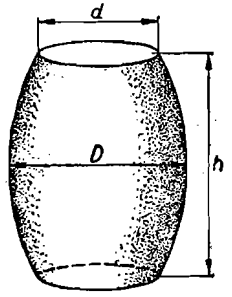
Torus (sl. 132) je ploha koju dobivamo vrtnjom kružnice oko osi koja leži u ravnini tē kružnice i ne siječe je.

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48\,Rr, \quad S = \pi^2 Dd \approx 9{,}870\,Dd,$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74Rr^2, \quad V = {}^1/_4\pi^2 Dd^2 \approx 2{,}467Dd^2.$$



Sl. 132



Sl. 133

Bačva (sl. 133). Za okruglu bačvu (izvodnica je kružni luk) približno je:

$$V = 0{,}262h(2D^2 + d^2) \quad \text{ili} \quad V = 0{,}0873h(2D + d)^2.$$

Za parabolnu bačvu je:

$$V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right) = 0{,}05236h(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

IV. TRIGONOMETRIJA

A. RAVNINSKA TRIGONOMETRIJA

1. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Mjerenje kutova radijanima. Usporedo s mjerenjem kutova u *stupnjevima*, uobičajenim u praksi, u teoretske svrhe primjenjujemo mjerenje kutova u *radijanima:* veličina kuta α — središnjeg za neku kružnicu — mjeri se omjerom duljine luka l na koji se taj kut odnosi, prema polumjeru r te kružnice: $\alpha = \frac{l}{r}$.

Pri tom mjerenju za jedinicu uzimamo *radijan*, tj. kut koji je središnji za luk duljine jednake polumjeru kružnice. 1 radijan iznosi 57°17′44″,8 ili 57°,2958; 1° = 0,017453 radijana. Prelaz od jednog mjerenja na drugo provodi se po formulama:

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha \text{ (radijana)}^*, \qquad \alpha \text{ (radijana)} = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ.$$

Posebno je $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ itd.

Tablicu za preračunavanje stupnjeva u radijane vidi na str. 87.

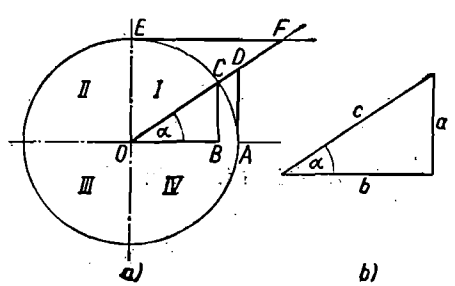
Definicije. *Trigonometrijske funkcije* kuta α određujemo pomoću trigonometrijskog kruga** (polumjer $R = 1$), te iz pravokutnog trokuta (za šiljaste kutove) (sl. 134 *a* i *b*).

sinus: $\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$,

kosinus: $\cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$,

tangens: $\operatorname{tg}\alpha = AD = \frac{a}{b}$,

kotangens: $\operatorname{ctg}\alpha = EF = \frac{b}{a}$,



Sl. 134

* Radijan nema specijalnu oznaku; kut od α radijana označujemo sa »α«.

** Kut α mjerimo od *nepomičnog* polumjera OA do pomičnog polumjera OC suprotno gibanju kazaljke na satu (pozitivni smisao).

sekans: $\sec\alpha = OD = \frac{c}{b}$, *kosekans:* $\csc\alpha = OF = \frac{c}{b}$.

Predznaci. Funkcijama dajemo određeni predznak, zavisno o tome u kojem kvadrantu trigonometrijskog kruga (sl. 134 *a*) leži *pomični* polumjer OC, po ovoj tablici:

Kvadrant	Veličina kuta	sin	cos	tg	ctg	sc	csc
I	od 0° do 90°	+	+	+	+	+	+
II	od 90° do 180°	+	−	−	−	−	+
III	od 180° do 270°	−	−	+	+	−	−
IV	od 270° do 360°	−	+	−	−	+	−

Granice izmjena:

sinus i kosinus: od −1 do +1,
tangens i kotangens: od −∞ do +∞,
sekans i kosekans: od −∞ do −1 i od +1 do +∞.

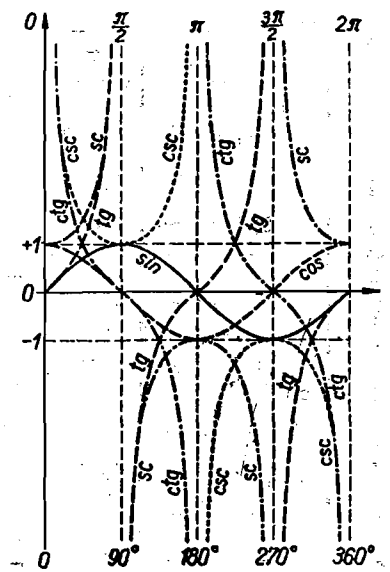
Vrijednosti funkcija za kutove koji su višekratnici od 30° i 45° navedene su u tablici na str. 230.

Karakter mijenjanja trigonometrijske funkcije pri povećavanju kuta od 0° do 360° prikazuje graf na sl. 135*.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija *nekog* kuta nalazimo po ovim pravilima:

1) Ako je kut veći od 360°, onda funkciju svodimo na funkciju kuta između 0° i 360° (a tangens i kotangens na kutove između 0° i 180°) po formulama (n je cijeli broj):

$\sin(360^\circ \cdot n + \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos(360^\circ \cdot n + \alpha) = \cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$,
$\operatorname{ctg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.



Sl. 135

* Graf sinusa je uobičajena sinusoida; o općenitijim sinusoidama vidi na str. 129.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove višekratnike od 30° i 45° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ i }\frac{\pi}{4}\right)$

Funkcije	Kutovi; I kvadrant				Kutovi; II kvadrant				Kutovi; III kvadrant				Kutovi; IV kvadrant			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sc	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
csc	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$

2) Ako je kut negativan, onda funkciju svodimo na funkciju pozitivnog kuta, po formulama:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

3) Ako je $90° < \alpha < 360°$, onda funkciju svodimo na funkciju šiljastog kuta po formulama za redukciju (vidi niže).

4) Ako je kut šiljast: $0° < \alpha < 90°$, vrijednost funkcije naći ćemo u tablicama (str. 56 do 67). Na primjer: $\sin(-1000°) = -\sin 1000° = -\sin(360° \cdot 2 + 280°) = -\sin 280° = +\cos 10° = +0{,}9848$*.

Formule za redukciju

Funkcija	$\beta = 90° \pm \alpha$	$\beta = 180° \pm \alpha$	$\beta = 270° \pm \alpha$	$\beta = 360° - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

2. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE FORMULE

Funkcije jednog kuta:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1,$$
$$\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1, \qquad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1,$$
$$\csc^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1, \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge (istoga kuta)**:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\csc\alpha},$$

* Vrijednosti funkcija za kutove zadane u radijanima nalaze se u tablicama na str. 68 do 71 koje su sastavljene za vrijednosti argumenata od 0 do 1,60. Ako zadani kut prelazi granice tablica, onda ćemo se poslužiti istim pravilima i formulama za redukciju, kao kad je kut zadan u stupnjevima

[na primjer, $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ itd.].

** U tim formulama ispred znaka korijena moramo postaviti predznak »plus« ili »minus«, prema tome u kome se kvadrantu kut nalazi.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{\sec^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}} = \sqrt{\csc^2\alpha-1}.$$

Funkcije zbroja i razlike kutova:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Funkcije višekratnih kutova:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha};$$

$\sin n\alpha$ i $\cos n\alpha$ za veće n prikladnije određujemo pomoću Moivreove formule za kompleksne brojeve (str. 603)*:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + in\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha - iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots,$$

* C_n^k je binomni koeficijent (vidi str. 210).

odakle je:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots,$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots.$$

Funkcije polovičnog kuta*:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Zbroj i razlika funkcija:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Produkt funkcija:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)],$$

* Vidi opasku** na str. 231.

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Potencije funkcija:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha),$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3),$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

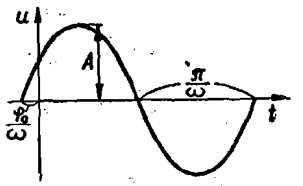
Za računanje $\sin^n\alpha$ i $\cos^n\alpha$ pri većim n možemo postupno upotrijebiti formule za $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ na str. 233.

3. SINUSNE VELIČINE

Definicije. U mnogim problemima mehanike i fizike razmatramo veličine koje su ovisne o vremenu t i izražavaju se formulom:

$$u = A\sin(\omega t+\varphi); \qquad (*)$$

takove veličine nazivamo *sinusnim*, a njihove vremenske promjene nazivamo *harmonijskim titranjem*. Graf funkcije (*) jest *opća sinusoida* (sl. 136) koja se od obične ($y = \sin x$) razlikuje po ovome: 1) njena *amplituda* (širina njihaja), tj. najveći otklon od osi t, je A, 2) njen *period* T (»*duljina vala*«) je $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω nazivamo *frekvencijom* titranja)*, 3) njena »*početna faza*« je kut φ.



Sl. 136

* U teoriji titranja tu veličinu obično nazivamo *cikličkom* ili *kružnom frekvencijom*.

Veličinu (*) možemo predočiti u obliku:

$$r = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \qquad (**)$$

pri čemu je $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$; veličine a, b, A i φ možemo predočiti elementima pravokutnog trokuta (sl. 137).

Matematičke operacije sa sinusnim veličinama

Zbroj dviju sinusnih veličina jednake frekvencije ω također je sinusna veličina iste frekvencije:

$$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi),$$

pri čemu je:

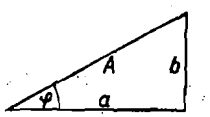
$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2};$$

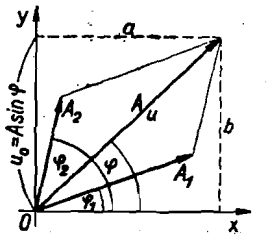
linearna kombinacija nekoliko sinusnih veličina s jednakom frekvencijom jest sinusna veličina iste frekvencije:

$$\Sigma c_iA_i\sin(\omega t+\varphi_1) = A\sin(\omega t+\varphi);$$

A i φ naći ćemo grafički u vektorskom dijagramu.



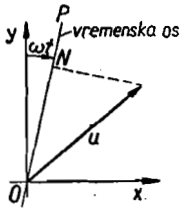
Sl. 137



Sl. 138

Vektorski dijagram sinusnih veličina. Sinusnu veličinu (*) ili (**) prikladno je prikazati u ravnini u obliku radijvektora u s polarnim koordinatama $\rho = A$, φ i Descartesovim $x = a$, $y = b$

(vidi str. 250 i 251); zbroj dviju sinusnih veličina prikazujemo sumom vektora koji predstavljaju pojedine sumande (sl. 138), a linearnu kombinaciju nekoliko sinusnih veličina odgovarajućom linearnom kombinacijom vektora. Tako prikazane sinusne veličine obično nazivamo *vektorskim dijagramom.*



Sl. 139

U vektorskom dijagramu veličinu u, koja odgovara zadanoj vrijednosti t, dobivamo na ovaj način:

Kroz ishodište O (sl. 139) povučemo *»vremensku os«* — os OP koja se okreće oko O u smjeru gibanja kazaljke na satu konstantnom kutnom brzinom ω; u početnom trenutku ($t = 0$) ta se os poklapa sa osi Oy. Tada je projekcija ON promatranog vektora $\mathbf{u}$ na vremensku os za svaki trenutak t jednaka vrijednosti sinusne veličine: $u = A \sin(\omega t + \varphi)$ (za $t = 0$, $u_0 = A \sin \varphi$ je projekcija $\mathbf{u}$ na os Oy, sl. 138).

4. RJEŠAVANJE TROKUTA

Pravokutni trokut; a i b su katete, c je hipotenuza; A i B su kutovi nasuprot stranicama a i b.

Osnovni odnosi: $a = c \sin A = c \cos B$, $a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

Zadano	Formule za računanje drugih elemenata		
c, A	$B = 90° - A$,	$a = c \sin A$,	$b = c \cos A$,
a, A	$B = 90° - A$,	$b = a \operatorname{ctg} A$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,
a, c	$\sin A = \dfrac{a}{c}$,	$b = c \cos A$,	$B = 90° - A$,
a, b	$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,	$B = 90° - A$.

Kosokutni trokut: a, b i c su stranice, A, B i C su kutovi nasuprot stranicama, S je površina, R je polumjer opisane kružnice, r je polumjer upisane kružnice, p je polovina opsega

$$[p = \tfrac{1}{2}(a + b + c)].$$

Osnovni odnosi:

1) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (»sinusov poučak«)

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (»kosinusov poučak«)

3) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$ (»tangensov poučak«)

4) $S = \frac{1}{2} ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dopunski odnosi:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos[\frac{1}{2}(A-B)]}{\cos[\frac{1}{2}(A+B)]} = \frac{\cos[\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin \frac{1}{2} C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin[\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin[\frac{1}{2}(A+B)]} = \frac{\sin[\frac{1}{2}(A-B)]}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Računanje duljina vezanih uz trokut:

Visina na stranicu a: $h_a = b \sin C = c \sin B$.

Težišnica na stranicu a: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$.

Simetrala kuta A: $l_A = \dfrac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$.

Polumjer opisane kružnice: $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$.

Polumjer upisane kružnice: $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$

$$= p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Zadano	Formule za računanje ostalih elemenata
1) Stranica i 2 kuta (a, A, B)	$C = 180° - A - B$, $\quad b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $\quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$
2) 2 stranice i kut među njima (a, b, C)	$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, $\quad \frac{A+B}{2} = 90° - {}^1/_2 C$ Dobivši $A+B$ i $A-B$, naći ćemo A i B, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$
3) 2 stranice i kut nasuprot jednoj stranici (a, b, A)	$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ Ako je $a \geqslant b$, onda je $B < 90°$ i ima samo jednu vrijednost; ako je $a < b$, onda: 1) B ima dvije vrijednosti za $b\sin A < a$ ($B_2 = 180° - B_1$). 2) B ima jednu vrijednost (90°) za $b\sin A = a$. 3) Trokut je nemoguć za $b\sin A > a$; $C = 180° - (A+B)$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$
4) 3 stranice (a, b, c)	$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$, $\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$, $\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$, $S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE (INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE) ILI ARKUS-FUNKCIJE

Definicije. *Arkus*-funkcijama od x (»*inverznim trigonometrijskim*«) nazivamo veličine y, određene jednadžbama:

$y = \operatorname{Arc\,sin} x$ (*arkus-sinus*), ako je $x = \sin y$,
$y = \operatorname{Arc\,cos} x$ (*arkus-kosinus*), ako je $x = \cos y$,
$y = \operatorname{Arc\,tg} x$ (*arkus-tangens*), ako je $x = \operatorname{tg} y$,
$y = \operatorname{Arc\,ctg} x$ (*arkus-kotangens*), ako je $x = \operatorname{ctg} y$.

} y mjerimo u radijanima

Primjeri:

$\operatorname{Arc\,sin} 0 = 0$ ili π ili 2π, općenito $\operatorname{Arc\,sin} 0 = k\pi$,

$\operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ili $-\frac{\pi}{3}$ ili $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, općenito

$$\operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$\operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ili $\frac{5\pi}{4}$, općenito $\operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

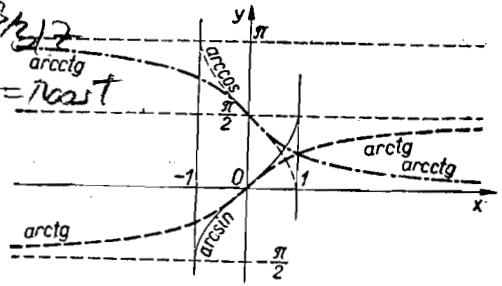
Glavne vrijednosti. Arkus-funkcije su *višeznačne*; njihove *glavne vrijednosti* (označujemo ih sa: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$) ograđene su:

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$0 \leqslant \arccos x \leqslant +\pi$,

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < +\frac{\pi}{2}$,

$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi$.



Sl. 140

Grafove arkus-funkcija vidi str. 132 i 133; grafovi njihovih glavnih vrijednosti prikazani su na sl. 140.

Izražavanje jednih arkus-funkcija s drugima*

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \left[\arccos\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right],$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \left[\arcsin\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \left[\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right],$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi - \operatorname{arc\,ctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x =$$

$$= \left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{x}\right].$$

Osnovni odnosi među arkus-funkcijama:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[xy < 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + y^2 < 1]$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x > 0, \quad y > 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 > 1]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x < 0, y < 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 > 1],$$

* Ove formule točne su samo za glavne vrijednosti arkus-funkcija, a formule u uglatim zagradama samo za pozitivne vrijednosti x (jer su granice glavnih vrijednosti različito određene za razne funkcije).

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[xy \geqslant 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1]$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x > 0, \quad y < 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 > 1]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$[x < 0, \quad y > 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 > 1],$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$
$$[x + y \geqslant 0]$$

$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$
$$[x + y < 0],$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad [x \geqslant y]$$

$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad [x < y],$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad [xy < 1]$$

$$= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \quad [x > 0, \quad xy > 1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \quad [x < 0, \quad xy > 1],$$

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \quad [xy > -1]$$

$$= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \quad [x > 0, \quad xy < -1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \quad [x < 0, \quad xy < -1],$$

$$2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left[|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1\right]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left[-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$2\arccos x = \arccos(2x^2-1) \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1]$$
$$= 2\pi - \arccos(2x^2-1) \qquad [-1 \leqslant x < 0],$$
$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \qquad [|x|<1]$$
$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \qquad [x>1]$$
$$= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \qquad [x<-1]$$
$$\cos(n\arccos x) = 2^{n-1}T_n(x) \qquad (n \geqslant 1^*),$$

pri čemu se $T_n(x)$ određuje jednadžbom:

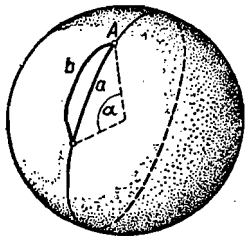
$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n}.$$

Ako je n cijeli broj, $T_n(x)$ je polinom od x (*polinom Čebiševa*).

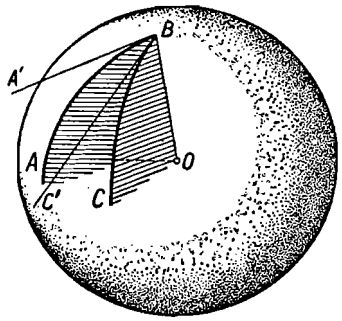
B. SFERNA TRIGONOMETRIJA

6. GEOMETRIJA NA KUGLI (SFERI)

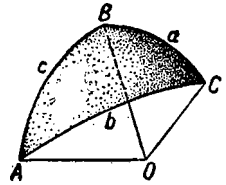
Geodetske linije na kugli. Presiječemo li kuglu ravninom kroz njeno središte, dobivamo na površini kugle (*sfere*) tzv. *glavnu kružnicu* kojoj je polumjer jednak polumjeru kugle. Kroz svake dvije točke A i B na kugli (s izuzetkom dijametralnih) možemo



Sl. 141



Sl. 142



Sl. 143

povući jednu glavnu kružnicu; njezin manji luk AaB (sl. 141) je najkraća linija (npr. AbB) na kugli koja spaja te točke (takozvana *geodetska linija*** na kugli) i na kugli igra istu ulogu kao i pravac u ravnini.

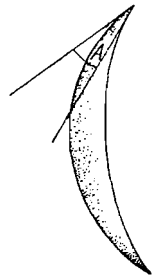
* Formula važi i za n koji nije cijeli broj.
** Vidi na str. 325.

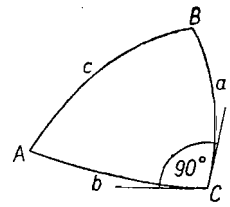
Mjerenje lukova i kutova na kugli. Duljina luka glavne kružnice, $\smile a$ sa središnjim kutom α (u radijanima), jednaka je $R\alpha$, gdje je R polumjer kugle. Za jednu istu kuglu prikladno je za jedinicu mjerenja luka uzeti polumjer R; tada je $\smile a = \alpha$. U narednim formulama primijenjena je ta jedinica za mjerenje.

Kut ABC što ga na kugli čine dva luka glavnog kruga (sl. 142) mjerimo kutom $A'BC'$ među tangentama na te lukove u točki B ili, što je isto, plošnim kutom koji tvore plohe OBA i OBC.

Sferni trokut. Tri glavne kružnice tvore na kugli nekoliko sfernih trokuta. Od njih ćemo promatrati onaj, kome su sve stranice i svi kutovi manji od 180°. Stranice trokuta a, b i c i kutove A, B i C mjerimo stranicama i kutovima pripadnog trobrida $OABC$ (sl. 143; O je središte kugle).

Osnovna svojstva sfernog trokuta: zbroj njegovih kutova $A+B+C$ uvijek je veći od 180°. Razliku $(A+B+C) - \pi = \delta$ izraženu u radijanima nazivamo *sfernim ekscesom* zadanog sfernog trokuta.


Sl. 144



Sl. 145

Površina sfernog trokuta: $S = R^2\delta$, gdje je R polumjer kugle, a δ je sferni eksces. *Površina sfernog dvokuta* koji čine dva luka glavnih kružnica (sl. 144) je $S = 2R^2A$ ($\sphericalangle A$ izražen u radijanima).

7. RJEŠAVANJE SFERNIH TROKUTA

Pravokutni trokuti (a i b su katete, c je hipotenuza, A i B su kutovi nasuprot stranica a i b, sl. 145).

Osnovni odnosi:

1) $\sin a = \sin c \sin A$,
2) $\sin b = \sin c \sin B$,
3) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$,
4) $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$,
5) $\cos c = \cos a \cos b$,
6) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$,
7) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$,
8) $\cos B = \cos b \sin A$,
9) $\cos A = \cos a \sin B$,
10) $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

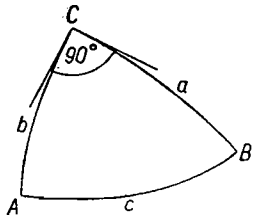
Zadano	Broj formule za računanje ostalih elemenata
Hipotenuza i kut: c, A	a (1), b (7), B (10)
Kateta i nasuprotni kut: a, A	b (3), c (1), B (9)
Kateta i susjedni kut: a, B	b (4), c (6), A (9)
Dvije katete: a, b	c (5), A (3), B (4)
Dva kuta: A, B	a (9), b (8), c (10)

Formule 1 do 10 možemo dobiti iz ovog *Neperovog pravila:* ako rasporedimo pet elemenata pravokutnog trokuta (bez pravog kuta) po kružnici redom kako se oni nalaze u trokutu i zamijenimo katete a i b s njihovim komplementarnim kutovima (sl. 146), tada je:

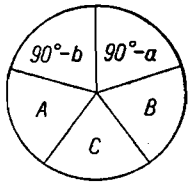
1) kosinus svakog elementa jednak produktu kotangensa dvaju susjednih mu elemenata.

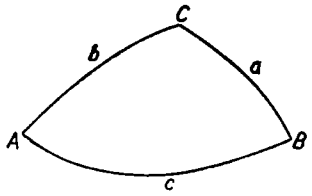
2) kosinus svakog elementa jednak produktu sinusa dvaju suprotnih mu elemenata.

Npr.: $\cos A = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg} c$, $\cos(90° - a) = \sin c \sin A$.



Sl. 146





Sl. 147

Kosokutni trokuti (A, B i C su kutovi trokuta; a, b i c su nasuprotne stranice, sl. 147).

Osnovni odnosi:

1) $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ (»sinusov poučak«),

2) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

3) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2 i 3 su »kosinusovi poučci«),

4) $\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C$,

5) $\sin A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos A \cos c$.

Zadano	Broj formule za računanje ostalih elemenata
Tri stranice: a, b, c	A (2), B i C (1)
Tri kuta: A, B, C	a (3), b i c (1)
Dvije stranice i kut među njima: a, b, C	B (4), A i c (1)
Dva kuta i stranica među njima: A, B, c	b (5), a i C (1)
Dvije stranice i kut nasuprot jednoj od stranica: a, b, B	A (1), c (5), C (1)
Dva kuta i stranica nasuprot jednom od kutova: A, B, b	a (1), C (4), c (1)

C. HIPERBOLNA TRIGONOMETRIJA*

8. HIPERBOLNE FUNKCIJE

Određivanje hiperbolnih funkcija

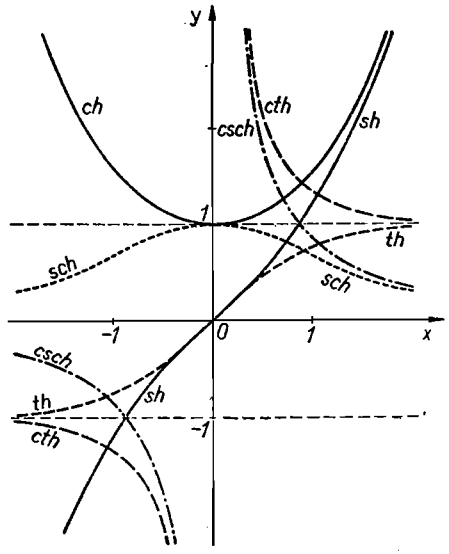
Sinus hiperbolni (skraćeno sh), *kosinus hiperbolni* (ili ch) i *tangens hiperbolni* (ili th) određeni su formulama:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Geometrijsko određivanje hiperbolnih funkcija analogno je određivanju trigonometrijskih funkcija (sinus, kosinus, tangens) vidi dalje (str. 248 i 249).



Sl. 148

* Pod tim nazivom sabrani su elementarni podaci o hiperbolnim funkcijama, analogni podacima o trigonometrijskim funkcijama.

Hiperbolni kotangens, sekans i *kosekans* određeni su kao recipročne veličine:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Tok hiperbolnih funkcija vidi se iz grafova prikazanih na sl. 148. Vidi također tekst na str. 133.

Tablice hiperbolnih funkcija vidi na str. 68 do 71.

9. OSNOVNE FORMULE HIPERBOLNE TRIGONOMETRIJE

Za hiperbolne funkcije vrijede formule analogne formulama za trigonometrijske funkcije (str. 231 i dalje)*.

Funkcije jednog argumenta:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1,$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \qquad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge (istog argumenta):

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}}{\operatorname{sch} x} = \frac{1}{\operatorname{csch} x},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{sch} x} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}{\operatorname{csch} x},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}} = \sqrt{\operatorname{csch}^2 x + 1}.$$

* Te formule možemo dobiti iz odgovarajućih formula za trigonometrijske funkcije pomoću jednostavnog pravila, vidi dalje, str. 247.

Funkcije zbroja i razlike dvaju argumenata:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \qquad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

Funkcije dvostrukog argumenta:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x : (1 + \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \qquad \operatorname{cth} 2x = (1 + \operatorname{cth}^2 x) : 2 \operatorname{cth} x.$$

Moivreova formula (vidi str. 232):

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$$

Funkcije polovičnog argumenta:

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{{}^1/_2 (\operatorname{ch} x - 1)}\,*, \qquad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{{}^1/_2 (\operatorname{ch} x + 1)}, \qquad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

Zbroj i razlika funkcija:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} {}^1/_2 (x \pm y) \operatorname{ch} {}^1/_2 (x \mp y),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} {}^1/_2 (x + y) \operatorname{ch} {}^1/_2 (x - y),$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} {}^1/_2 (x + y) \operatorname{sh} {}^1/_2 (x - y),$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

Veza između hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija:**

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \qquad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \qquad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, \qquad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz;$$

Svaku formulu koja međusobno povezuje hiperbolne funkcije od x ili ax (ali ne od $ax + b$) možemo dobiti iz odgovarajuće formule koja povezuje trigonometrijske funkcije od α (str. 231 i 232) zamjenom $\sin \alpha$ sa $i \operatorname{sh} x$ i $\cos \alpha$ sa $\operatorname{ch} x$. *Npr.*: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$,

$$\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{ili} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$i \operatorname{sh} 2x = 2i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \quad \text{ili} \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ itd.}$$

* Predznak »+« za $x > 0$ i »—« za $x < 0$.

** O funkcijama kompleksnih varijabli vidi na str. 606.

10. INVERZNE HIPERBOLNE FUNKCIJE

Definicije: *Inverznim hiperbolnim funkcijama* (»*area-funkcijama*«) x nazivamo veličine određene jednadžbama:

$y = \operatorname{Arsh} x$ (*area-sinus*), ako je $x = \operatorname{sh} y$,
$y = \operatorname{Arch} x$ (*area-kosinus*), ako je $x = \operatorname{ch} y$,
$y = \operatorname{Ar\,th} x$ (*area-tangens*), ako je $x = \operatorname{th} y$,
$y = \operatorname{Ar\,cth} x$ (*area-kotangens*), ako je $x = \operatorname{cth} y$.

Nazivi potječu od riječi area (površina), jer area-funkcije možemo predočiti površinom hiperbolnog sektora (vidi dalje).

Izražavanje logaritmima. U skladu s formulama na str. 245 i 246 imamo ove izraze area-funkcija pomoću logaritama:

$$\operatorname{Ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1),$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1),$$

$$\operatorname{Ar\,cth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1).$$

Grafove area-funkcija vidi na str. 135.

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge:

$$\operatorname{Ar\,sh} x = \pm\operatorname{Ar\,ch}\sqrt{x^2+1}^{*} = \operatorname{Ar\,th}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar\,cth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1} = \pm\operatorname{Ar\,th}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\operatorname{Ar\,th} x = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\operatorname{Ar\,ch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}^{*} = \operatorname{Ar\,cth}\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Ar\,cth} x = \operatorname{Ar\,sh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \pm\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}^{*} = \operatorname{Ar\,th}\frac{1}{x}.$$

Neki odnosi među inverznim hiperbolnim funkcijama:

$$\operatorname{Ar\,sh} x \pm \operatorname{Ar\,sh} y = \operatorname{Ar\,sh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right),$$

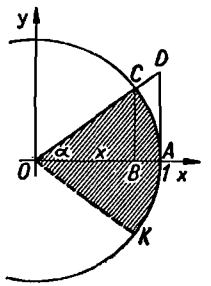
$$\operatorname{Ar\,th} x \pm \operatorname{Ar\,th} y = \operatorname{Ar\,th}\frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

* Predznak »+« za $x > 0$ i »—« za $x < 0$.

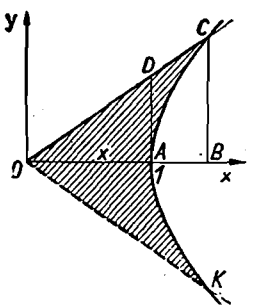
11. GEOMETRIJSKO ODREĐIVANJE HIPERBOLNIH FUNKCIJA

U trigonometrijskom krugu (str. 228) odredili smo funkcije sin α, cos α, tg α kao odsječke BC, OB, AD (pri $R = 1$), a argument α bio je središnji kut AOC. Za argument smo mogli uzeti veličinu x, jednaku površini (šrafiranoj na sl. 149) sektora COK sa središnjim kutom 2α, jer je $x = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ [$R = 1$, α mjeren u radijanima]. Time je: $\sin x = BC$, $\cos x = OB$, $\operatorname{tg} x = AD$.

Razmatrajući analogne funkcije površine, ali ne za kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ nego za istostranu hiperbolu s jednadžbom $x^2 - y^2 = 1$ (promatramo samo njenu desnu granu) i označujući sa x površinu analognog sektora COK (šrafiranog na sl. 150), definiramo hiperbolne funkcije: $\operatorname{sh} x = BC$; $\operatorname{ch} x = OB$; $\operatorname{th} x = AD$.



Sl. 149



Sl. 150

Ako površinu x* računamo metodom integralnog računa dobivamo izraze za BC, OB, AD:

$$x = \ln\left(BC + \sqrt{BC^2+1}\right) = \ln\left(OB + \sqrt{OB^2-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+AD}{1-AD},$$

odakle za hiperbolne funkcije dobivamo ove izraze s eksponentima (koje i upotrebljavamo za definiciju hiperbolnih funkcija):

$$BC = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \qquad OB = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$AD = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x.$$

* Vidi na str. 485.

TREĆI DIO

ANALITIČKA I DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

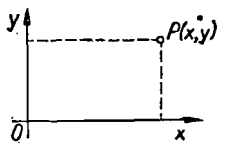
I. ANALITIČKA GEOMETRIJA

A. GEOMETRIJA U RAVNINI

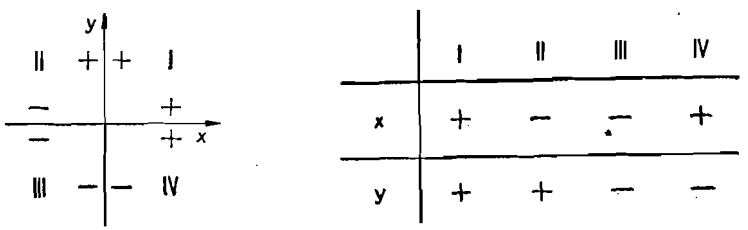
1. OSNOVNI POJMOVI I FORMULE

Koordinate. Položaj neke točke P u ravnini možemo odrediti pomoću ovog ili onog *koordinatnog sistema.* Brojeve kojima je određen položaj točke nazivamo njenim *koordinatama.* Najčešće upotrebljavamo Descartesov pravokutni i polarni koordinatni sistem.

Descartesovim (*kartezijevim*) *pravokutnim koordinatama* točke P (sl. 151) nazivamo udaljenosti (izražene u određenom mjerilu i uzete s određenim predznakom) te točke od dvaju međusobno okomitih pravaca — koordinatnih osi. Sjecište osi O nazivamo *početkom* (*ishodištem*) koordinata. Horizontalnu os obično nazivamo *apscisnom osi* (*os* Ox), a vertikalnu *ordinatnom osi* (*os* Oy). Na tim osima određujemo pozitivan smjer, za os Ox obično udesno, a za os Oy prema gore.



Sl. 151

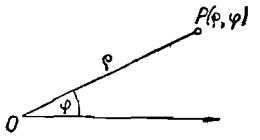


Sl. 152

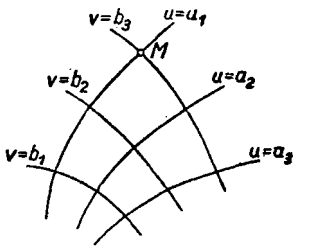
Koordinate točke P smatramo pozitivnim ili negativnim, u ovisnosti o tome na koju poluos pada projekcija točke P (vidi shemu na sl. 152).

Koordinate x i y nazivamo *apscisom* i *ordinatom* točke P. Oznaka $P(a, b)$ pokazuje da točka P ima apscisu a i ordinatu b.

Polarnim koordinatama točke P (sl. 153) nazivamo *radijvektor* ρ — udaljenost od točke P do zadane točke O (*pola*) i *polarni kut* φ — kut između pravca OP i zadanog pravca koji prolazi kroz pol (*polarne osi*). Polarni kut smatramo pozitivnim kada ga brojimo od polarne osi suprotno gibanju kazaljke na satu, a negativnim kada ga brojimo u suprotnom smislu.



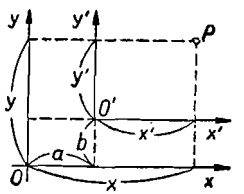
Sl. 153



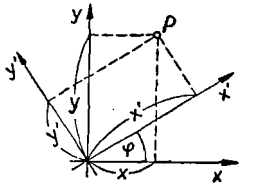
Sl. 154

Krivocrtne koordinate. Općenitiji sistem koordinata je krivocrtni, kada su u ravnini zadane dvije porodice krivulja (*koordinatnih linija*), svaka ovisna o jednom parametru, pri čemu kroz svaku točku prolazi samo po jedna linija svake porodice. Vrijednosti parametara, koji pripadaju tim krivuljama, jesu *krivocrtne koordinate* točke. Na sl. 154 točka M ima krivocrtne koordinate $u = a_1$, $v = b_3$. U Descartesovom sistemu koordinata koordinatne linije su pravci paralelni osima, a u polarnom kružnice sa središtem u polu i zrake koje izlaze iz pola.

Transformacija koordinata. Pri prelazu s jednog sistema na drugi koordinate se mijenjaju na ovaj način.



Sl. 155



Sl. 156

Paralelni pomak osi Descartesovih koordinata (sl. 155) (x i y su stare koordinate, x' *i* y' su nove koordinate, a i b su koordinate novog ishodišta O' u starom koordinatnom sistemu):

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$
$$x' = x - a, \qquad y' = y - b.$$

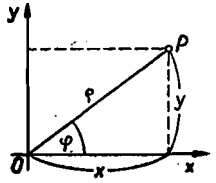
Vrtnja osi za kut φ* (vidi sl. 156):

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \qquad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$
$$x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi, \qquad y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi.$$

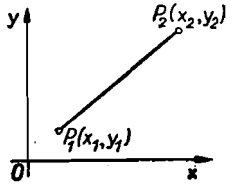
U općem slučaju transformaciju možemo rastaviti na paralelni pomak i zakret osi.

Prelaz s Descartesovih koordinata na polarne i obrnuto provodimo po ovim formulama, ako ishodište uzmemo za pol, a os apscisu za polarnu os (sl. 157):

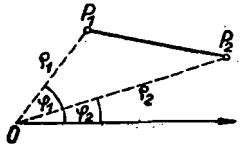
$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi;$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\rho}.$$



Sl. 157



Sl. 158



Sl. 159

Udaljenost dviju točaka $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ (sl. 158): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Ako su zadane polarne koordinate: $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ i $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ (sl. 159) tada je

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Dijeljenje dužine u danom omjeru. Koordinate točke P, za koju je $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ (sl. 160), određujemo po formulama:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$
$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

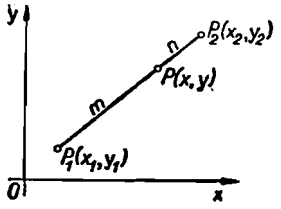
Središte odsječka P_1P_2: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Ako odsječcima P_1P i PP_2 damo pozitivan ili negativan predznak prema

* Kut φ smatramo pozitivnim ako se vrtnja vrši suprotno gibanju kazaljke na satu.

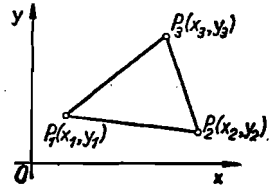
tome da li se njihovi smjerovi podudaraju sa smjerom P_1P_2 ili ne, tada gore navedene formule mogu poslužiti za $\lambda < 0$ za traženje točke koja odsječak P_1P_2 dijeli *izvana* u zadanom omjeru. Na primjer za takvu točku P, da P_2 bude raspolovnica odsječaka P_1P, je $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$.

Koordinate *težišta* sistema materijalnih točaka $M_i(x_i, y_i)$ s masama m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo po formulama:

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}.$$



Sl. 160



Sl. 161

Površina trokuta (sl. 161) s vrhovima $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)].$$

Tri točke leže na istom pravcu ako je: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Površina poligona s vrhovima $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

Kada računamo po tim formulama dobivamo pozitivnu površinu ako obilazimo vrhove po poredaju numeracije suprotno smislu okretanja kazaljke na satu, a negativnu u obrnutom slučaju.

Jednadžba krivulje. Svakoj jednadžbi $F(x, y) = 0$ koja povezuje koordinate x i y odgovara neka krivulja sa svojstvom da ko-

ordinate svake točke P na toj krivulji zadovoljavaju danu jednadžbu, i obrnuto, svaka točka kojoj koordinate zadovoljavaju jednadžbu leži na krivulji. Jednadžbu $F(x, y) = 0$ nazivamo jednadžbom te krivulje*. Ako je $F(x, y)$ polinom, onda krivulju $F(x, y) = 0$ nazivamo *algebarskom;* u tom slučaju stupanj polinoma (vidi str. 200) nazivamo *redom* krivulje. Ako jednadžbu krivulje ne možemo svesti na oblik $F(x, y) = 0$, gdje je $F(x, y)$ polinom, onda krivulju nazivamo *transcendentnom.*

Analogno možemo razmatrati jednadžbe krivulje u drugim koordinatnim sistemima. U daljnjem izlaganju ako nije izrijekom drukčije rečeno, služit ćemo se Descartesovim pravokutnim koordinatama.

2. PRAVAC

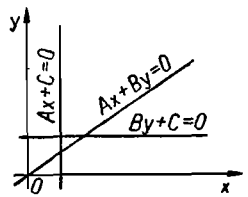
Jednadžba pravca. Svaka jednadžba, linearna s obzirom na koordinate, određuje pravac i obrnuto, jednadžba nekog pravca jest jednadžba prvog stupnja.

Opća jednadžba pravca:

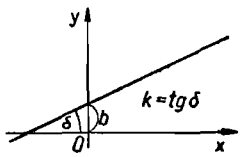
$$Ax + By + C = 0.$$

Ako je (sl. 162) $A = 0$, tada je pravac paralelan sa osi Ox; ako je $B = 0$, pravac je paralelan sa osi Oy; ako je $C = 0$, pravac prolazi kroz ishodište. Jednadžbu svakog pravca koji nije paralelan sa osi Oy (sl. 163) možemo predočiti u obliku:

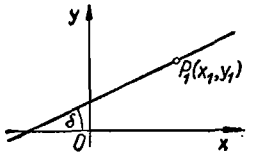
$$y = kx + b;$$



Sl. 162



Sl. 163



Sl. 164

k — *koeficijent smjera* pravca jednak je tg δ; δ je kut između pozitivnog smjera osi Ox i pravca; b je odsječak pravca na osi Oy (uz poštivanje predznaka).

Jednadžba pravca koji prolazi *kroz zadanu točku* $P_1(x_1, y_1)$ *u zadanom smjeru* (sl. 164):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad \text{gdje je} \quad k = \operatorname{tg} \delta.$$

* Može se dogoditi da zadanu jednadžbu $F(x, y) = 0$ ne zadovoljavaju koordinate ni jedne realne točke u ravnini [npr. $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $y = \ln(1 - x^2 - \operatorname{ch} x)$]. Tada *dogovorno* kažemo da zadana jednadžba određuje imaginarnu krivulju.

Jednadžba pravca *kroz dvije zadane točke* (sl. 165) $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

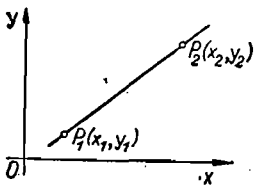
Segmentni oblik jednadžbe pravca. Ako pravac na koordinatnim osima siječe odsječke a i b (uz poštivanje predznaka sl. 166), tada je njegova jednadžba:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

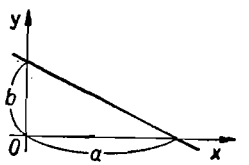
Normalna jednadžba pravca:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

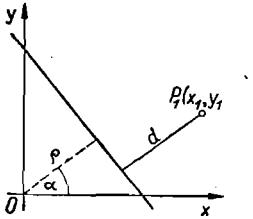
gdje je p udaljenost pravca od ishodišta, α *je* kut što ga sa osi Ox čini okomica spuštena iz ishodišta na pravac (sl. 167) ($p > 0$; $0 \leqslant \alpha < 2\pi$). Normalnu jednadžbu pravca možemo dobiti iz opće



Sl. 165



Sl. 166



Sl. 167

jednadžbe $Ax + By + C = 0$ tako da je pomnožimo s *normirajućim faktorom* $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Predznak od μ mora biti suprotan predznaku od C.

Udaljenost točke $P_1(x_1, y_1)$ od pravca (sl. 167):

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p;$$

d je jednak rezultatu koji dobivamo kada koordinate zadane točke uvrstimo u lijevu stranu normalne jednadžbe pravca. Po toj formuli je $d > 0$, ako P_1 i ishodište leže na raznim stranama zadanog pravca, i $d < 0$ u protivnom slučaju.

Sjecište pravaca. Koordinate (x_0, y_0) sjecišta dvaju pravaca dobivamo zajedničkim rješenjem obiju jednadžbi. Ako su ti pravci

zadani jednadžbama $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, tada je:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

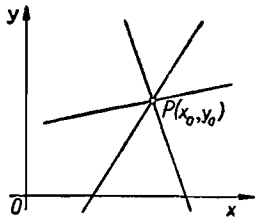
Ako je $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, onda su zadani pravci paralelni; u posebnom slučaju, za $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, pravci se podudaraju.

Treći pravac $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ prolazi kroz sjecište prvih dvaju (sl. 168), ako je:

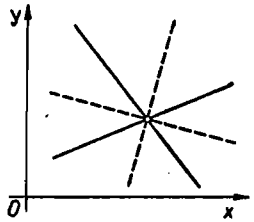
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednadžba svakog pravca koji prolazi kroz sjecišta dvaju pravaca (jednadžba *pramena pravaca*):

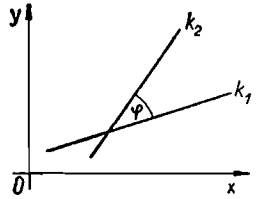
$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$



Sl. 168



Sl. 169



Sl. 170

Mijenjajući λ od $-\infty$ do $+\infty$ možemo dobiti bilo koji pravac pramena. Ako su jednadžbe dvaju pravaca zadane u normalnom obliku, onda pri $\lambda = \pm 1$ dobivamo *jednadžbe simetrala kutova* za kutove koje tvore ti pravci (sl. 169).

Kut φ između dva pravca (sl. 170) određujemo po ovim formulama: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

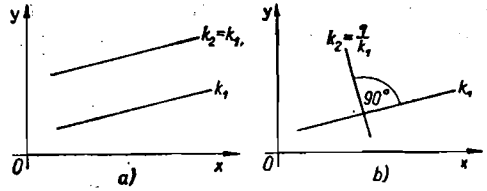
$$\sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ako su poznati koeficijenti smjera k_1 i k_2 pravaca, onda je:

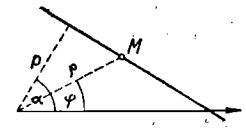
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}$$

(kut φ očitavamo od prvog pravca ka drugom, suprotno gibanju kazaljke na satu).



Sl. 171



Sl. 172

Pravci su *paralelni* (sl. 171, *a*) ako je $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ ili $k_1 = k_2$.

Pravci su međusobno *okomiti* (sl. 171, *b*) ako je

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{ili} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca u polarnim koordinatama (p je udaljenost od pola do pravca, α je kut između polarne osi i okomice iz pola na pravac, sl. 172):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

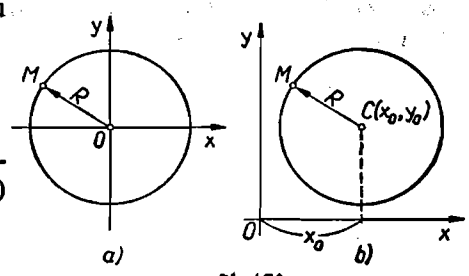
3. KRUŽNICA

Jednadžba u Descartesovim koordinatama. Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem u ishodištu (sl. 173, *a*):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem $C(x_0, y_0)$ (sl. 173, *b*):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$



Sl. 173

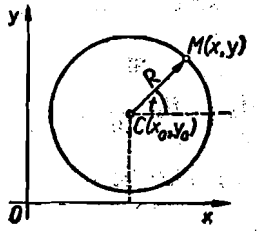
Opća jednadžba drugog reda

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

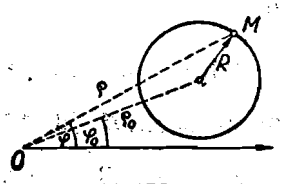
predstavlja kružnicu onda i samo onda, ako je $b = 0$ i $a = c$. U tom slučaju jednadžbu uvijek možemo svesti na oblik:

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0.$$

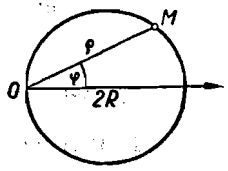
Tada je polumjer $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ i koordinate središta su: $x_0 = -m$, $y_0 = -n$. Ako je $q > m^2 + n^2$, onda jednadžba ne predočuje realnu krivulju; ako je $q = m^2 + n^2$, jednadžbu zadovoljava samo točka $M(x_0, y_0)$.



Sl. 174



Sl. 175



Sl. 176

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = x_0 + R\cos t, \qquad y = y_0 + R\sin t;$$

t je kut koji čini pomični polumjer sa pozitivnim smjerom osi Ox (sl. 174).

Jednadžba u polarnim koordinatama. Opća jednadžba (sl. 175) $\rho^2 + 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2$. Ako središte leži na polarnoj osi i kružnica prolazi kroz pol (sl. 176), onda jednadžba kružnice ima oblik $\rho = 2R\cos\varphi$.

4. ELIPSA

Elementi elipse (sl. 177): AB je *velika os* ($= 2a$), CD je *mala os* ($= 2b$), A, B, C, D su *tjemena*, O je *središte*, F_1 i F_2 su *žarišta* (točke koje leže na velikoj osi s obje strane središta na udaljenosti $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ od njega), $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$) je *ekscentricitet*, p je *žarišni parametar* (polovica tetive kroz žarište paralelno s malom osi) $p = \frac{b^2}{a}$.

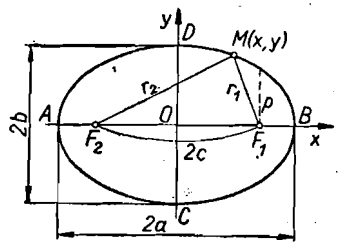
Jednadžba elipse: *normalna jednadžba* (ako se koordinatne osi podudaraju s osima elipse):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

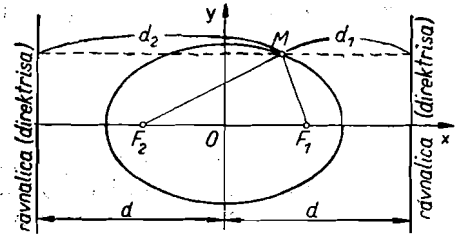
u parametarskom obliku:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t;$$

jednadžba u polarnim koordinatama, vidi str. 267.



Sl. 177



Sl. 178

Žarišna svojstva elipse (*definicija elipse*). Elipsa je geometrijsko mjesto točaka za koje je zbroj udaljenosti od dviju zadanih točaka (žarišta) konstantna veličina ($= 2a$). Svaku od tih udaljenosti (žarišni radijvektor točke elipse s apscisom x) izražavamo formulom*:

$$r_1 = MF_1 = a - ex, \qquad r_2 = MF_2 = a + ex, \qquad r_1 + r_2 = 2a.$$

Ravnalice (direktrise) su pravci paralelni s malom osi u udaljenosti $d = \frac{a}{e}$ od nje (sl. 178). Za neku točku $M(x, y)$ elipse je $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (*svojstvo ravnalica elipse* vidi na str. 267.)

* Ovdje i dalje, u formulama koje sadrže koordinate podrazumijevamo da su elipse zadane normalnim jednadžbama.

Promjeri su tetive koje prolaze kroz središte elipse: one se u središtu raspolavljaju (sl. 179). Geometrijsko mjesto središta tetiva paralelnih s jednim promjerom elipse jest promjer *konjugiran* zadanom promjeru. Ako su k i k' koeficijenti smjera konjugiranih promjera, onda je $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$. Ako su duljine konjugiranih promjera $2a_1$ i $2b_1$, a α i β šiljasti kutovi između promjera i velike osi:

$$(k = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad k' = \operatorname{tg}\beta),$$

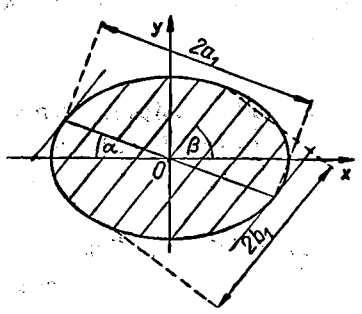
onda je:

$$a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab$$

i:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

(*Apolonijev teorem*).



Sl. 179

Tangenta u točki $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Normala i tangenta na elipsu simetrale su unutarnjeg, odnosno vanjskog kuta među radijvektorima dirališta (sl. 180). Pravac $Ax + By + C = 0$ dira elipsu, ako je $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2 = 0$.

Polumjer zakrivljenosti u točki $M(x_0, y_0)$ (vidi sl. 180):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

gdje je u kut između tangente i radijvektora dirališta.

Za tjemena A i B (sl. 177): $R = \frac{b^2}{a} = p$. Za tjemena C i D: $R = \frac{a^2}{b}$.

Površina $S = \pi ab$. Površina isječka $BOM = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}$ (sl. 181). Površina odsječka $MBN = ab\arccos\frac{x}{a} - xy$.

Opseg elipse je $L = 4aE(e) =$

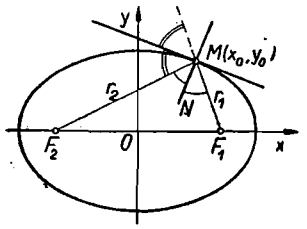
$$= 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right],$$

gdje je $E(e) = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ potpuni eliptički integral druge vrste (vidi str. 422). Ako označimo $\frac{a-b}{a+b} = \lambda$, onda je:

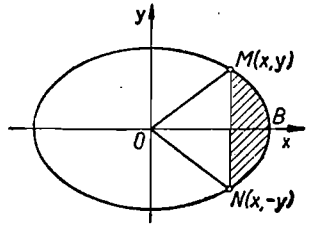
$$L = \pi(a+b)\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16384} + \ldots\right].$$

Približne formule:

$$L = \pi[1{,}5\,(a+b) - \sqrt{ab}]; \qquad L = \pi(a+b)\frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^2}.$$



Sl. 180



Sl. 181

5. HIPERBOLA

Elementi hiperbole (sl. 182); AB je *realna os* ($= 2a$); A i B su *tjemena*, O je *središte*, F_1 i F_2 su *žarišta* — točke koje leže na realnoj osi s obje strane od središta na udaljenosti c (većoj od a); CD je *imaginarna os* ($= 2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$); p je *žarišni parametar* (polovica tetive koja prolazi kroz fokus okomito na realnu os) $p = \frac{b^2}{a}$; $e = \frac{c}{a} > 1$ je *ekscentricitet*.

Jednadžba hiperbole: *normalna jednadžba* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ako se os Ox podudara s realnom osi hiperbole); *u parametarskom obliku:*

$$x = a\operatorname{ch} t, \qquad y = b\operatorname{sh} t$$

(ili $x = a\sec t, \qquad y = b\operatorname{tg} t$);

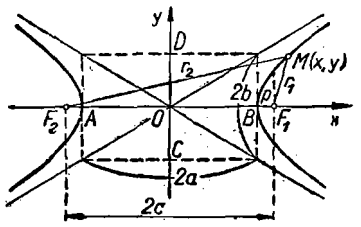
u polarnim koordinatama, vidi str. 267.

Žarišna svojstva hiperbole (*definicija hiperbole*). Hiperbola je geometrijsko mjesto točaka, za koje je razlika udaljenosti od dviju zadanih točaka (žarišta) konstantna veličina ($= 2a$). Točke za koje je $r_1 - r_2 = 2a$ pripadaju jednoj *grani* hiperbole (na sl. 182 lijevoj); točke za koje je $r_2 - r_1 = 2a$ pripadaju drugoj grani (desnoj). Svaka od tih udaljenosti (žarišni radijvektor točke hiperbole s apscisom x) izražava se formulom*

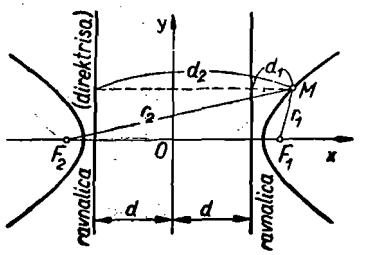
$$r_1 = \pm (ex - a), \qquad r_2 = \pm (ex + a)$$

(gornji predznak za točke desne grane, a donji za lijeve); $r_2 - r_1 = \pm 2a$.

Ravnalice (direktrise) su pravci okomiti na realnu os i raspoređeni u udaljenosti $d = \frac{a}{e}$ od središta (sl. 183). Za neku točku $M(x, y)$ hiperbole je $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (*svojstva hiperbole s obzirom na ravnalice* vidi na str. 267).



Sl. 182



Sl. 183

Tangenta u točki $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Tangenta i normala na hiperbolu simetrale su unutrašnjeg, odnosno vanjskog kuta među radijvektorima dirališta (sl. 184). Pravac $Ax + By + C = 0$ dira hiperbolu ako je $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

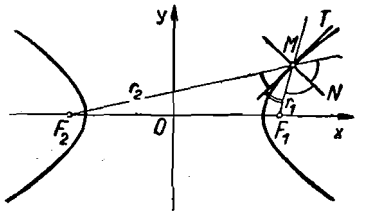
Asimptote hiperbole (sl. 185) su pravci kojima se grane hiperbole neograničeno približavaju pri udaljavanju u beskonačnost (opće određivanje asimptota vidi na str. 303). Koeficijent smjera asimptota $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm \frac{b}{a}$. Jednadžba obiju asimptota $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Odsječak tangente TT_1 među asimptotama u diralištu se raspolavlja: $TM = TM_1$. Površina trokuta TOT_1 između tangente i

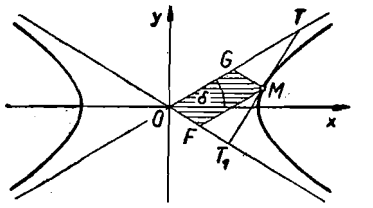
* Ovdje i dalje u formulama koje sadrže koordinate podrazumijevamo da je hiperbola zadana normalnom jednadžbom.

obiju asimptota je ab (za neku točku M). Ako kroz točku M hiperbole povučemo pravce MF i MG paralelne asimptotama, onda je površina $OFMG = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$.

Pridružene hiperbole (sl. 186) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (nacrtana na slici 186 isprekidanom crtom) imaju zajedničke asimptote. Realna os svake od njih jednaka je imaginarnoj osi druge i obrnuto:



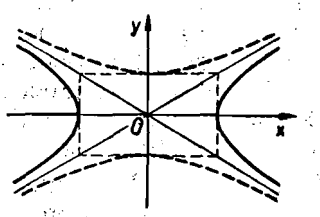
Sl. 184



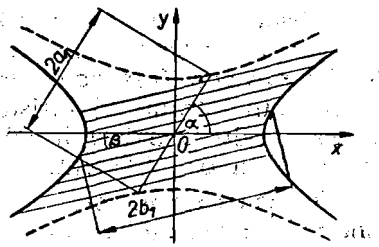
Sl. 185

Promjeri su tetive zadane i njoj pridružene hiperbole, koje prolaze kroz zajedničko središte hiperbola; u središtu se raspolavljaju.

Dva promjera s koeficijentima smjera k i k' nazivamo *konjugiranim*, ako je $kk' = \frac{b^2}{a^2}$. Svaki od konjugiranih promjera raspolavlja tetive (zadane hiperbole ili njoj pridružene) paralelne drugom promjeru* (sl. 187). Ako su duljine konjugiranih promjera $2a_1$ i $2b_1$, a α i β su šiljasti kutovi koje tvore promjeri s realnom osi ($\alpha > \beta$), onda je: $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta)$.



Sl. 186



Sl. 187

Polumjer zakrivljenosti R hiperbole u točki $M(x_0, y_0)$ (oznake vidi na str. 262):

$$R = a^2b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

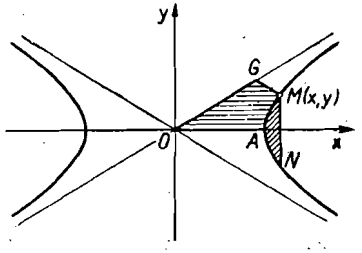
* Od dva konjugirana promjera samo jedan $\left(\text{onaj za koji je } |k| < \frac{b}{a}\right)$ presijeca hiperbolu. Pri tome dobivenu tetivu — promjer u užem smislu riječi — raspolavlja središte.

gdje je u kut između tangente i radijvektora dirališta. U tjemenima A i B (sl. 182): $R = p = b^2/a$.

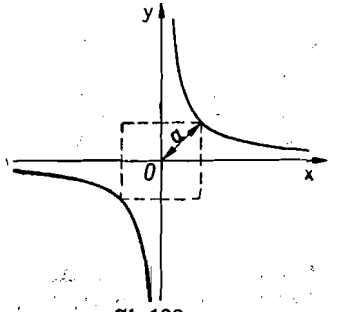
Površina odsječka hiperbole (sl. 188):

$$AMN = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}.$$

Površina $OAMG = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln\frac{2OG}{c}$ (MG je paralelno asimptoti).



Sl. 188



Sl. 189

Istostrana hiperbola je hiperbola s jednakim osima: $a = b$. Njena jednadžba je $x^2 - y^2 = a^2$. Asimptote istostrane hiperbole su međusobno okomite. Ako asimptote uzmemo za koordinatne osi (sl. 189), tada je jednadžba istostrane hiperbole $xy = a^2/2$.

6. PARABOLA

Elementi parabole (sl. 190): Ox je *os parabole*, O je *tjeme*, F je *žarište* (točka koja leži na osi, na udaljenosti $p/2$ od tjemena), NN' je *ravnalica* (pravac okomit na os i udaljen za $p/2$ od tjemena, na suprotnu stranu od žarišta), p je *žarišni parametar* (udaljenost od žarišta do ravnalice ili polovina tetive koja prolazi kroz žarište okomito na os). Ekscentricitet parabole je jedan (vidi str. 267).

Jednadžba parabole: *normalna jednadžba* $y^2 = 2px$ (ako je ishodište u tjemenu parabole, os Ox podudara se s njenom osi, parabola je okrenuta tjemenom ulijevo*). *Jednadžbu u polarnim koordinatama* vidi na str. 267. *Jednadžba parabole s vertikalnom osi* (sl. 191):

$$y = ax^2 + bx + c,$$

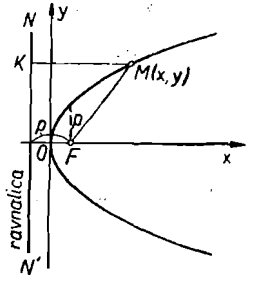
parametar parabole po toj jednadžbi:

$$p = \frac{1}{2|a|};$$

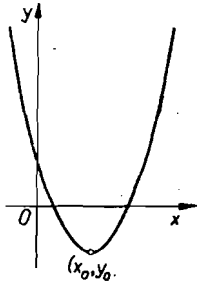
* Vidi na str. 265.

za $a > 0$ parabola je okrenuta tjemenom prema dolje,* pri $a < 0$ tjemenom prema gore*; koordinate tjemena: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

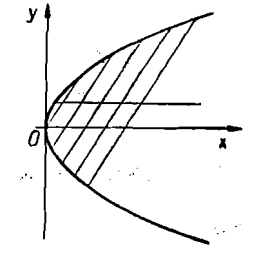
Osnovno svojstvo (*definicija parabole*): parabola je geometrijsko mjesto točaka $M(x, y)$ jednako udaljenih (sl. 190) od zadane točke (fokusa) i od zadanog pravca (ravnalice)**: $MF = MK = x + \frac{p}{2}$; MF je žarišni radijvektor točke parabole.



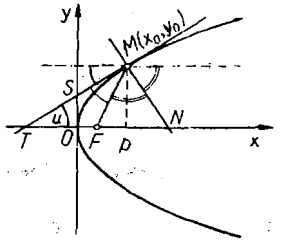
Sl. 190



Sl. 191



Sl. 192



Sl. 193

Promjer je pravac paralelan osi parabole. Promjer raspolavlja tetive paralelne tangenti na kraju promjera (sl. 192). Ako je koeficijent smjera tih tetiva k, onda je jednadžba promjera: $y = \frac{p}{k}$.

Tangenta na parabolu (sl. 193) u točki $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu $yy_0 = p(x + x_0)$. Tangenta i normala na parabolu simetrale su kutova između žarišnog radijvektora i promjera kroz dirališta

* Pretpostavljamo da je pozitivni smjer osi Ox udesno, a pozitivni smjer osi Oy prema gore.

** Ovdje i dalje u formulama s koordinatama podrazumijevamo da je parabola zadana normalnom jednadžbom.

Odsječak tangente na parabolu između dirališta i sjecišta s osi parabole (osi Ox) raspolavlja tangenta u tjemenu parabole (os Oy): $TS = MS$; $TF = FM$; $TO = OP = x_0$. Pravac $y = kx + b$ dira parabolu ako je $p = 2bk$.

Polumjer zakrivljenosti parabole u točki $M(x_1, y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{n^3}{p^2},$$ gdje je n duljina normale MN (sl. 193). U tjemenu O polumjer zakrivljenosti je $R = p$.

Površina odsječka parabole $MON = \frac{2}{3}$ površine $PQNM$ (sl. 194).

Površina $OMR = \frac{2}{3}xy$.

Duljina luka parabole od tjemena O do točke $M(x, y)$:

$$\widehat{OM} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Približno za male $\frac{x}{y}$: $\widehat{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.

7. KRIVULJE DRUGOG REDA (ČUNJOSJEČNICE)

Opća jednadžba krivulje drugog reda:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

određuje elipsu (u posebnom slučaju kružnicu), hiperbolu, parabolu ili par pravaca (*degenerirana* krivulja drugog reda).

Invarijante krivulje drugog reda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + c.$$

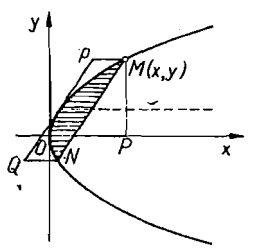
Te se veličine ne mijenjaju pri pomaku početka i pri vrtnji koordinatnih osi, tj. ako nakon transformacije koordinata jednadžba krivulje dobje oblik:

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0:$$

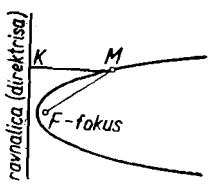
tada veličine Δ, δ i S, izračunate po novim koeficijentima, zadržavaju početne vrijednosti.

Određivanje oblika krivulje nacrtane prema zadanoj jednadžbi drugog stupnja i njena transformacija na normalni oblik vrši se prema tablici na str. 268 i 269.

Opća svojstva krivulja drugog reda. *Čunjosječnice.* Pravilan kružni čunj pri presijecanju s ravninom daje na njoj čunjosječnicu. Ako presječna ravnina ne prolazi kroz vrh čunja presjek će biti hiperbola, parabola ili elipsa, u ovisnosti o tome da li je presječna ravnina paralelna dvjema, samo jednoj ili nijednoj izvodnici čunja. Pri presijecanju čunja s ravninom koja prolazi kroz njegov vrh dobivamo degenerirane čunjosječnice ($\Delta = 0$, vidi tablicu na str. 268 i 269). Paralelne pravce dobivamo ako čunj degenerira u valjak (vrh čunja pomakne se u beskonačnost).



Sl. 194



Sl. 195

Svojstva s obzirom na ravnalicu. Geometrijsko mjesto točaka M (sl. 195), za koje je omjer njihovih udaljenosti od zadane točke (*žarište*) F i od zadanog pravca (*ravnalice*) konstanta jednaka e, krivulja je drugog reda s ekscentricitetom jednakim e. Za $e < 1$ dobivamo elipsu, za $e = 1$ parabolu, za $e > 1$ hiperbolu.

Krivulja određena sa 5 točaka. Kroz zadanih 5 točaka prolazi samo jedna krivulja drugog reda. Ako barem tri od zadanih točaka leže na istome pravcu, dobivamo degeneriranu krivulju.

Jednadžba u polarnim koordinatama. U polarnim koordinatama krivulje drugog reda imaju jednadžbu $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ (p je parametar, e je ekscentricitet zadane krivulje, pol je u žarištu, polarna os usmjerena je od žarišta prema bližem tjemenu*).

* Za hiperbole se s tom jednadžbom određuje samo jedna grana; ako se za ρ pripuštaju samo pozitivne vrijednosti.

Transformacija jednadžbi krivulja drugog reda na normalan oblik*

			Oblik krivulje
Centralne krivulje $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	a) $\Delta \cdot S < 0$ — realna b) $\Delta \cdot S > 0$ — imaginarna**
		$\Delta = 0$	Par imaginarnih** pravaca sa zajedničkom realnom točkom
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbola
		$\Delta = 0$	Par pravaca koji se sijeku
Parabolne krivulje $\delta = 0$***		$\Delta \neq 0$	Parabola
		$\Delta = 0$	Par pravaca, paralelnih, ako je $d^2 - af > 0$; podudarnih, ako je $d^2 - af = 0$; imaginarnih**, ako je $d^2 - af < 0$.

* Oznake vidi na str 266.

** Vidi napomenu na str. 254.

*** U slučaju $\delta = 0$ pretpostavljamo da ni jedan od koeficijenata a, b, c nije jednak nuli. Ako su dva koeficijenta (a i b ili b i c) jednaka nuli, onda se redukcija

Potrebna transformacija koordinata	Normalna jednadžba nakon transformacije
1) Pomak ishodišta u *središte* krivulje koja ima koordinate: $x_0 = \frac{be - cd}{\delta}$, $y_0 = \frac{bd - ae}{\delta}$ 2) Vrtnja osi za kut α, određen jednadžbom: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a - c}$. Predznak od $\sin 2\alpha$ mora se podudarati s predznakom od $2b$. Pri tome je koeficijent smjera nove osi x': $k = \frac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}}{2b}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$ $a' = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$ $c' = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$ a' i c' su korijeni kvadratne jednadžbe $u^2 - Su + \delta = 0$
1) Pomak ishodišta u tjeme parabole koja ima koordinate x_0 i y_0 dobivene iz jednadžbi: $ax_0 + by_0 + \frac{ad + be}{S} = 0,$ $\left(d + \frac{dc - be}{S}\right) x_0 +$ $+ \left(e + \frac{ae - bd}{S}\right) y_0 + f = 0.$ 2) Vrtnja osi za kut α dobiven iz jednadžbe: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b};$ predznak od $\sin \alpha$ mora biti suprotan predznaku od a.	$y'^2 = 2px';$ $p = \frac{ae - bd}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$
Vrtnja osi za kut α dobiven iz jednadžbe: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b};$ predznak od $\sin \alpha$ mora biti suprotan predznaku od a.	$Sy'^2 + 2\frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} y' + f = 0,$ dovede se u oblik: $(y' - y'_0)(y' - y'_1) = 0$

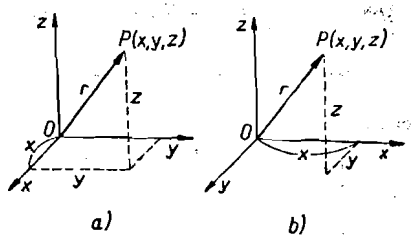
jednadžbe svodi na paralelan pomak osi; jednadžba $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ dobiva oblik $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, a jednadžba $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ oblik $(x - x_0)^2 = 2p(y - y')$.

B. GEOMETRIJA U PROSTORU

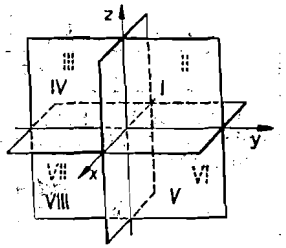
8. OSNOVNI POJMOVI I FORMULE

Koordinate. Položaj neke točke P u prostoru možemo odrediti pomoću nekog *koordinatnog sistema*. Najčešće upotrebljavamo ove koordinatne sisteme: 1) Descartesov pravokutni, 2) cilindarski i 3) sferni (prostorni polarni).

Descartesovim pravokutnim koordinatama točke P nazivamo udaljenosti* te točke, uzete s određenim predznakom, od tri međusobno okomite koordinatne plohe ili, što je isto, projekcije radijvektora r točke P (vidi str. 628). na tri međusobno okomite *koordinatne osi*. U ovisnosti o međusobnom rasporedu pozitivnih smjerova koordinatnih osi mogući su *desni* (sl. 196, *a*) i *lijevi* (sl. 196, b) koordinatni sistemi. U daljnjem je na crtežima primijenjen desni



Sl. 196



Sl. 197

sistem (formule ne ovise o obliku koordinatnog sistema). Sjecište koordinatnih osi nazivamo *ishodištem* koordinata. Koordinate x, y, z nazivamo po redu *apscisom*, *ordinatom* i *aplikatom*. Oznaka $P(a, b, c)$ označava da točke P ima koordinate $x = a$, $y = b$ i $z = c$. Predznaci koordinata ovise o oktantu u kojem se točka nalazi (sl. 197):

Oktant	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Koordinatne plohe za koje je jedna od koordinata konstantna, ovdje su ravnine paralelne koordinatnim ravninama, a *koordinatne*

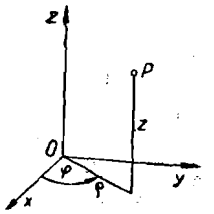
* Izraženo u jedinicama nekog mjerila.

linije, duž kojih se mijenja samo jedna koordinata, jesu pravci paralelni koordinatnim osima. Koordinatne plohe sijeku se u koordinatnim linijama.

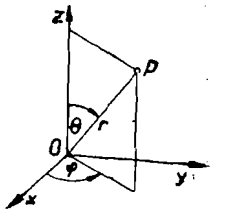
Općenitiji sistem *krivocrtnih koordinata* dobivamo tako da zadamo tri bilo koje porodice takvih koordinatnih ploha, da kroz svaku točku prostora prolazi po jedna ploha svake porodice. Položaj točke u takvom sistemu određujemo po vrijednostima parametara koordinatnih ploha, koje prolaze kroz tu točku Najčešće upotrebljavamo niže opisane cilindarske i sferne sisteme krivocrtnih koordinata.

Cilindarske koordinate (sl. 198): ρ i φ su polarne koordinate projekcije točke P na osnovnu plohu (obično xOy), z je aplikata, tj. udaljenost od točke P do osnovne plohe.

Za cilindarske koordinate koordinatne plohe su ravnine okomite na osi z ($z = \text{const}$), poluravnine omeđene sa osi z ($\varphi = \text{const}$)



Sl. 198



Sl. 199

i cilindarske plohe, kojima je os z os ($\rho = \text{const}$). Koordinatne linije su sjecišta tih ploha.

Formule za prelaz od cilindarskih koordinata na kartezijske i obrnuto:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \qquad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{Arcsin} \frac{y}{\rho}.$$

Sferne (prostorne polarne) koordinate: r je duljina *radijvektora*, φ je *duljina*, Θ je *udaljenost od pola*. Pozitivni smjerovi pokazani su na sl. 199. Ako sfernim koordinatama damo vrijednosti u granicama: $0 \leqslant r < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$, dobivamo jednoznačno sve točke prostora.

Koordinatne plohe su kugle sa središtem u ishodištu ($r = \text{const}$), poluravnine omeđene sa osi z ($\varphi = \text{const}$), čunjevi (s vrhom u ishodištu) za koje je os os z ($\Theta = \text{const}$). Koordinatne linije su sjecišta tih ploha.

Formule za prelaz od sfernih koordinata na kartezijske i obrnuto:

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \Theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \qquad \Theta = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

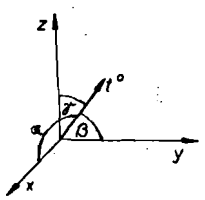
Smjer u prostoru označuje jedinični vektor $\mathbf{t}^\circ$ (vidi na str. 627) ili njegove koordinate, tj. kosinusi kutova (sl. 200) između zadanog smjera i pozitivnog smjera koordinatnih osi (*kosinusi smjera*):

$$l = \cos \alpha; \qquad m = \cos \beta; \qquad n = \cos \gamma; \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

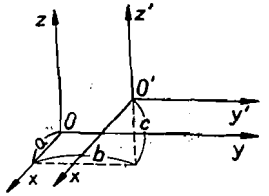
Kut φ između dva zadana smjera sa kosinusima smjerova l_1, m_1, n_1 i l_2, m_2, n_2:

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Dva smjera su međusobno okomita ako je $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.



Sl. 200



Sl. 201

Transformacija pravokutnih koordinata

Paralelni pomak (x, y i z su stare koordinate; x', y' i z' su nove; a, b i c su koordinate novog ishodišta u starim koordinatama, sl. 201):

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b, \qquad z = z' + c;$$
$$x' = x - a, \qquad y' = y - b, \qquad z' = z - c.$$

Vrtnja osi (sl. 202). Ako kosinuse smjerova novih osi x', y' i z' označimo po dolje naznačenoj shemi, dobivamo:

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z';$$
$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$
$$y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$
$$z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

U odnosu na stare osi	Kosinusi novih osi		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Determinanta transformacije jest:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Svojstva determinante transformacije:

1) $\Delta = \pm 1$ (plus, ako je lijevi sistem prešao u lijevi ili desni u desni, i minus, ako je lijevi prešao u desni ili obrnuto).

2) Zbroj kvadrata elemenata jednog retka ili stupca jest 1.

3) Zbroj produkata pripadnih elemenata dvaju redaka ili dvaju stupaca jednak je nuli.

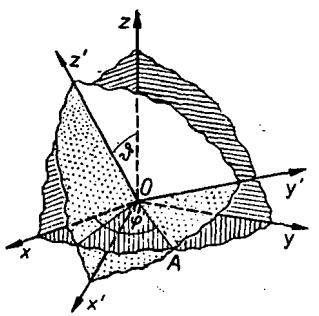
4) Svaki element jednak je svojem algebarskom komplementu (vidi na str. 191) pomnoženom sa $\Delta = \pm 1$.

Eulerovi kutovi. Položaj novog koordinatnog sistema u odnosu na stari može se potpuno karakterizirati sa tri kuta, koje je uveo L. Euler (sl. 202):

1) kut *nutacije* ϑ između pozitivnog smjera osi Oz i Oz' $(0 \leqslant \vartheta < \pi)$;

2) kut *precesije* ψ između osi Ox i pravca OA, sjecište ravnine xOy i $x'Oy'$, za koje je izabran pozitivan smjer tako da OA, Oz i Oz' tvore trojku iste orijentacije kao i koordinatne osi*; kut ψ mjeri se u smislu od Ox prema Oy $(0 \leqslant \psi < 2\pi)$;

3) kut *rotacije* φ između OA i Ox'; mjeri se u smislu od Ox' prema Oy' $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.



Sl. 202

Ako označimo

$$\cos \vartheta = c_1, \qquad \cos \psi = c_2, \qquad \cos \varphi = c_3,$$
$$\sin \vartheta = s_1, \qquad \sin \psi = s_2, \qquad \sin \varphi = s_3,$$

onda je:

$$l_1 = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, \qquad l_2 = -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, \qquad l_3 = s_1 s_2,$$
$$m_1 = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3, \qquad m_2 = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, \qquad m_3 = -s_1 c_2,$$
$$n_1 = s_1 s_3, \qquad n_2 = s_1 c_3, \qquad n_3 = c_1.$$

* O orijentaciji trojke smjerova vidi na sr. 631.

Udaljenost dviju točaka: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 203) je $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

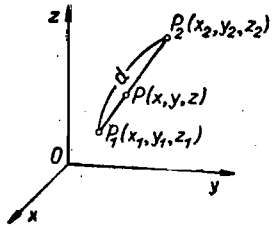
Kosinusi smjera dužine P_1P_2:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru (sl. 203).

Koordinate točke P za koju je

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda,$$



Sl. 203

određujemo po formulama:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Za *polovište* dužine:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Koordinate *težišta* sistema materijalnih točka $M_i(x_i, y_i)$ s masama m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo po formulama (sume idu od $i = 1$ do $i = n$):

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

Volumen trostrane piramide s vrhovima $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ (sl. 204):

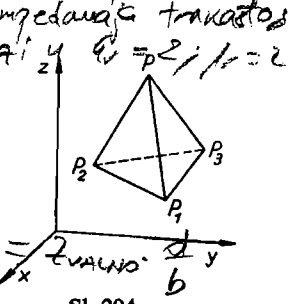
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}.$$

Pri računanju po toj formuli jest $V > 0$, ako se orijentacija trojke vektora PP_1, PP_2 i PP_3 poklapa s orijentacijom koordinatnog sistema i $V < 0$ u protivnom slučaju.

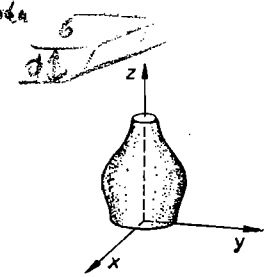
Četiri točke P, P_1, P_2 i P_3 leže u jednoj ravnini ako je:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednadžba plohe. Svakoj jednadžbi $F(x, y, z) = 0$ odgovara neka ploha, sa svojstvom da koordinate bilo koje točke P na toj plohi zadovoljavaju zadanu jednadžbu i, obrnuto, svaka točka kojoj koordinate zadovoljavaju zadanu jednadžbu leži na toj plohi. Jednadžbu $F(x, y, z) = 0$ nazivamo jednadžbom te plohe.



Sl. 204



Sl. 205

Jednadžba *valjkaste plohe* (vidi na str. 223) kojoj su izvodnice paralelne osi Ox (ili Oy ili Oz) ne sadržava koordinate x (odnosno y ili z): $F(y, z) = 0$ ili $F(x, z) = 0$ ili $F(x, y) = 0$. U ravnini yOz ta jednadžba predočuje presječnicu valjkaste plohe s tom ravninom.

Valjkasta ploha za koju su izvodnice određene kosinusima smjera (ili njima proporcionalnim veličinama), l, m, n, imaju jednadžbu $F(nx - lz, \; ny - mz) = 0$.

Ploha koja nastaje *rotacijom* krivulje $z = f(x)$ u ravnini xOz oko osi z (sl. 205) ima jednadžbu $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Analogno pišemo jednadžbe ploha koje nastaju rotacijom oko drugih koordinatnih osi.

Jednadžba *čunjaste plohe* (vidi na str. 225) s vrhom u ishodištu ima oblik $F(x, y, z) = 0$, gdje je F homogena funkcija koordinata (vidi na str. 355).

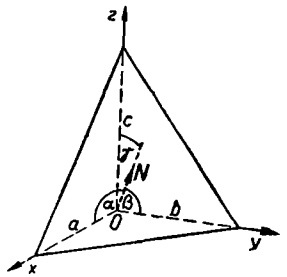
Jednadžbe krivulja u prostoru. Krivulja u prostoru zadana je sa tri jednadžbe: $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t)$. Svakoj vrijednosti parametra t odgovara određena točka krivulje. (Parametar ne mora imati neposredni geometrijski smisao). Drugi je način

određivanja krivulje u prostoru sa dvije jednadžbe: $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$. Svaka od njih određuje plohu. Točke kojima koordinate zadovoljavaju obje jednadžbe leže na presječnici zadanih ploha. Svaka jednadžba $F_1 + \lambda F_2 = 0$ za svaki λ predstavlja plohu koja prolazi kroz promatranu krivulju, i može zamijeniti jednu od prvotnih jednadžbi.

9. RAVNINA I PRAVAC U PROSTORU

Jednadžba ravnine. Svaka jednadžba, linearna s obzirom na koordinate, određuje ravninu i, obrnuto, jednadžba svake ravnine jest jednadžba prvog stupnja.

Opća jednadžba ravnine: $Ax + By + Cz + D = 0$; u vektorskom obliku: $\mathbf{rN} + D = 0$ (vidi na str. 631 i 635). Vektor $\mathbf{N}(A, B, C)$ (sl. 206) je okomit na ravninu; kosinusi smjera tog vektora jesu:



Sl. 206

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ako je $D = 0$, ravnina prolazi kroz ishodište; ako je $A = 0$ (ili $B = 0$, ili $C = 0$), ravnina je paralelna osi Ox (odnosno Oy ili Oz), ako je $A = B = 0$ (ili $A = C = 0$, ili $B = C = 0$) ravnina je paralelna ravnini Oxy (odnosno Oxz ili Oyz).

Normalna jednadžba ravnine:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

u vektorskom obliku: $\mathbf{rN}^\circ - p = 0$. Vektor $\mathbf{N}^\circ$ jest jedinični vektor, p je udaljenost ravnine od ishodišta. Normalnu jednadžbu možemo dobiti iz opće jednadžbe množenjem normirajućim faktorom $\pm\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (predznak od μ mora biti suprotan predznaku D).

Segmentni oblik jednadžbe ravnine: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; a, b, c su odsječci koje odsijeca ravnina na koordinatnim osima, uz poštivanje predznaka (sl. 206).

Jednadžba ravnine koja prolazi

a) *kroz tri točke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{u vektorskom obliku } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0^*;$$

b) *kroz dvije točke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *paralelno pravcu s vektorom smjera* $\mathbf{R}(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{u vektorskom obliku } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0^*;$$

c) *kroz jednu točku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *paralelno dvama pravcima sa vektorima smjera* $\mathbf{R}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{u vektorskom obliku } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0^*;$$

d) *kroz jednu točku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *okomito na pravac s vektorom smjera* $\mathbf{N}(A, B, C)$:

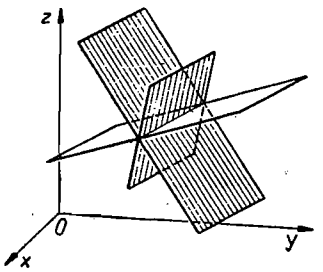
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0^{**}$;

e) *kroz presječnicu dviju ravnina* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(jednadžba *pramena ravnina*, sl. 207). Ako se λ mijenja od $-\infty$ do $+\infty$ dobivamo sve ravnine pramena. Pri $\lambda = \pm 1$ dobivamo jednadžbe ravnina koje raspolavljaju kutove među zadanim ravninama, ako su njihove jednadžbe zadane u normalnom obliku.



Sl. 207

Kut između dvije ravnine — vidi na str. 282.

Presječnicu triju ravnina — vidi na str. 280.

Udaljenost dviju paralelnih ravnina*** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ je

* O mješovitom produktu vektora vidi na str. 632.
** O skalarnom produktu vektora vidi na str. 631.
*** O uvjetima paralelnosti ravnina vidi na str. 283.

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Udaljenost točke od ravnine dobivamo tako da u normalnu jednadžbu $(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0)$ uvrstimo koordinate točke $M(a, b, c)$*:

$$\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - p.$$

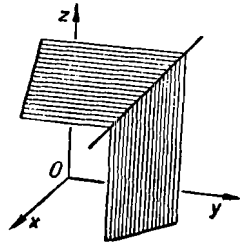
Ako M i ishodište leže na raznim stranama ravnine, onda je $\delta > 0$, a u protivnom slučaju je $\delta < 0$.

Jednadžba pravca u prostoru. Pravac u prostoru određuje se kao presječnica dviju ravnina i zadan je analitički sistemom dviju linearnih jednadžbi.

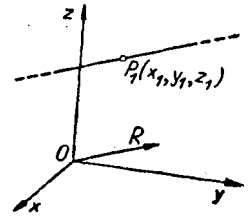
Opće jednadžbe pravca: u vektorskom obliku**

$$\text{I}\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{rN}_1 + D_1 = 0, \\ \mathbf{rN}_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Jednadžba pravca u dvjema ravninama projiciranja: $y = kx + a$, $z = hx + b$; svaka od tih dviju jednadžbi određuje ravninu koja projicira pravac na ravnine Oxy i Oxz (sl. 208). Na pravce paralelne ravnini Oyz ovaj oblik jednadžbe nije primjenljiv; za njih treba uzeti projekcije na neki drugi par koordinatnih ravnina.



Sl. 208



Sl. 209

Jednadžba pravca koji prolazi

a) *kroz zadanu točku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *paralelno vektoru smjera* $\mathbf{R}(l, m, n)$ (sl. 209);

$$\text{II}\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}, \end{cases}$$ u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0$*** ili

(parametarski oblik) $x = x_1 + lt$, $y = y_1 + mt$, $z = z_1 + nt$; u vektorskom obliku $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}t$;

* O svođenju opće jednadžbe ravnine na normalni oblik vidi na str. 276.
** O skalarnom produktu vidi na str. 631.
*** O vektorskom produktu vidi na str 630.

Normalni oblik (II) dobijemo iz (I) po formulama:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

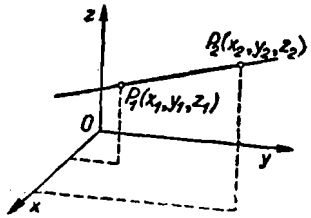
u vektorskom obliku $\mathbf{R} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$*, brojeve x_1, y_1, z_1 izaberemo tako da oni zadovoljavaju jednadžbe (I);

b) *kroz dvije zadane točke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 210);

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

u vektorskom obliku

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0^*;$$



Sl. 210

c) *kroz zadanu točku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *okomito na ravninu*

$Ax + By + Cz + D = 0$ ili $\mathbf{rN} + D = 0$* (sl. 211):

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C},$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{N} = 0$*.

Udaljenost δ **točke** $M(a, b, c)$ **od pravca** zadanog jednadžbom u normalnom obliku (II) određujemo po formuli:

$$\delta^2 = \frac{[(a - x_1)m - (b - y_1)l]^2 + [(b - y_1)n - (c - z_1)m]^2 + [(c - z_1)l - (a - x_1)n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Najkraća udaljenost dvaju pravaca, ako su njihove jednadžbe zadane u normalnom obliku:

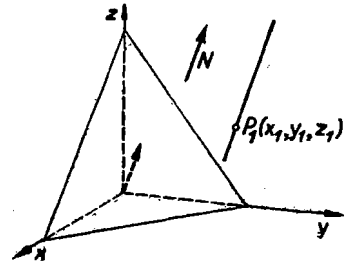
$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

i

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

možemo izračunati po formuli

$$\delta = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}.$$



Sl. 211

Kada determinanta u brojniku postane jednaka nuli, ispunjen je *uvjet presijecanja dvaju pravaca u prostoru.*

* O produktima vektora vidi na str. 630.

Sjecišta ravnina i pravaca

Koordinate sjecišta	Zadanih jednadžbama	Računaju se po formulama	Primjedbe
triju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$	$\bar{x} = \frac{-\Delta_x}{\Delta}, \quad \bar{y} = \frac{-\Delta_y}{\Delta}, \quad \bar{z} = \frac{-\Delta_z}{\Delta},$ gdje je $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} D_1 B_1 C_1 \\ D_2 B_2 C_2 \\ D_3 B_3 C_3 \end{vmatrix},$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 D_1 C_1 \\ A_2 D_2 C_2 \\ A_3 D_3 C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 B_1 D_1 \\ A_2 B_2 D_2 \\ A_3 B_3 D_3 \end{vmatrix}.$	Tri ravnine sijeku se u jednoj točki ako je $\Delta \neq 0$; ako je $\Delta = 0$ i ako je bar jedna poddeterminanta drugog reda $\neq 0$, ravnine su paralelne nekom smjeru; ako su sve poddeterminante $= 0$, ravnina prolazi kroz pravac.
četiriju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$ $A_4x + B_4y + C_4z = D_4 = 0.$	Nađemo sjecište bilo koje tri od četiri ravnine (vidi gore). U tom je slučaju ($\delta = 0$) jedna od jednadžbi posljedica triju ostalih.	Četiri ravnine prolaze kroz jednu točku samo tada ako je: $\delta = \begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \\ A_3 B_3 C_3 D_3 \\ A_4 B_4 C_4 D_4 \end{vmatrix} = 0.$

ravnine i pravca	1) $Ax + By + Cz + D = 0,$ $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ 2) $Ax + By + Cz + D = 0,$ $y = kx + a, \quad z = hx + b$	1) $\bar{x} = x_1 - lp,$ $\bar{y} = y_1 - mp,$ $\bar{z} = z_1 - np,$ gdje je $p = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}$ 2) $\bar{x} = -\frac{Ba + Cb + D}{A + Bk + Ch},$ $\bar{y} = k\bar{x} + a, \quad \bar{z} = h\bar{x} + b$	Ako je: $Al + Bm + Cn = 0$ $(A + Bk + Ch = 0),$ pravac je paralelan s ravninom; ako je pored toga: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ $(Ba + Cb + D = 0),$ pravac leži u ravnini.
dvaju pravaca	$y = k_1x + a_1, \quad z = h_1x + b_1$ $y = k_2x + a_2, \quad z = h_2x + b_2$	$\bar{x} = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2};$ $\bar{y} = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2};$ $\bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}.$	Te formule daju sjecište samo pod uvjetom: $(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) =$ $= (b_1 - b_2)(k_1 - k_2),$ u protivnom slučaju pravci se ne sijeku (vidi također str. 279).

Kut između ravnina i pravaca

Kut između	Zadanih jednadžbama	Računamo po formuli
dviju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$
u vektorskom obliku	$\mathbf{rN}_1 + D_1 = 0,$ $\mathbf{rN}_2 + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{N_1N_2}$
dvaju pravaca	$\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1},$ $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}.$	$\cos\varphi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$
u vektorskom obliku:	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R}_1 = 0,$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{R}_2 = 0.$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{R_1R_2}$
pravca i ravnine	$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n},$ $Ax + By + Cz + D = 0.$	$\sin\varphi = \dfrac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$
u vektorskom obliku	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0,$ $\mathbf{rN} + D = 0$	$\sin\varphi = \dfrac{\mathbf{RN}}{RN}$

Uvjeti paralelnosti (oznake iste kao gore):

dviju ravnina: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ ili $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = 0,$

dvaju pravaca: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ ili $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = 0,$

pravca i ravnine: $Al + Bm + Cn = 0$ ili $\mathbf{RN} = 0.$

Uvjeti okomitosti (oznake iste kao gore):

dviju ravnina: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ili $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 = 0,$

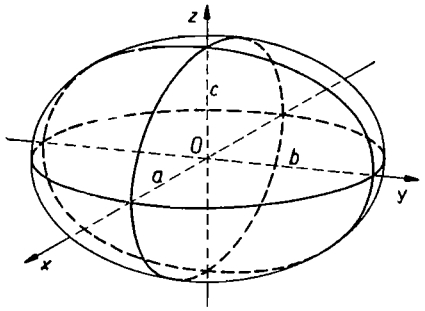
dvaju pravaca: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ ili $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0,$

pravca i ravnine: $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ ili $\mathbf{N} \times \mathbf{R} = 0.$

10. PLOHE DRUGOG REDA (NORMALNE JEDNADŽBE)*

Centralne plohe. Jednadžbe navedene niže dane su u *normalnom* obliku: *središte* plohe (točka u kojoj se raspolavljaju sve tetive što krozanj prolaze) je u ishodištu, a za koordinatne osi uzete su osi simetrije plohe. Pri tome su koordinatne ravnine ravnine simetrije.

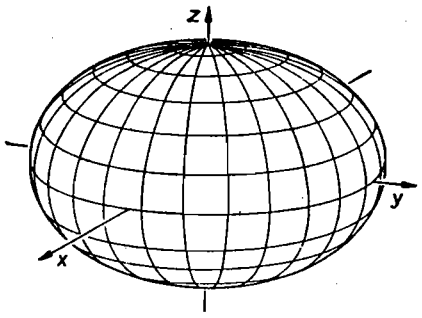
Elipsoid (sl. 212): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, a, b, c, su polovi.



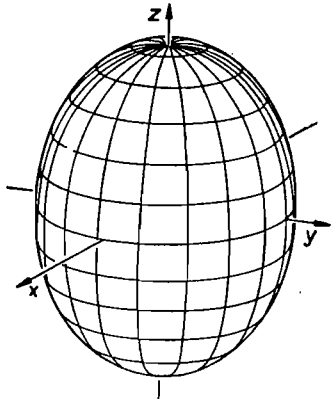
Sl. 212

Ako je $a=b>c$, imamo *spljošteni rotacioni elipsoid* (sl. 213) koji nastaje rotacijom elipse oko male osi elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u ravnini Oxz.

Ako je $a=b<c$ imamo *produljeni rotacioni elipsoid* (sl. 214) koji nastaje rotacijom elipse oko velike osi elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u ravnini Oxz.



Sl. 213



Sl. 214

* Opću jednadžbu plohe drugog reda vidi na str. 288.

Ako je $a=b=c$ imamo *kuglu*:

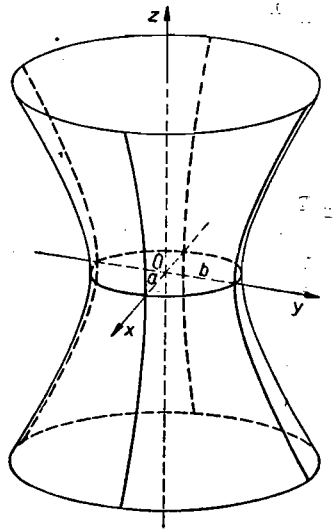
$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Svaka ravnina siječe elipsoid u elipsi (u posebnom slučaju u kružnici). Volumen elipsoida je $\frac{4}{3}\pi abc$.

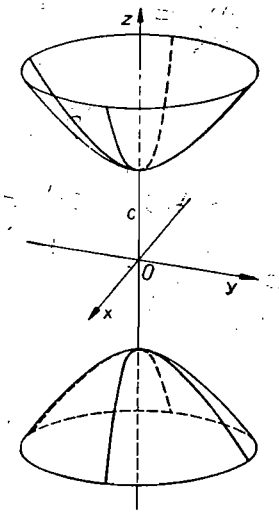
Jednokrilni (jednoplošni) hiperboloid (sl. 215): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, a i b su realne poluosi, c je imaginarna poluos.

O pravčastim izvodnicima vidi na str. 287.

Dvokrilni (dvoplošni) hiperboloid (sl. 216): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, c je realna poluos, a i b su imaginarne poluosi.



Sl. 215

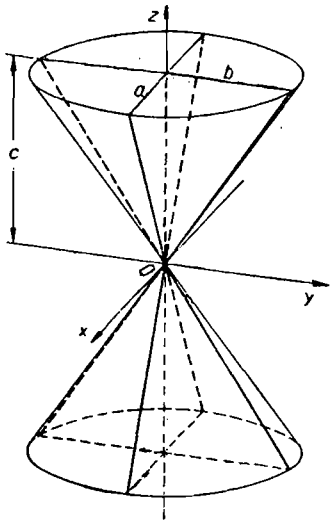


Sl. 216

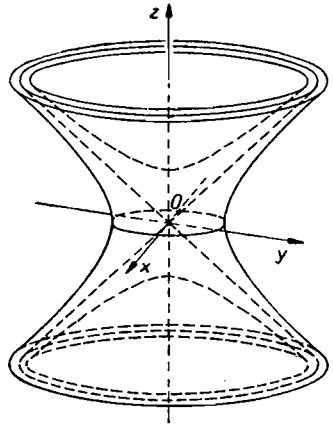
Za oba hiperboloida presjeci paralelni sa osi Oz su hiperbole (za jednokrilni hiperboloid može biti par pravaca koji se sijeku), a presjeci paralelni sa osi xOy su elipse.

Ako je $a=b$, onda hiperboloid može nastati rotacijom hiperbole s poluosima a i c oko osi $2c$, koja je za jednokrilni hiperboloid imaginarna, a za dvokrilni hiperboloid realna.

Čunj (sl. 217) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ima vrh u ishodištu, a ravnalica (vidi str. 225) mu može biti elipsa s poluosima a i b, kojoj je ravnina okomita na os Oz i udaljena za c od ishodišta. Taj čunj je asimptotički za dva hiperboloida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, tj. svaka njegova izvodnica se pri udaljavanju u beskonačnost neograničeno približava objema hiperboloidima (sl. 218). Ako je $a=b$ imamo uspravni kružni čunj (vidi na str. 225).



Sl. 217



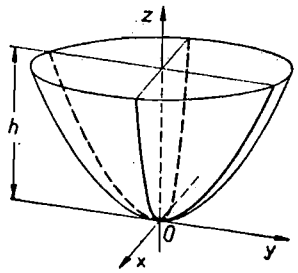
Sl. 218

Paraboloidi. Paraboloidi nemaju središta; za niže navedene jednadžbe tjeme paraboloida je u ishodištu koordinata, os Oz je os simetrije, a ravnine xOz i yOz su ravnine simetrije.

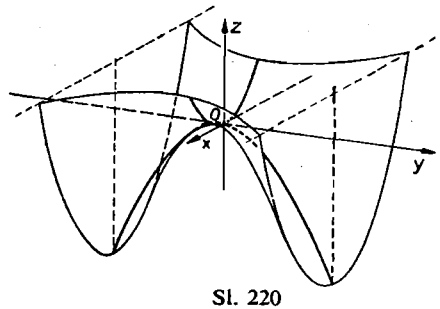
Eliptični paraboloid (sl. 219): $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Presjeci paralelni sa osi Oz su parabole; presjeci paralelni s ravninom xOy su elipse. Ako je $a=b$ imamo *rotacioni paraboloid*, koji nastaje rotacijom parabole $z=\frac{x^2}{a^2}$, u ravnini xOz, oko njene osi.

Volumen dijela paraboloida koji odsijeca ravnina okomita na njegove osi u visini h je $\frac{1}{2}\pi abh$, a to je polovina volumena eliptičnog valjka s istom bazom i visinom.

Hiperbolni paraboloid (sl. 220): $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$. Presjeci paralelni s ravninom yOz su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom xOz su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom xOy su hiperbole (a također i par pravaca koji se sijeku).



Sl. 219



Sl. 220

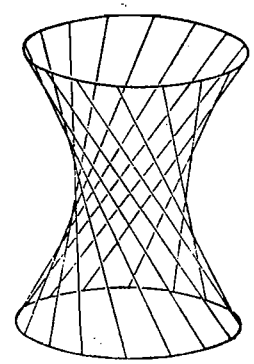
Pravčastom izvodnicom plohe nazivamo pravac koji čitav leži u zadanoj plohi, npr. pravčasta izvodnica čunjaste ili valjkaste plohe.

Jednokrilni hiperboloid (sl. 221) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ima dvije porodice pravčastih izvodnica:

$$\text{I}\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b};\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b};\end{cases}$$

u i v su po volji odaberivi.

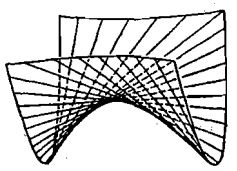


Sl. 221

Hiperbolni paraboloid (sl. 222) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ima također dvije porodice izvodnica:

I) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z;$

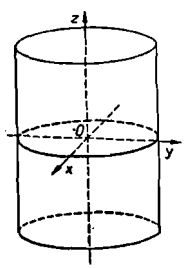
II) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z;$



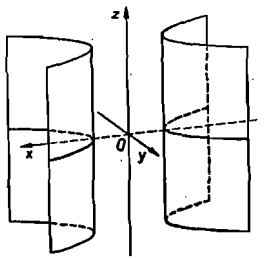
Sl. 222

u i v su po volji. Kroz svaku točku plohe u oba slučaja prolaze dva pravca; po jedna izvodnica svake porodice (na sl. 221 i 222 nacrtana je samo jedna porodica).

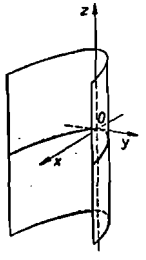
Valjci (cilindri): *eliptični* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (sl. 223), *hiperbolni* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (sl. 224), *parabolni* $y^2 = 2px$ (sl. 225).



Sl. 223



Sl. 224



Sl. 225

11. PLOHE DRUGOG REDA (OPĆA TEORIJA)

Opća jednadžba plohe drugog reda: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

Invarijante plohe drugog reda*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2.$$

Te veličine se ne mijenjaju pri pomaku ishodišta i vrtnji koordinatnih osi.

* Ovdje je: $a_{ik} = a_{ki}$.

Oblik plohe drugog reda po njenoj jednadžbi određen je predznacima njenih invarijanata Δ, δ, S i T iz donje tablice. U toj tablici je redom pored naziva plohe i njena normalna jednadžba u koju transformacijom koordinate možemo dovesti zadanu jednadžbu. Jednadžbe tzv. imaginarnih ploha ne zadovoljavaju koordinate ni jedne realne točke (osim dva izuzetka: vrh imaginarnog čunja i presječnica imaginarnih ravnina).

Određivanje oblika površine drugog reda

I. $\delta \neq 0$ (centralne plohe)

	$S\delta > 0, \quad T > 0$	$S\delta$ i T nisu oba > 0
$\Delta < 0$	Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Dvokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Imaginarni elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Imaginarni čunj (s realnim vrhom) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Čunj $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II. $\delta = 0$ (paraboloidi, valjci i parovi ravnina)

	$\Delta < 0$ (pri tome je $T > 0$)	$\Delta > 0$ (pri tome je $T < 0$)
$\Delta \neq 0$	Eliptični paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Hiperbolni paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Valjkasta ploha ima za ravnalicu krivulju drugog reda. U ovisnosti o obliku krivulje (vidi na str. 268 i 269) imamo valjke raznih oblika (eliptični realni ili imaginarni za $T > 0$, hiperbolni za $T < 0$, parabolni za $T = 0$), ako se plohe raspadaju na dvije ravnine (realne, imaginarne ili identične). Uvjeti za raspad: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$	

II. DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

U diferencijalnoj geometriji proučavamo krivulje (ravninske i prostorne) i plohe metodama diferencijalnog računa; zato pretpostavljamo da su funkcije koje ulaze u jednadžbu neprekinute i da imaju neprekinutu derivaciju do tog reda koji nam je u okviru postavljenog problema potreban*. Pri proučavanju geometrijskih tvorevina prema njihovim jednadžbama razlikujemo njihova svojstva, ovisna o izboru koordinatnog sistema (npr. presjek krivulje ili plohe s osima, nagib tangente, točke maksimuma i minimuma) i invarijantna svojstva koja se ne mijenjaju pri transformaciji koordinata i svojstvena su krivulji ili plohi (npr. točke infleksije, tjemena krivulje, zakrivljenost). S druge strane razlikujemo lokalna svojstva koja se odnose samo na male dijelove krivulje ili plohe (npr. zakrivljenost, linijski element plohe) i svojstva krivulje ili plohe u cjelini (npr.: broj tjemena, duljina zatvorene krivulje).

A. RAVNINSKE KRIVULJE

1. NAČINI DEFINIRANJA KRIVULJA

Jednadžba krivulje.** Ravninska krivulja može se analitički izraziti u jednom od ovih oblika:

U Descartesovim koordinatama:

implicitno ..... $F(x, y) = 0$, (1)

eksplicitno ..... $y = f(x)$, (2)

u parametarskom obliku $x = x(t), \quad y = y(t)$ (3)

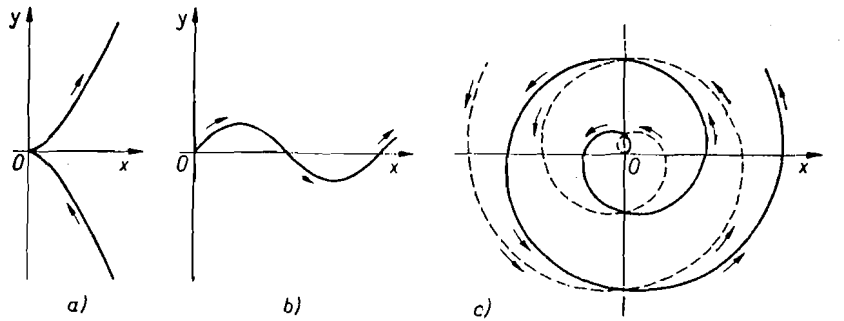
U polarnim koordinatama: $\rho = f(\varphi)$. (4)

Pozitivni smjer na krivulji. Ako je krivulja zadana u obliku (3), onda je njen *pozitivni smjer* zadan smjerom u kojem se giba točka krivulje $M[x(t), y(t)]$ kada parametar t raste. Ako je krivulja zadana u obliku (2), onda parametrom možemo smatrati apscisu točke: $x = x$, $y = f(x)$ i pozitivni smjer odgovara prirastu apscise

* Taj uvjet može biti narušen samo za pojedine točke krivulje ili plohe; u tom slučaju imamo točku specijalnog tipa (npr. skok ili točke loma krivulje). O takvim točkama vidi na str. 298 i 319.

** Opće pojmove o jednadžbi krivulje vidi na str. 253.

(tj. slijeva nadesno). Ako je krivulja zadana u obliku (4), onda je parametar kut φ: $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$ i pozitivni smjer odgovara prirastu φ (tj. suprotan je gibanju kazaljke na satu).



Sl. 226

Primjeri (sl. 226): a) $x = t^2$, $y = t^3$; b) $y = \sin x$; c) $\rho = a\varphi$.

2. LOKALNI ELEMENTI KRIVULJE

U ovom je paragrafu sa M označena pomična točka krivulje koja je određena: vrijednošću x kada je krivulja zadana u obliku (2), vrijednošću t kada je krivulja zadana u obliku (3) i vrijednošću φ kada je krivulja zadana u obliku (4); točka N joj je neizmjerno blizu i određena je vrijednostima $x + \mathrm{d}x$, $t + \mathrm{d}t$ i $\varphi + \mathrm{d}\varphi$.

Diferencijal luka. Ako je s duljina krivulje od neke stalne točke A do M, onda infinitezimalni prirast duljine $\Delta s = \overset{\frown}{MN}$ približno izražavamo formulom diferencijala luka* $\mathrm{d}s$:

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (2),}$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (3),}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (4),}$$

Primjeri: 1) $y = \sin x$, $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

2) $x = t^2$, $y = t^3$, $\mathrm{d}s = t\sqrt{4 + 9t^2}\,\mathrm{d}t$;

3) $\rho = a\varphi$, $\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$.

* O diferencijalu i njegovim svojstvima vidi na str. 373 i 374.

Tangenta i normala. *Tangentom* u točki M nazivamo granični položaj sekante MN, kada $N \to M$; *normala* je pravac koji prolazi kroz točku M okomito na tangentu (sl. 227).

Jednadžba tangente i normale (x i y su koordinate točke M krivulje; X i Y su koordinate pomičnih točaka tangente ili normale; vrijednosti derivacija računaju se za točku M).

Oblik jednadžbi krivulje (vidi str. 290)	Jednadžba tangente	Jednadžba normale
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
(2)	$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$	$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$
(3)	$\frac{Y-y}{y'}=\frac{X-x}{x'}$	$x'(X-x)+y'(Y-y)=0$

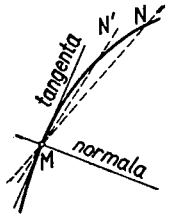
Primjeri: Naći jednadžbe tangente i normale:

1) Za kružnicu $x^2+y^2=25$ u točki $M(3,4)$. Jednadžba tangente: $2x(X-x)+2y(Y-y)=0$ ili (s obzirom na jednadžbu kružnice) $Xx+Yy=25$; u točki M: $3X+4Y=25$. Jednadžba normale: $\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}$ ili $Y=\frac{y}{x}X$; u točki M: $Y=\frac{4}{3}X$.

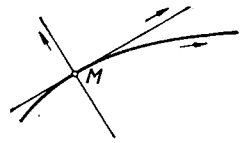
2) Za sinusoidu $y=\sin x$ u točki $O(0,0)$. Jednadžba tangente: $Y-\sin x=\cos x(X-x)$ ili $Y=X\cos x+\sin x-x\cos x$; u točki O: $Y=X$. Jednadžba normale: $Y-\sin x=-\frac{1}{\cos x}(X-x)$ ili $Y=-X\sec x+\sin x+x\sec x$; u točki O: $Y=-X$.

3) Za krivulju $x=t^2$, $y=t^3$ u točki $M(4,-8)$, $t=-2$. Jednadžba tangente: $\frac{Y-t^3}{3t^2}=\frac{X-t^2}{2t}$ ili $Y=\frac{3}{2}tX-\frac{1}{2}t^3$, u točki M: $Y=-3X+4$. Jednadžba normale: $2t(X-t^2)+3t^2(Y-t^3)=0$ ili $2X+3tY=t^2(2+3t^2)$, u točki M: $X-3Y=28$.

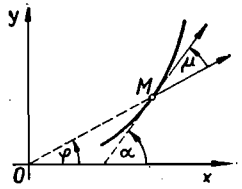
Pozitivni smjer. Ako je krivulja zadana u obliku (2), (3) ili (4) (vidi na str. 290), onda se za tangentu i normalu određuje pozitivni smjer ovako: na tangenti se pozitivni smjer poklapa s pozitivnim smjerom u diralištu (vidi na str. 292), a na normali se pozitivni smjer dobiva zakretom pozitivnog smjera tangente oko točke M za 90° suprotno gibanju kazaljke na satu (sl. 228). Točka M dijeli tangentu i normalu na pozitivni i negativni polupravac.



Sl. 227



Sl. 228



Sl. 229

Prikloni kut tangente određujemo kutom α između pozitivnog smjera osi apscisa i pozitivnog smjera tangente, ili (ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama) kutom μ između radijvektora $OM=\rho$ i pozitivnog smjera tangente (sl. 229). Kutove α i μ određujemo formulama (ds računamo po formulama na str. 291):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx},\qquad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \sin\alpha=\frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)},\qquad \cos\mu=\frac{d\rho}{ds},\qquad \sin\mu=\rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

Primjeri:

1) $y=\sin x$; $\operatorname{tg}\alpha=\cos x$,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}},\qquad \sin\alpha=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}};$$

2) $x=t^2$, $y=t^3$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3t}{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+9t^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}};$$

3) $\rho=a\varphi$; $\operatorname{tg}\mu=\varphi$, $\cos\mu=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, $\sin\mu=\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

Duljina tangente i normale; subtangenta i subnormala (sl. 230).

a) U kartezijskim koordinatama [ako su zadane u obliku (2) i (3), vidi na str. 290)]:

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| \quad (\textit{duljina tangente}),$$

$$MN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right| \quad (\textit{duljina normale}),$$

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right| \quad (\textit{subtangenta}),$$

$$PN = |yy'| \quad (\textit{subnormala}).$$

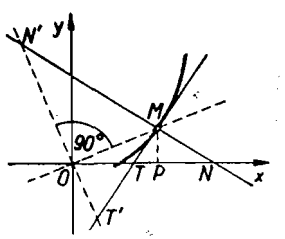
b) U polarnim koordinatama [ako su zadane u obliku (4), vidi na str. 290)]:

$$MT' = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right| \quad (\textit{duljina polarne tangente}),$$

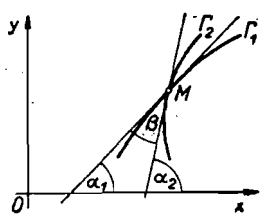
$$MN' = \left|\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right| \quad (\textit{duljina polarne normale}),$$

$$OT' = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right| \quad (\textit{polarna subtangenta}),$$

$$ON' = |\rho' \quad (\textit{polarna subnormala}).$$



Sl. 230



Sl. 231

Primjeri: 1) $y = \operatorname{ch} x$; $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+y'^2} = \operatorname{ch} x$; $MT = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|$, $MN = |ch^2 x|$, $PT = |\operatorname{cth} x|$, $PN = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|$. 2) $\rho = a\varphi$; $\rho' = a$, $\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}$; $MT' = |a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}|$, $MN' = |a\sqrt{1+\varphi^2}|$, $OT' = |a\varphi^2|$, $ON' = a$.

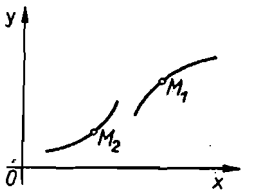
Kut između dviju krivulja. Pod kutom između dviju krivulja Γ_1 i Γ_2 koje se sijeku u točki M razumijevamo kut β između tangenata na te krivulje u točki M (sl. 231). Računanje kuta β svodi se

na određivanje kuta između dvaju pravaca (vidi str. 256) kojima su koeficijenti smjera:

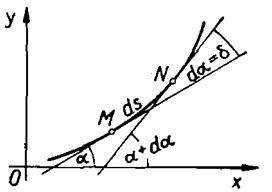
$$k_1 = tg\,\alpha_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_M, \quad \text{i} \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_M,$$

gdje je $y = f_1(x)$ jednadžba krivulje Γ_1, a $y = f_2(x)$ jednadžba krivulje Γ_2; derivacije se računaju u točki M.

Primjer: Odredimo kut između parabola $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ u točki $M(1, 1)$. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=1} = 2$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3}{4}$.



Sl. 232



Sl. 233

Konkavnost i konveksnost krivulje. Ako je krivulja zadana u eksplicitnom obliku: $y = f(x)$, onda za njen mali dio koji sadrži točku M (s izuzetkom kada je M točka infleksije ili singularna točka, vidi na str. 298 do 302) možemo odrediti da li je krivulja svojom konkavnom stranom okrenuta nadolje ili nagore*: ako je u točki M druga derivacija $f''(x) > 0$, onda je konkavna strana krivulje okrenuta nagore** (točka M_2 na sl. 232), a ako je $f''(x) < 0$, onda nadolje (točka M_1); ako je $y'' = 0$, treba izvršiti dopunska ispitivanja, koja su načinjena na str. 298 i 299 pri razmatranju točaka infleksije.

Primjer: $y = x^3$ (vidi sl. 6, *b* na str. 116); $y'' = 6x$; pri $x > 0$ je krivulja okrenuta nagore, a pri $x < 0$ nadolje.

Zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti. *Zakrivljenošću* K krivulje u njenoj točki M nazivamo limes omjera »kuta kontingencije« δ između pozitivnih smjerova tangenata u točkama M i N (sl. 233) i duljine luka $\widehat{MN}$, kada $\widehat{MN} \to 0$:

$$K = \lim \frac{\delta}{\widehat{MN}} \quad \text{za} \quad \widehat{MN} \to 0.$$

* Smjer *konveksnosti* suprotan je smjeru konkavnosti.
** Točnije, u stranu pozitivnog smjera osi *Oy*.

Zakrivljenost K ima predznak »+« ili »—« ovisno o predznaku tog limesa. Predznak K pokazuje da li je krivulja svojom konkavnom stranom okrenuta u smjeru pozitivnog (pri $K > 0$) ili negativnog (pri $K < 0$) polupravca normale (vidi na str. 293).*

Zakrivljenost često smatramo bitno pozitivnom veličinom, razumijevajući pod time apsolutnu veličinu gore napisanog limesa.

Polumjerom zakrivljenosti R u točki M krivulje nazivamo veličinu recipročnu zakrivljenosti: $R = 1/K$. Što je veća zakrivljenost krivulje u blizini zadane točke, to veći je K i to manji je R u toj točki. Krug s polumjerom a ima zakrivljenost $K = 1/a$ i polumjer zakrivljenosti $R = a$ (konstantni su za sve točke); za pravac: $K = 0$, $R = \infty$; za druge krivulje zakrivljenost se mijenja od točke do točke.

Formule za K **i** R. Uz pretpostavku (sl. 233) da je $\delta = d\alpha$ i $\widehat{MN} = ds$ imamo:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\alpha}. \tag{*}$$

Ako je krivulja zadana jednadžbama (1), (2), (3) ili (4) (vidi na str. 290), tada se K i R računaju po formulama:

Ako je zadana u obliku (2):

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \qquad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ako je zadana u obliku (3):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

ako je zadana u obliku (1):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}},$$

ako je zadana u obliku (4):

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}. \tag{**}$$

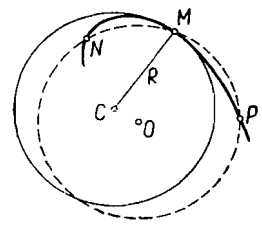
* Drugačije: pri $K > 0$ središte zakrivljenosti (vidi dalje) leži na pozitivnom polupravcu normale, a pri $K < 0$ na negativnom.

Primjeri: 1) $y = \operatorname{ch} x$, $K = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

2) $x = t^2$, $y = t^3$, $K = \dfrac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}$;

3) $y^2 - x^2 = a^2$, $K = \dfrac{a^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;

4) $\rho = a\varphi$, $K = \dfrac{1}{a}\dfrac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$.



Sl. 234

Kružnica zakrivljenosti i središte zakrivljenosti. *Kružnicom zakrivljenosti* u točki M krivulje nazivamo granični položaj kružnice koja prolazi kroz točku M i dvije druge bliske točke krivulje N i P, kada $N \to M$ i $P \to M$ (sl. 234). Polumjer kružnice zakrivljenosti jednak je polumjeru zakrivljenosti u pripadnoj točki [računa se po formulama (**)]. Središte kružnice zakrivljenosti C nazivamo *središtem zakrivljenosti* za točku M i ono se nalazi na normali krivulje u smjeru njene konkavnosti. Koordinate središta zakrivljenosti (x_c, y_c) određujemo po ovim formulama:

ako je zadana u obliku (2) (vidi str. 290):

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad y_c = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

ako je zadana u obliku (3):

$$x_c = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \qquad y_c = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

ako je zadana u obliku (4):

$$x_c = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

$$y_c = \rho\sin\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''};$$

ako je zadana u obliku (1):

$$x_c = x + \frac{F'_x(F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \qquad y_c = y + \frac{F'_y(F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}. \tag{***}$$

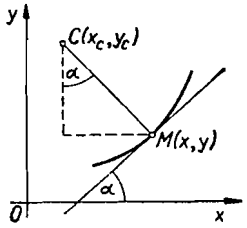
Te formule možemo pisati u obliku:

$$x_c = x - R\sin\alpha, \qquad y_c = y + R\cos\alpha$$

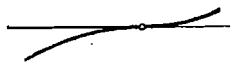
ili

$$x_c = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad y_c = y + R\frac{dx}{ds}$$

(sl. 235) gdje se R računa po formulama (**) (vidi na str. 296).



Sl. 235



Sl. 236

3. OSOBITE TOČKE*

Točke infleksije su točke krivulje u kojima se smjer konkavnosti mijenja u obrnuti (sl. 236); krivulja u malom dijelu na kome se nalazi ta točka ne leži samo na jednoj strani tangente, nego je presijeca. U točki infleksije zakrivljenost $K = 0$, a polumjer zakrivljenosti $R = \infty$.

Pravila za traženje točke infleksije

Krivulja je zadana u obliku (2): $y = f(x)$.

Neophodan uvjet za točku infleksije: u njoj druga derivacija $f''(x)$, ako postoji, mora biti jednaka nuli. Da nađemo točku infleksije u kojoj postoji** $f''(x)$, odredit ćemo sve vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$ korijena jednadžbe $f''(x) = 0$, i svaku vrijednost x_i zatim uvrstiti redom u slijedeću derivaciju. Ako je $f'''(x_i) \neq 0$, onda je x_i apscisa točke infleksije; ako je $f'''(x_i) = 0$, a $f^{IV}(x_i) \neq 0$, onda x_i nije točka infleksije itd.; ovisno o tome koja je od uzastopnih derivacija — parnog ili nepranog reda — prva različita od nule u promatranoj točki, ta će točka biti točka infleksije, ili ne. Ako promatrana točka nije točka infleksije (prva derivacija koja nije jednaka nuli, derivacija je k-tog reda za k parni), onda je krivulja s konveksnom stranom okrenuta nagore pri $f^{(k)}(x) < 0$ i nadolje pri $f^{(k)}(x) > 0$.

Primjeri: 1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad f''(x) = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$,

* Ovdje promatramo samo točke koje su invarijantne pri transformacijama koordinata. Traženje maksimuma i minimuma vidi na str. 391 do 393.

** Traženje točaka infleksije za slučajeve, kada $f''(x)$ ne postoji (npr. postaje beskonačno), vidi na str. 299.

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f'''(x) = 24x\frac{1-x^2}{(1+x^2)^4}, \quad f'''(x_{1,2}) \neq 0;$$

točke infleksije: $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\quad B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$.

2) $y = x^4$, $\quad f''(x) = 12x^2$, $\quad x_1 = 0$, $\quad f'''(x) = 24x$, $f'''(x_1) = 0$, $\quad f^{IV}(x) = 24$; točke infleksije nema.

Možemo također odrediti da li je nađena vrijednost x_i apscisa točke infleksije neposredno ispitujući izmjenu predznaka druge derivacije pri prolazu kroz tu točku: ako se predznak $f''(x)$ mijenja u obrnuti, onda se smjer konkavnosti također mijenja u obrnuti (vidi str. 295) pa imamo točku infleksije. Taj način primjenljiv je i tada kada je $y'' = \infty$.

Primjer: $y = x^{5/3}$, $y' = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$; za $x = 0$, $y'' = \infty$.

Pri prelazu od negativne vrijednosti x na pozitivnu druga derivacija mijenja predznak od »—« na »+«; prema tome za $x = 0$ krivulja ima tačku infleksije.

Praktički, ako je prema karakteru krivulje jasno postoje li točke infleksije (npr. između maksimuma i minimuma za graf funkcije koji ima neprekinutu derivaciju), onda se ograničujemo samo na traženje x_i, ne interesirajući se za više derivacije.

Krivulje zadane na drugi način. Prije navedeni nužni uvjet za postojanje točke infleksije $f''(x) = 0$ pri drugačije zadanim jednadžbama krivulje zamjenjuje se ovim:

parametarski oblik (3) (vidi str. 290) $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$;

polarni oblik (4): $\quad \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$;

opći oblik (1): rješava se sistemom jednadžbi:

$$F(x, y) = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

sistem rješenja daje koordinate mogućih točaka infleksije.

Primjeri: 1) $x = a\left(t - \dfrac{1}{2}\sin t\right)$; $\quad y = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos t\right)$

(»stegnuta cikloida«, vidi na str. 143);

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} 2-\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1);$$

$$\cos t = \frac{1}{2}; \qquad t_l = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

ima neizmjerno mnogo točaka infleksije, koje odgovaraju vrijednostima parametra t_l.

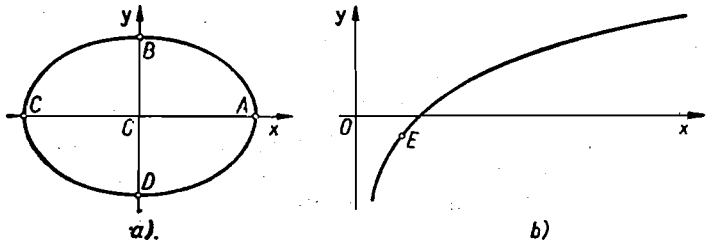
2) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1)$;

točka infleksije određena je polarnim kutom $\varphi = 1/2$.

3) $x^2 - y^2 = a^2$ (hiperbola). $\begin{vmatrix} F''.. \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8x^2 - 8y^2$;

jednadžbe $x^2 - y^2 = a^2$ i $8(x^2 - y^2) = 0$ su u proturječnosti; prema tome hiperbola nema točke infleksije.

Tjemena su točke krivulje u kojima zakrivljenost ima maksimum ili minimum (krivulja je najviše ili najmanje zakrivljena); npr. elipsa ima 4 tjemena: *A*, *B*, *C* i *D*, logaritamska krivulja jedno: *E* (sl. 237). Traženje tjemena svodi se na određivanje maksimuma

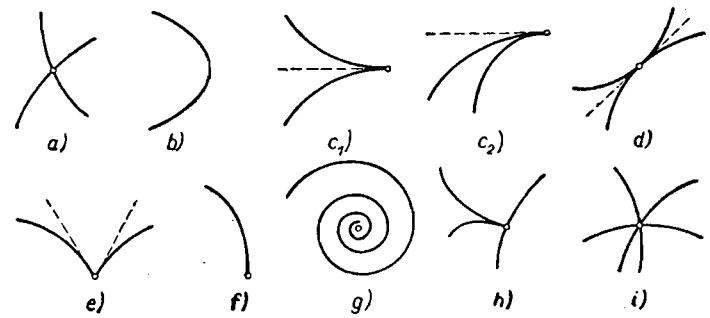


Sl. 237

i minimuma izraza *K* zadanog formulama (**) na str. 296 (ili minimuma i maksimuma za $R = 1/K$, ako je u tom slučaju računanje jednostavnije).

Singularne točke. Tim zajedničkim nazivom obuhvaćene su točke različitih tipova: a) *čvorne točke* u kojima krivulja samu sebe presijeca (sl. 238, *a*); b) *izolirane točke* koje leže odvojeno od krivulje, ali im koordinate zadovoljavaju jednadžbu krivulje (sl. 238, *b*); c) *šiljci* ili *povratne točke* u kojima se smjer krivulje mijenja u suprotni; razlikujemo šiljke: *prve vrste* (sl. 238, c_1) i *druge vrste* (sl. 238, c_2) ovisno o položaju tangente u odnosu na obje grane; d) *točke samotangiranja* u kojima krivulja sama sebe tangira (sl. 238, *d*); e) *točke loma* u kojima krivulja »skokomice« mijenja svoj smjer, pri čemu je razlika od šiljka u tome što su tangente na oba dijela krivulje u toj točki različite (sl. 238, *e*); f) *točke prekidanja* u kojima

se krivulja prekida (sl. 238, *f*); g) *asimptotske točke* oko kojih se krivulja ovija bezbroj puta, približavajući im se na po volji malu udaljenost (sl. 238, *g*). Moguća je istovremena kombinacija dviju ili nekoliko tih singularnih točaka (sl. 238, *h* i *i*).



Sl. 238

Određivanje točaka tipa e do *g*. Osobine tih tipova mogu postojati samo na transcendentnim krivuljama*. Točke loma odgovaraju prekinutosti derivacije $\frac{dy}{dx}$, npr. ishodište koordinata za krivulju $y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ (vidi sl. 284*c* na str. 372). Točke prekidanja odgovaraju konačnoj prekinutosti ili skoku funkcije $y = f(x)$, npr. točke (1, 0) i (1, 1) krivulje $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ (vidi sl. 272 na str. 340).

Asimptotske točke najlakše nalazimo na krivuljama zadanim u polarnom obliku: $\rho = f(\varphi)$; ako je $\lim \rho = 0$, kada $\varphi \to +\infty$ ili $\varphi \to -\infty$, tada je pol asimptotska točaka, npr. na logaritamskoj spirali $\rho = ae^{k\varphi}$ (vidi sl. 60 na sr. 149).

Određivanje točaka tipa a — d i *h, i* koje nazivamo *višestrukim točkama* (*dvostrukim, trostrukim* itd.). Krivulju proučavamo u obliku $F(x, y) = 0$. Točka *A* sa koordinatama (x_1, y_1) koje zadovoljavaju istovremeno tri jednadžbe: $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ *dvostruka* je ako jedna od triju drugih derivacija F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} nije jednaka nuli (u protivnom slučaju *A* je *trostruka* ili *višestruka* točka). Karakter dvostruke točke ovisi o predznaku:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}}.$$

* Vidi na str. 254.

1) Ako je $\Delta < 0$, onda je A čvorna točka, a koeficijenti smjera tangenata jednaki su korijenima jednadžbe

$$F''_{yy}k^2 + 2F''_{xy}k + F''_{xx} = 0.$$

2) Ako je $\Delta > 0$, onda je A izolirana točka.

3) Ako je $\Delta = 0$, onda je A ili šiljak ili točka samotangiranja; koeficijent smjera tangente u njoj je:

$$\operatorname{tg}\alpha = -F''_{xy}/F''_{yy}.$$

Za detaljno ispitivanje višestruke točke treba ishodište koordinata pomaknuti u tu točku i zakrenuti osi tako da os Ox bude u smjeru tangente u točki A; tada po obliku jednadžbe možemo ustanoviti imamo li šiljak prve vrste, druge vrste ili točku samotangiranja.

Primjeri: 1) $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (lemniskata, vidi sl. 51 na str. 142); $F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$; sistem $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ daje tri rješenja: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, ali samo prvo zadovoljava $F = 0$. Ako uvrstimo $(0, 0)$ u drugu derivaciju dobivamo: $(F''_{xx})_0 = -4a^2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = +4a^2$, $\Delta = -16a^4 < 0$, tj. ishodište je čvorna točka: koeficijent smjera tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, i jednadžba tangente: $y = \pm x$.

2) $F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$; $F'_x = x(3x - 2)$, $F'_y = y(3y - 2)$; od četiri točke $(0, 0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ i $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ samo prva leži na krivulji; $(F''_{xx})_0 = -2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = -2$, $\Delta = 4 > 0$, tj. ishodište je izolirana točka.

3. $F(x, y) \equiv (y - x^2)^2 - x^5 = 0$. Sistem $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ ima samo rješenje $(0, 0)$ koje zadovoljava i jednadžbu $F = 0$; $\Delta = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$. U tom slučaju imamo u ishodištu šiljak druge vrste, što se vidi iz jednadžbe krivulje u eksplicitnom obliku: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; y ne postoji za $x < 0$, a za male $x > 0$ obje vrijednosti y su pozitivne (tangenta je u ishodištu horizontalna).

Slučaj algebarske krivulje $F(x, y) = 0$. Ako jednadžba nema slobodnih članova ni članova prvog stupnja, onda je ishodište koordinata dvostruka točka; jednadžbe tangenata u njoj dobivamo tako da sve članove drugog stupnja izjednačimo s nulom; npr. za lemniskatu (vidi gore primjer 1) jednadžbe tangenata su: $x^2 - y^2 = 0$ ili $y = \pm x$. Ako nema ni članova drugog stupnja ishodište je trostruka točka itd.

4. ASIMPTOTE

Opći slučaj. Ako se krivulja nekim svojim dijelom neograničeno udaljuje od ishodišta koordinata, onda taj dio (*beskonačna grana* krivulje) može ponekad imati *asimptotu* — pravac kome se krivulja neograničeno približava ili s jedne strane (sl. 239, *a*) ili je stalno presijeca (sl. 239, *b*). Za određivanje asimptote krivulje zadane u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$ nađemo vrijednosti $t = t_i$, za koje $x(t) \to \infty$ ili $y(t) \to \infty$.

Ako je

$x(t_i) = \infty$, ali je $y(t_i) = a \neq \infty$,

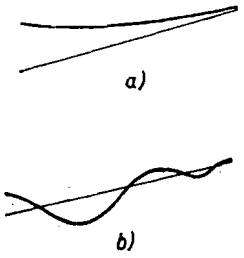
pravac $y = a$ je horizontalna asimptota; ako je

$y(t_i) = \infty$, ali je $x(t_i) = a \neq \infty$,

pravac $x = a$ je vertikalna asimptota; ako je

$x(t_i) = \infty$ i $y(t_i) = \infty$

zračunamo dva limesa:



Sl. 239

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{i} \quad b = \lim_{t \to t_i} [y(t) - k \cdot x(t)];$$

ako postoje oba limesa, krivulja ima asimptotu $y = kx + b$.

Ako je krivulja zadana eksplicitno $y = f(x)$, vertikalnu asimptotu nalazimo kao točku prekinutosti funkcije $f(x)$ (vidi na str. 345 do 348), a horizontalne i kose asimptote predočujemo u obliku $y = kx + b$, gdje je:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

Primjer: $x = \frac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$ itd.

Nalazimo npr. asimptotu za $t = \pi/2$:

$$x(t_1) = y(t_1) = \infty, \quad k = \lim_{t \to \pi/2} \frac{n}{m}(\sin t - t\cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \to \pi/2} \left[n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m}\frac{m}{\cos t} \right] = n \lim_{t \to \pi/2} \frac{\sin t - t\cos t - 1}{\cos t} =$$

$$= -\frac{n\pi}{2}, \quad y = \frac{n}{m}x - \frac{n\pi}{2}; \text{ analogno druga asimptota: } \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{\pi}{2} \text{ itd.}$$

Slučaj algebarske krivulje $F(x, y) = 0$. Funkcija $F(x, y)$ je polinom u odnosu na x i y. Odaberimo članove u $F(x, y)$ sa najvišom dimenzijom*. Sa $\Phi(x, y)$ označimo odabranu skupinu »najviših« članova i riješimo jednadžbu $\Phi(x, y) = 0$ po x i y:

$$x = \varphi(y), \qquad y = \psi(x).$$

Vrijednosti $y_1 = a$, za koje je $x = \infty$, daju horizontalne asimptote $y = a$; vrijednosti $x_1 = b$, za koje je $y = \infty$, daju vertikalne asimptote $x = b$. Za određivanje kosih asimptota uvrstimo u $F(x, y)$ izraz $y = kx + b$ i uredimo polinom po potencijama od x:

$$F(x, kx + b) \equiv f_1(k)\, x^m + f_2(k, b)\, x^{m-1} + \ldots$$

Izjednačimo s nulom dva najviša koeficijenta f_1 i f_2 i riješimo sistem jednadžbi:

$$f_1(k) = 0, \qquad f_2(k, b) = 0.$$

Ako su jednadžbe kompatibilne, njihova rješenja k, b daju parametre asimptota $y = kx + b$.

Primjer: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (»Descartesov list«, vidi sl. 44 na str. 137). $F(x, kx + b) \equiv (1 + k^3)\, x^3 + 3(k^2 b - ka)\, x^2 + \ldots$; $1 + k^3 = 0$ i $k^2 b - ka = 0$ daje sistem rješenja $k = -1$, $b = -a$; jednadžba asimptote: $y = -x - a$.

5. OPĆE ISPITIVANJE KRIVULJE IZ NJEZINE JEDNADŽBE

Ispitivanje krivulja iz njihovih jednadžbi vršimo zbog proučavanja toka neke jednoznačne funkcije $y = f(x)$ ili ustanovljenja oblika krivulje koja je analitički određena jednim od oblika (1), (2), (3) ili (4) (vidi na str. 290).

Konstrukcija grafova funkcija zadanih u obliku $y = f(x)$.

1) Nađemo područje definicije funkcije (str. 334).

2) Ustanovimo simetriju s obzirom na os Oy ili ishodište, prema tome da li je funkcija parna ili neparna (str. 338).

* Dimenzija člana $Ax^m y^n$ jest suma eksponenata $(m + n)$ za x i y. Tako član $3x^2y^3$ ima dimenziju 5; $2y^3$ ima dimenziju 2; polinom $x^3 + y^3 - 3xy$ ima najviše članove: x^3 i y^3.

3. Odredimo tok funkcije u beskonačnosti, tako da izračunamo $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (str. 339).

4) Nađemo prekinutosti i odredimo njihov karakter (str. 346 i 347).

5) Nađemo sjecište krivulje s osi Oy tako da izračunamo $f(0)$ i s osi Ox tako da riješimo jednadžbu $f(x) = 0$ (o rješavanju algebarskih i transcendentnih jednadžbi u općem obliku vidi na str. 187).

6) Nađemo točke maksimuma i minimuma (str. 391), ustanovimo područje uzlaznosti i silaznosti funkcije.

7) Nađemo točke infleksije (str. 298 i 299), ustanovimo područja u kojima je krivulja sa svojom konkavnom stranom okrenuta prema gore i prema dolje (str. 295), pri čemu u točkama infleksije računamo prikloni kut tangente.

Prema tim podacima postepeno izradimo skicu krivulje, zatim je preciznije izradimo u pojedinim točkama na mjestima koja su od većeg interesa.

Primjer: Nacrtajmo graf funkcije: $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$.

1) Funkcija postoji za svaki x, osim za $x = 0$.

2) Simetrije nema.

3) $y \to 2$ kada $x \to \pm\infty$, pri čemu je $y = 2 - 0$ kada $x \to -\infty$ (teži ka 2 »odozdo«), a kada $x \to +\infty$ onda je $y = 2 + 0$ (teži ka 2 »odozgo«).

4) Za $x = 0$ ima beskonačan skok (od $-\infty$ do $-\infty$, jer je y negativan za mali x).

5) $f(0) = \infty$; jednadžba $2x^2 + 3x - 4 = 0$ ima korijene $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$; prema tome su sjecišta s osi Ox: $x_1 \approx 0{,}85$, $x_2 \approx -2{,}35$.

6) Točka maksimuma je $x = \dfrac{8}{3} = 2{,}66$, $\quad y = 2{,}56$.

7) Točka infleksije: $x = 4$, $\quad y = 2{,}5$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{16}$.

Skiciramo krivulju prema tim podacima i izračunamo još

8) sjecište krivulje s asimptotom: $x = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$; $\quad y = 2$.

Krivulja je nacrtana na sl. 240.

Konstruiranje krivulja zadanih u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$. Držati se općih pravila teško je, jer to često dovodi do složenih računa. Ako je moguće, korisno je potražiti ove elemente:

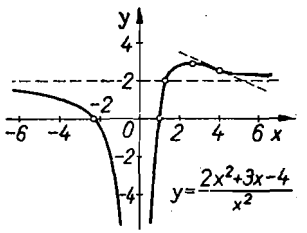
1) Odrediti sva sjecišta s osima.

2) Razjasniti simetričnost krivulje prema osima i ishodištu (tako da zamijenimo x sa $-x$; y sa $-y$).

3) Naći maksimum i minimum za os Ox (vidi na str. 394) i za os Oy primjenom analognih formula s transformacijom koordinatnih osi.

4) Naći točke infleksije (str. 299) i prikloni kut tangente u njima.

5) Naći singularne točke (str. 300 i 301).



Sl. 240

6) Naći tjemena krivulje (str. 300); konstruirati za njih kružnice zakrivljenosti (str. 297) — njihovi se lukovi na znatnoj duljini odoka ne razlikuju od krivulje.

7) Naći sve asimptote (str. 303) i ispitati položaj grana s obzirom na asimptote.

6. EVOLUTE I EVOLVENTE

Evoluta zadane krivulje je krivulja sastavljena od središta zakrivljenosti svih točaka dane krivulje; ona je ovojnica normala dane krivulje. Parametarske jednadžbe evolute vidi na str. 297 formule (***) (jednadžbe za središte zakrivljenosti, gdje x_c i y_c treba smatrati koordinatama pomične točke na evoluti). Ako se iz tih jednadžbi može izlučiti parametar (x, t ili φ) dobivamo jednadžbe evolute u kartezijskim koordinatama.

Primjer: naći evolutu parabole $y = x^2$ (sl. 241). Imamo:

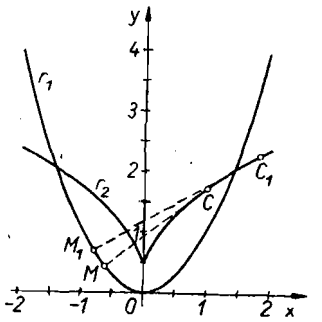
$$X = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \qquad Y = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2},$$

odakle je $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$, gdje su X i Y koordinate točaka evolute.

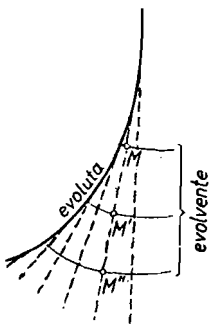
Evolventa zadane krivulje Γ_2 je takva krivulja Γ_1 za koju je Γ_2 evoluta. Normala MC evolvente je tangenta na evolutu, duljina luka $\overset{\frown}{CC_1}$ evolute jednaka je prirastu polumjera zakrivljenosti evolvente (sl. 241):

$$\overset{\frown}{CC_1} = M_1C_1 - MC.$$

Ta svojstva omogućavaju nam da evolventu smatramo »*krivuljom odmatanja*« Γ_1 krivulje Γ_2 dobivenom odmatanjem napete niti. Zadanoj evoluti odgovara porodica evolvenata, od kojih je svaka određena prvobitnom duljinom niti (sl. 242). Jednadžbu evolvente dobivamo integriranjem sistema diferencijalnih jednadžbi, koje predočuju jednadžbe evolute; jednadžbu evolvente kružnice vidi na str. 149.



Sl. 241



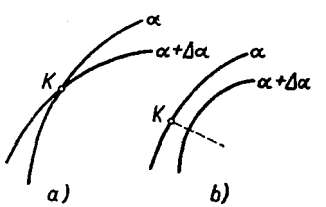
Sl. 242

7. OVOJNICE PORODICE KRIVULJA

Karakteristične točke. Ako imamo porodicu krivulja s jednim parametrom α:

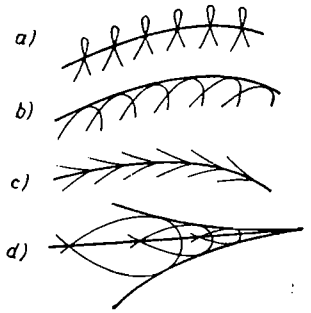
$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad (*)$$

onda dvije neizmjerno bliske krivulje te porodice, koje odgovaraju vrijednostima α i $\alpha + \Delta\alpha$, imaju *točke najkraće udaljenosti* (točke najvećeg zbližanja) K. Te točke su ili sjecište krivulja (α) i ($\alpha + \Delta\alpha$), ili takve točke na (α) kojima su udaljenosti do ($\alpha + \Delta\alpha$) (po normali) beskonačno male veličine višeg reda u odnosu na $\Delta\alpha$ (sl. 243, *a* i *b*). Ako $\Delta\alpha \to 0$, onda se krivulja ($\alpha + \Delta\alpha$) nastoji stopiti s prvom, a točka K se u nekim slučajevima približava graničnom položaju — *karakterističnoj točki*. Singularne točke krivulje (α) uvijek su karakteristične točke.

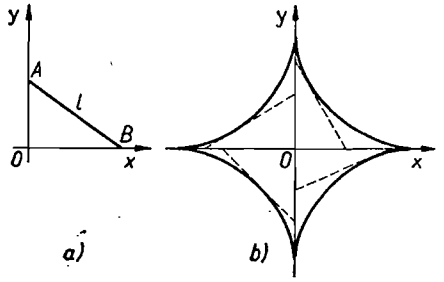


Sl. 243

Karakteristike. Geometrijsko mjesto karakterističnih točaka za sve krivulje porodice (*) tvore krivulju (ili nekoliko krivulja), koju nazivamo *karakteristikom* te porodice; ona je sastavljena ili od singularnih točaka krivulja porodice (sl. 244, *a*) ili je *ovojnica* tih krivulja, tj. tangira svaku krivulju porodice (sl. 244, *b*). Mogu se pojaviti i kombinacije obaju tipova (sl. 244 *c*, *d*).



Sl. 244



Sl. 245

Jednadžbu ovojnice (i karakteristike u općem slučaju) porodice $F(x, y, \alpha) = 0$ dobivamo ako izlučimo α iz sistema jednadžbi $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

Primjer: Nađimo jednadžbu ovojnice porodice pravaca na kojima leži dužina $AB = l$, ako njeni krajevi A i B kližu po koordinatnim osima (sl. 245, *a*).

Jednadžba porodice:

$$\frac{x}{l \sin \alpha} + \frac{y}{l \cos \alpha} = 1$$

ili:

$$F \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - l \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos^2 \alpha + l \sin^2 \alpha = 0.$$

Ako iz tih jednadžbi eliminiramo α dobivamo $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$, tj. ovojnicu *astroidu* (sl. 245, *b*, vidi također na str. 146 i 147).

B. PROSTORNE KRIVULJE

8. NAČINI DEFINICIJE KRIVULJA

Koordinatne jednadžbe. Prostorna krivulja može biti analitički izražena u jednom od ovih oblika:

a) Presječnica dviju ploha:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

b) Parametarski oblik:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{2}$$

(t je neki parametar, napose $t = x$, y ili z).

c) Parametarski oblik:

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s) \tag{3}$$

(s je duljina luka od neke točke A do pomične M):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Vektorska jednadžba. Ako označimo sa $\mathbf{r}$ radijvektor neke točke krivulje (vidi na str. 628), jednadžbu (2) predočujemo u obliku:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

i jednadžbu (3) u obliku:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Pozitivni smjer na krivulji određenoj jednadžbom (2) ili (2a) odgovara prirastu parametra t, a na krivulji određenoj jednadžbom (3) ili (3a) odgovara smjeru u kojem se povećava duljina luka s.

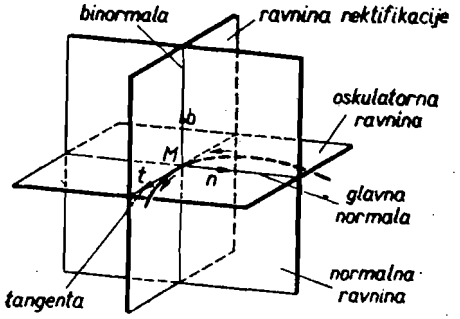
9. POPRATNI TROBRID

Definicija. U svakoj točki M prostorne krivulje (izuzevši singularne točke) odredimo 3 pravca i 3 ravnine koje su međusobno sijeku u točki M pod pravim kutom (sl. 246):

1) *Tangenta* je granični položaj sekante MN, kada $N \to M$ (vidi sl. 227 na str. 293).

2) *Normalna ravnina* je okomita na tangentu. Sve pravce koji prolaze kroz M i leže u toj ravnini nazivamo normalama krivulje u točki M.

3) *Oskulatorna ravnina* je granični položaj ravnine koja prolazi kroz 3 bliske točke krivulje M, N i P, kada $N \to M$ i $P \to M$ (sl. 247). U oskulatornoj ravnini nalazi se tangenta.



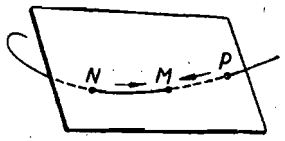
Sl. 246

4) *Glavna normala* je presječnica normalne i oskulatorne ravnine (ona od normala koja leži u oskulatornoj ravnini).

5) *Binormala* je pravac okomit na oskulatornu ravninu.

6) *Ravnina rektifikacije* sadrži tangentu i binormalu.

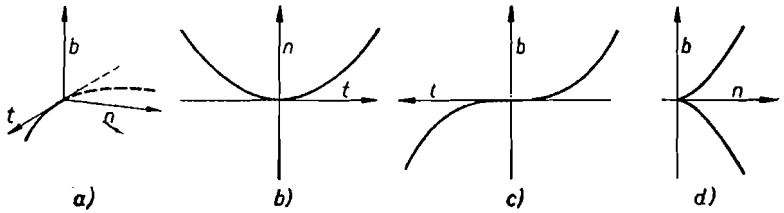
Na trima pravcima 1), 4) i 5) određujemo pozitivni smjer: na tangenti taj smjer odgovara pozitivnom smjeru krivulje i određen je jediničnim vektorom $\mathbf{t}$; na glavnoj normali pokazuje u smjeru konkavnosti krivulje i određen je jediničnim vektorom $\mathbf{n}$; na binormali određen je jediničnim vektorom $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, ($\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ moraju tvoriti desnu trojku, vidi na str. 631). Tri vektora $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$, zajedno s ravninama koje oni razapinju, tvore *popratni trobrid* prostorne krivulje.



Sl. 247

Položaj krivulje u odnosu na trobrid. U općim točkama krivulja leži s jedne strane ravnine rektifikacije i presijeca normalnu i oskulatornu ravninu (sl. 248, *a*). Pri tome projekcije malog dijela krivulje, koji sadrži točku M, na ravnini trobrida imaju približno oblik:

na oskulatornoj ravnini — parabole (sl. 248, *b*),
na ravnini rektifikacije — kubne parabole (sl. 248, *c*),
na normalnoj ravnini — semikubne parabole (sl. 248, *d*).



Sl. 248

Ako je u točki M zakrivljenost ili torzija krivulje (vidi dalje) jednaka nuli ili je točka singularna [$x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$], onda krivulja može imati i drugi položaj.

Jednadžba elemenata trobrida

a) *Krivulja je zadana u obliku* (1) (str. 309):

$$\text{Tangenta:} \quad \frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}};$$

$$\text{normalna ravnina:} \quad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(x, y i z su koordinate točke M krivulje; X, Y i Z su koordinate točaka tangentne ili normalne ravnine; parcijalne derivacije računamo u točki M).

b) *Krivulja je zadana u obliku* (2) *ili* (2a) (vidi str. 309).

U formulama na str. 312 x, y, z i $\mathbf{r}$ su koordinate i radijvektor točke M, krivulje X, Y, Z i $\mathbf{R}$ su koordinate i radijvektor točaka elementa trobrida; derivacije računamo za točku M po parametru t.

Vektorska jednadžba	Koordinatne jednadžbe
Tangenta: $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$
Normalna ravnina: $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$	$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$
Oskulatorna ravnina $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$
Binormala $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$
Ravnina rektifikacije: $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$ gdje je $l = y'z'' - y''z'$, $m = z'x'' - z''x'$, $n = x'y'' - x''y'$
Glavna normala: $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}$

c) *Krivulja je zadana u obliku* (3) *ili* (3a) (vidi na str. 309).

Ako smo za parametar izabrali duljinu luka s, onda je jednadžba tangente, normalne ravnine, oskulatorne ravnine i binormale ista kao i u općem slučaju b) (t moramo zamijeniti sa s), a jednadžba glavne normale i ravnine rektifikacije pojednostavnjuju se:

Element trobrida	Vektorska jednadžba	Koordinatne jednadžbe
Glavna normala	$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$	$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$
Ravnina rektifikacije	$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$

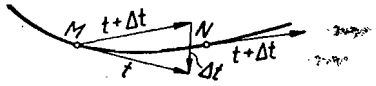
10. ZAKRIVLJENOST I TORZIJA

Zakrivljenost (fleksija) krivulje u točki M je broj koji karakterizira otklon krivulje (u njenom malom dijelu koji sadrži točku M) od pravca. Točna definicija:

$$\text{zakrivljenost } K = \lim_{\widehat{MN} \to 0} \left|\frac{\Delta t}{\widehat{MN}}\right| = \left|\frac{dt}{ds}\right|, \quad \text{(sl. 249).}$$

Polumjer zakrivljenosti: $\rho = \frac{1}{K}$.

K i ρ su za prostorne krivulje uvijek pozitivni.



Sl. 249

Formule za računanje K i ρ:

a) zadane u obliku (3) (vidi str. 309)

$$K = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \qquad (*)$$

(derivacije po s).

b) Zadane u obliku (2) (vidi na str. 309):

$$K^2 = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} =$$

$$= \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2) - (x'x''+y'y''+z'z'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \quad (**)$$

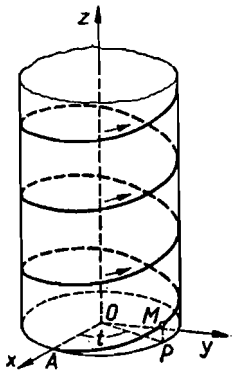
(derivacije po t).

Primjer: Nađimo zakrivljenost *zavojnice* (sl. 250): $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$*. Zamijenimo parametar t sa s: $s = t\sqrt{a^2+b^2}$, odatle dobivamo:

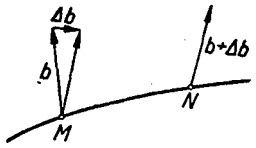
$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

i po formuli (*):

$$K = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} \text{ (konstantni).}$$



Sl. 250



Sl. 251

Isti rezultat dobivamo i bez prelaza na parametar s primjenom formule (**).

Torzija krivulje u točki M je broj koji karakterizira otklon krivulje (u njenom malom dijelu koji sadrži točku M) od ravninske krivulje. Točna definicija: torzija je broj određen formulom:

* Zavojnicu određenu tom jednadžbom, prikazanu na sl. 250, nazivamo *desnom*; promatrač postavljen duž osi zavojnice (osi Oz) vidi da se krivulja svija (pri gibanju) u smislu suprotnom gibanja kazaljke na satu.

Zavojnicu koja je simetrična desnoj zavojnici s obzirom na neku ravninu nazivamo *lijevom*; promatrač vidi da se krivulja svija (pri gibanju) u smislu kazaljke na satu.

$$T = \lim_{\widehat{MN}\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\widehat{MN}}\right| = \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| \text{ (sl. 251).} \quad \textit{Polumjer torzije } \tau = \frac{1}{T}.$$

Formule za računanje T i τ:

a) krivulja zadana u obliku (3) (vidi na str. 309):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}\,d^2\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}}{ds\,ds^2\,ds^3}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2+y''^2+z''^2)} \qquad \binom{*}{*}$$

(derivacije po s).

b) Krivulja zadana u obliku (2):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\frac{\frac{d\mathbf{r}\,d^2\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}}{dt\,dt^2\,dt^3}}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} = \rho^2\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \qquad \binom{**}{**}$$

[ρ se računa po formuli (*) ili (**)].

Torzija izračunana po formulama $\binom{*}{*}$ ili $\binom{**}{**}$ pozitivna je ili negativna. Ako je $T > 0$, onda se s mjesta promatrača, koji stoji na glavnoj normali paralelno binormali (vidi sl. 246), vidi svijanje krivulje zdesna prema gore nalijevo, slično hodu vadičepa. Ako je $T < 0$ onda se s te točke gledanja vidi svijanje slijeva prema gore nadesno.

Primjer: Za zavojnicu je torzija konstantna. Za desnu zavojnicu je:

$$\tau = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

$$T = \left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2\frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2]^3} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

Za lijevu zavojnicu je torzija negativna: $T = -\frac{b}{a^2+b^2}$.

Serret-Frenetove formule. Derivacije vektora $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ po parametru s mogu se izraziti ovim *Serret-Frenetovim formulama:*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{\mathbf{t}}{\rho} - \frac{\mathbf{b}}{\tau}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau},$$

gdje je ρ polumjer zakrivljenosti, a τ polumjer torzije.

C. PLOHE

11. NAČINI DEFINICIJE PLOHA

Jednadžba plohe. Ploha može biti zadana jednadžbom u jednom od ovih oblika:

a) *implicitno:*

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

b) *eksplicitno:*

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

c) *parametarski:*

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{3}$$

d) *vektorski:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Ako na sve moguće načine mijenjamo parametre u i v, dobivamo radijvektor i koordinate raznih točaka plohe; ako iz (3) eliminiramo u i v, dobivamo oblik (1). Oblik (2) je poseban slučaj oblika (3) u kojem je $u = x$, $v = y$.

Primjer: Jednadžba kugle:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{1}$$

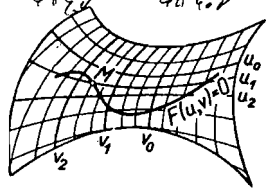
ili:

$$x = a\cos u \sin v, \qquad y = a \sin u \sin v, \qquad z = a \cos v, \tag{3}$$

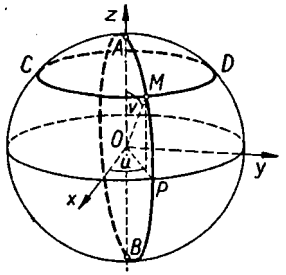
$$\mathbf{r} = a(\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}). \tag{3a}$$

Krivocrtne koordinate na plohi. Ako je ploha zadana u obliku (3) ili (3a), onda pri fiksiranoj vrijednosti jednog parametra $v = v_0$ i mijenjanju drugog (u) točka $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ opisuje krivulju koja leži na plohi: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$. Ako za v dajemo različite konstantne vrijednosti: $v = v_1$, $v = v_2$, ..., dobivamo porodicu krivulja na plohi; kako je $v = \text{const.}$, a pri gibanju duž tih krivulja mijenja se samo u, te krivulje nazivamo *u-linijama* (sl. 252, *a*). Analogno, točka $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ opisuje drugu krivulju; ako u prima različite konstantne vrijednosti: $u = u_1$, $u = u_2$, ..., dobivamo drugu porodicu krivulja ($u = \text{const}$) — *v-linije*. Na taj način na plohi (3) nastaje mreža krivulja — *koordinatnih linija*, a dva broja $u = u_i$ i $v = v_k$ su *krivocrtne* ili *Gaussove koordinate* točka M na plohi. U slučaju kada je ploha zadana u obliku (2) koordinatne linije su presječnice plohe s ravninama $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Svaka jednadžba koja povezuje te koordinate: $F(u, v) = 0$ ili $u = u(t)$, $v = v(t)$ određuje neku krivulju na plohi.

Primjer: U parametarskim jednadžbama kugle (vidi prethodni primjer) u je *geografska duljina* točke ($u = \sphericalangle POx$), v je *polarna udaljenost* točke ($v = \sphericalangle MOz$), v-linije su *meridijani AMB*, u-linije su *paralele CMD* (sl. 252, *b*).

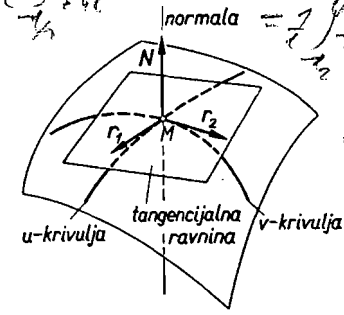


a)



b)

Sl. 252



Sl. 253

12. TANGENCIJALNA RAVNINA I NORMALA

Definicija. Ako kroz zadanu točku M ($\mathbf{r}$; x, y, z) plohe povučemo na plohi sve moguće krivulje, onda u pravilu tangente na njih u točki M leže u jednoj ravnini, tzv. *tangencijalnoj* (ili *tangentnoj*) *ravnini* na plohu u točki M. (Izuzetak su tzv. čunjaste točke plohe, vidi dalje). Pravac koji prolazi kroz točku M okomito na tangencijalnu ravninu nazivamo *normalnom* na plohu u točki M (sl. 253).

Tangencijalna ravnina razapeta je vektorima $\mathbf{r}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ i $\mathbf{r}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, koji diraju u-linije i v-linije u točki M; njihov vektorski produkt $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ je vektor paralelan normali, a njihov jedinični vektor $\mathbf{N}^\circ = \dfrac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ nazivamo *jediničnim vektorom normale*. $\mathbf{N}^\circ$ usmjeren je na jednu ili drugu stranu plohe, ovisno o tome koju od krivuljnih koordinata, u ili v, smatramo prvom, a koju drugom.

Jednadžbe tangencijalne ravnine i normale na plohu

Ploha zadana formulom (str. 316)	Tangencijalna ravnina	Normala
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(2)	$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$
(3)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3a)	$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2=0$ ili $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\mathbf{N}=0$	$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$ ili $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{N}$

U tablici su x, y, z, $\mathbf{r}$ koordinate i radijvektor točke M; X, Y, Z, $\mathbf{R}$ su koordinate i radijvektor bilo koje točke tangencijalne ravnine ili normale; derivacije računamo za točku M;

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Jednadžbe tangencijalne ravnine i normale na plohu vidi na str. 318.

Primjer: Za kuglu $x^2+y^2+z^2-a^2=0$

tangencijalna ravnina je:

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

ili:

$$xX+yY+zZ-a^2=0,$$

normala je:

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{2z}\quad\text{ili}\quad\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Za kuglu

$$x=a\cos u\sin v,\qquad y=a\sin u\sin v,\qquad z=a\cos v$$

tangencijalna ravnina je:

$$X\cos u\sin v+Y\sin u\sin v+Z\cos v=a,$$

normala:

$$\frac{X}{\cos u\sin v}=\frac{Y}{\sin u\sin v}=\frac{Z}{\cos v}.$$

Singularne (čunjaste) točke na plohi. Ako je za točke plohe koja je zadana u obliku (1) (vidi na str. 316) istovremeno (za $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=F(x,y,z)=0,$$

onda je točka $M(x_1,y_1,z_1)$ *singularna* (*čunjasta*). Sve tangente koje prolaze kroz točku M ne leže u jednoj ravnini, nego tvore čunj drugog reda, kome je jednadžba:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(X-x)+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(Y-y)+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}(Z-z)+2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}(X-x)(Y-y)+$$
$$+2\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial z}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\partial^2F}{\partial z\,\partial x}(Z-z)(X-x)=0$$

(gdje se derivacije računaju za točku M); ako istovremeno svih šest drugih derivacija postanu jednake nuli, singularna točka je složenijeg tipa (čunj trećeg ili višeg reda).

13. LINIJSKI ELEMENT PLOHE

Diferencijal luka. Ako je ploha zadana u obliku (3) ili (3a) (vidi na str. 316) i zadana je točka $M(u, v)$, a njena bliska točka na plohi je $N(u + \mathrm{d}u,\ v + \mathrm{d}v)$, onda je duljina luka MN na plohi približno izražena *diferencijalom luka* ili *linijskim elementom plohe*, po formuli:

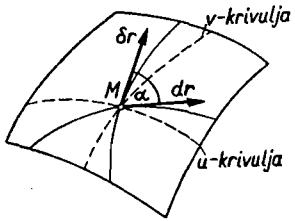
$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2, \qquad (1)$$

gdje je:

$$E = \mathbf{r}_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \mathbf{r}_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$



Sl. 254

Desni dio formule (1) nazivamo također *prvom kvadratnom formom* plohe, zadane u obliku (2); njeni koeficijenti E, F, G ovise o točki plohe.

Primjer: Za kuglu je:

$$\mathbf{r} = a(\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}),$$

$$E = a^2\sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2,$$

prva kvadratna forma je: $\mathrm{d}s^2 = a^2(\sin^2 v\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$.

Za plohu zadanu u obliku (2) (vidi na str. 316) vrijedi:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \text{ gdje je } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Mjerenja na plohi. *Duljinu luka* krivulje $u = u(t)$, $v = v(t)$ na plohi za $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ računamo po formuli:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Kut α između dviju krivulja (tj. među njihovim tangentama) koje se sijeku u točki M i u toj točki imaju smjerove vektora $\mathbf{dr}\ \{\mathrm{d}u, \mathrm{d}v\}$ i $\delta\mathbf{r}\ \{\delta u, \delta v\}$ (sl. 254) računamo po formuli:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{dr}\,\delta\mathbf{r}}{\sqrt{(\mathbf{dr})^2(\delta\mathbf{r})^2}} =$$

$$= \frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}\ \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \qquad (**)$$

(koeficijente E, F, G računamo za točku M). Napose su krivulje okomite ako je brojnik $(**)$ jednak nuli; $F = 0$ je *uvjet okomitosti* koordinatnih krivulja $v = \text{const}$ $(\mathrm{d}v = 0)$ i $u = \text{const}$ $(\delta u = 0)$.

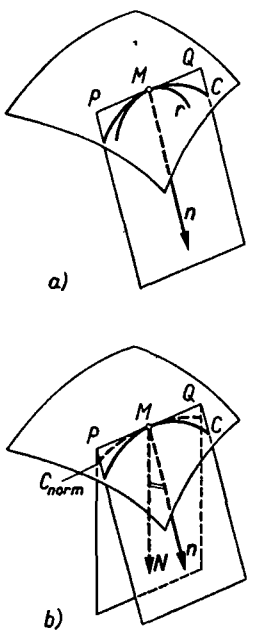
Površinu plohe S ograničene nekom krivuljom na plohi računamo kao dvostruki integral:

$$S = \int_{(S)} \mathrm{d}S, \quad \text{gdje je} \quad \mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \qquad (***)$$

Na taj način, kada znamo koeficijente prve kvadratne forme E, F, G možemo izmjeriti duljine, kutove i površine na plohi po formulama $(*)$, $(**)$, $(***)$, tj. prva kvadratna forma potpuno određuje *metriku plohe*.

Polaganje plohe na plohu pri savijanju. Ako plohu savijamo a da se ne rasteže i trga, njena se jednadžba mijenja, ali metrika ostaje ista, tj. prva kvadratna forma se ne mijenja. Dvije različite plohe, koje imaju istu kvadratnu formu, mogu se *savijanjem* položiti jedna na drugu.

14. ZAKRIVLJENOST PLOHE



Sl. 255

Zakrivljenost krivulja na plohi. Ako kroz točku M povučemo na plohi različite krivulje, onda su u točki M polumjeri zakrivljenosti ρ tih krivulja Γ međusobno povezani ovim odnosima:

1) Polumjer zakrivljenosti ρ krivulje Γ jednak je polumjeru zakrivljenosti krivulje C, koja je presječnica plohe i oskulatorne ravnine Γ u točki M (sl. 255, *a*).

2) Za svaki presjek ravnine C polumjer zakrivljenosti je:

$$\rho = R\cos(\mathbf{n}, \mathbf{N}), \qquad (M)$$

gdje je R polumjer zakrivljenosti normalnog presjeka (C_{norm}) koji prolazi kroz istu tangentu PQ, kao i C, i kroz vektor $\mathbf{N}$, a $(\mathbf{n}, \mathbf{N})$ je kut između jediničnog vektora glavne normale $\mathbf{n}$ (vidi na str. 310) krivulje C i jediničnog vektora normale $\mathbf{N}$ na plohu (*Meusnierov* teorem, sl. 255, *b*). U formuli (M) imamo R sa predznakom plus, ako je $\mathbf{N}$ usmjeren na konkavnu stranu krivulje C_{norm}, a minus, ako je usmjeren na konveksnu stranu.

3) Za svaki normalni presjek C_{norm} zakrivljenost je:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \qquad \text{(E)}$$

(*Eulerova formula*), gdje su R_1 i R_2 *glavni polumjeri zakrivljenosti*, tj. *najveća i najmanja vrijednost* R; dobijemo ih u *glavnim normalnim presjecima* plohe C_1 i C_2 (vidi dalje), a α je kut među ravninama presjeka C i C_1 (sl. 256). U formuli (E) za R, R_1 i R_2 uzimamo predznak plus ili minus, određen kao i u formuli (M).

Glavni polumjeri zakrivljenosti. Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$, onda R_1 i R_2 izračunavamo kao korijene kvadratne jednadžbe:

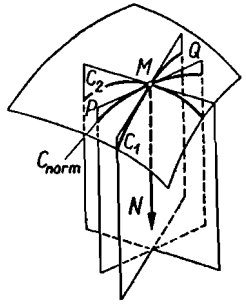
$$(rt - s^2) R^2 + h\,[2pq\,s - (1 + p^2)\,t - (1 + q^2)\,r]\,R + h^4 = 0, \qquad \text{(A)}$$

gdje je:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

i $\quad h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$



Sl. 256

Ravnine glavnih normalnih presjeka C_1 i C_2 međusobno su okomite i njihovi smjerovi određeni su s vrijednošću $\frac{dy}{dx}$, koju dobivamo iz kvadratne jednadžbe:

$$[tpq - s(1 + q^2)] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]\frac{dy}{dx} + [s(1 + p^2) - rpq] = 0. \qquad \text{(B)}$$

Ako je ploha zadana parametarski $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ onda pripadne jednadžbe za (A) i (B) imaju oblik:

$$(DD'' - D'^2) R^2 - (ED'' - 2FD' + GD) R + (EG - F^2) = 0, \qquad \text{(A')}$$

$$(GD' - FD'') \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0, \qquad \text{(B')}$$

gdje se veličine D, D', D'' — koeficijenti *druge kvadratne forme* plohe — određuju formulama:

$$D = r_{11}\mathbf{N} = \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad D' = r_{12}\mathbf{N} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}},$$

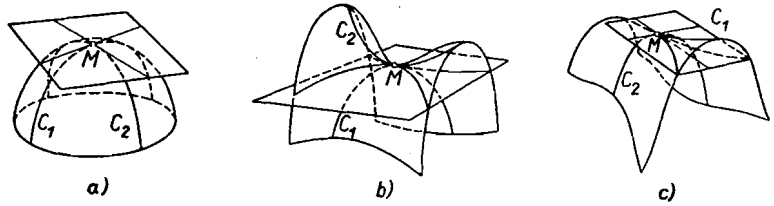
$$D'' = r_{22}\mathbf{N} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}};$$

ovdje su vektori $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{22}$ druge parcijalne derivacije radijvektora $\mathbf{r}$ po parametrima u i v; brojnici d, d', d'' jednaki su:

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Krivulje na plohi, koje u svakoj točki imaju smjer glavnih normalnih presjeka, nazivamo *linijama zakrivljenosti*; njihove jednadžbe dobivamo integriranjem diferencijalne jednadžbe (B) ili (B').

Klasifikacija točaka na plohi. Ako su u točki M plohe obje veličine R_1 i R_2 (str. 322) istog predznaka, onda su glavni normalni presjeci okrenuti svojim konkavnim stranama na istu stranu. U



Sl. 257

tom slučaju u okolini točke M ploha leži s jedne strane tangentne ravnine; takvu točku na plohi nazivamo *eliptičkom* točkom (sl. 257, a); njen je analitički kriterij $DD'' - D'^2 > 0$. Posebno se pri $R_1 = R_2$ točka naziva *kružnom* ili *umbilikalnom*; u njoj je za sve normalne presjeke $R = \text{const}$.

Ako R_1 i R_2 imaju suprotne predznake, onda su glavni normalni presjeci svojim konkavnim stranama okrenuti na suprotne strane. U tom slučaju tangencijalna ravnina siječe plohu koja ima oblik sedla; takvu točku plohe nazivamo *hiperbolnom* (sl. 257, b), a njen analitički kriterij je: $DD'' - D'^2 < 0$.

Ako su R_1 ili R_2 jednaki ∞, onda jedan glavni normalni presjek ima točku infleksije ili je pravac; takvu točku plohe nazivamo *parabolnom* (sl. 257, c), a njen analitički kriterij je: $DD'' - D'^2 = 0$.

Primjeri: Sve točke na elipsoidu su eliptične, na jednokrilnom hiperboloidu su hiperbolne, na valjku su parabolne.

Zakrivljenost plohe. *Srednjom zakrivljenošću* plohe u točki M nazivamo izraz:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

Gaussovom zakrivljenošću nazivamo izraz:

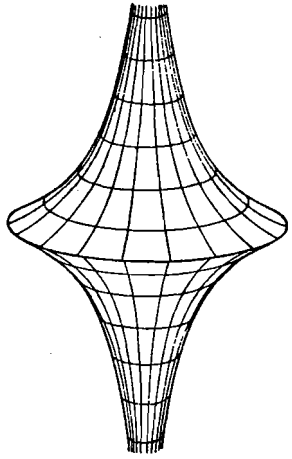
$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Primjer: Za kružni valjak (polumjera a):

$$H = \frac{1}{2a}, \qquad K = 0.$$

Za eliptičke točke je $K > 0$, za hiperbolne je $K < 0$, za parabolne je $K = 0$.

Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$, onda H i K izračunavamo pomoću ovih formula:



Sl. 258

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\ *.$$

Plohe kojima je srednja zakrivljenost H u svim točkama jednaka nuli ($R_1 = -R_2$) nazivamo *minimalnim plohama.* Plohe kojima je Gaussova zakrivljenost K u svim točkama konstantna nazivamo *plohama s konstantnom zakrivljenošću*; najjednostavniji primjeri takvih ploha su ovi: za $K > 0$ *kugla*, za $K < 0$ *pseudosfera* [(sl. 258 rotaciona ploha traktrise (v. str. 151) oko njene asimptote].

* Oznake p, q, r, s, t vidi na str. 322.

15. PRAVČASTE I RAZMOTLJIVE PLOHE

Plohe nazivamo *pravčastim* ako ih možemo dobiti pomicanjem pravca; ako pri tome plohu možemo razmotati na ravninu onda je nazivamo *razmotljivom.* Jednostavniji primjeri razmotljivih ploha su valjkasta i čunjasta ploha (vidi na str. 233 i 225). Ali svaka pravčasta ploha nije razmotljiva (npr. jednokrilni hiperboloid i hiperbolni paraboloid su pravčaste, ali nisu razmotljive plohe, vidi na str. 287). U svim točkama razmotljive plohe Gaussova zakrivljenost jednaka je nuli. Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$ onda je uvjet razmotljivsti:

$$rt - s^2 = 0^*.$$

16. GEODETSKE LINIJE NA PLOHI

Pojam geodetske linije. Kroz svaku točku plohe $M(u, v)$ u svim smjerovima određenim sa $\frac{dv}{du}$ prolazi na plohi određena krivulja, tzv. *geodetska linija*, koja na toj plohi ima ulogu pravca: 1) ako je materijalna točka prisiljena da ostane na plohi, onda se ona giba po geodetskoj liniji ako na nju ne djeluju druge vanjske sile; 2) elastična nit, koja je nategnuta duž plohe poprima oblik geodetske linije; 3) linija najkraće udaljenosti između dviju točaka na plohi jest geodetska linija.

Definicija. Geodetskom linijom na plohi nazivamo takvu krivulju kojoj se glavna normala u svakoj točki podudara s normalom na plohu.

Primjer: Za kružni valjak su geodetske linije zavojnice.

Jednadžba: Ako je ploha zadana u obliku $z = f(x\ y)$, onda je diferencijalna jednadžba geodetske linije:

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (pr - 2qs)\frac{dy}{dx} - qr^*.$$

Ako je ploha zadana u obliku (3) (vidi na str. 316), onda je diferencijalna jednadžba geodetske linije nešto složenija.

* Oznake p, q, r, s, t vidi na str. 322.

ČETVRTI DIO

OSNOVI MATEMATIČKE ANALIZE

I. UVOD U ANALIZU

1. REALNI BROJEVI

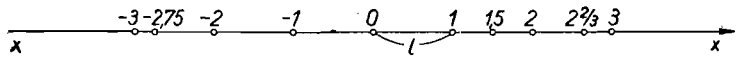
Racionalni brojevi. Svi cijeli brojevi i svi razlomci (pozitivni, negativni i nula) zovu se *racionalni*. Racionalni brojevi tvore beskonačan skup, koji ima ova svojstva:

1) Skup je *uređen*, tj. za svaka dva različita racionalna broja a i b možemo reći koji je od njih manji.

2) Skup je posvuda *gust*, tj. između svaka dva različita racionalna broja a i b $(a < b)$ postoji još jedan racionalni broj c $(a < c < b)$, a stoga i beskonačan skup racionalnih brojeva.

3) Aritmetičke operacije (zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje) s bilo koja dva racionalna broja uvijek su moguće, i kao rezultat daju opet racionalan broj. Izuzetak je *dijeljenje s nulom* koje *nije izvedivo*; oblik $\frac{a}{0}$ nema točan smisao, jer ne postoji određeni broj b koji zadovoljava jednadžbu $b \cdot 0 = a$ (ako je $a = 0$, tada b može biti bilo koji broj, a ako je $a \neq 0$, tada b ne postoji*).

4) Svaki racionalni broj a može biti izražen u obliku decimalnog razlomka (konačnog ili beskonačnog i periodičkog).

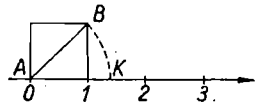


Sl. 259

Geometrijsko predočivanje racionalnih brojeva. Ako na pravcu xx (sl. 259) odredimo kao početak brojanja 0 (*nultočka*), pozitivni smjer (*orijentaciju*) i jedinicu za mjerenje l (*mjerilo*), tada svakom racionalnom broju a pripada određena točka tog pravca, koja ima koordinatu a (*racionalna točka*). Pravac xx nazivamo *brojevnim pravcem*. U skladu sa svojstvom pod 2) postoji između dvije racionalne točke beskonačan skup racionalnih točaka.

* Često pišemo $\frac{a}{0} = \infty$ (*neizmjerno*); to ne znači da je takvo dijeljenje moguće (∞ nije broj!), već je to samo skraćeno pisanje fraze: »ako se divizor približava nuli, kvocijent neograničeno raste po apsolutnoj veličini«.

Iracionalni brojevi. Skup racionalnih brojeva nije dovoljan za matematičku analizu; iako je on posvuda gust, ne ispunjava cijeli brojevni pravac. Na primjer, ako dijagonale kvadrata AB sa stranicom 1 položimo na brojevni pravac tako da se točka A poklapa sa točkom 0, tada će B pasti na točku K, koja nema racionalne koordinate (sl. 260). Uvođenje *iracionalnih brojeva* omogućuje nam da *svakoj* točki brojevnog pravca pridružimo neki broj i da time skup brojeva učinimo neprekinutim.



Sl. 260

Strogu definiciju iracionalnih brojeva daju udžbenici matematičke analize. Iracionalni brojevi se na brojevnom pravcu prikazuju točkama koje ispunjavaju sve praznine među racionalnim točkama. *Svaki iracionalni broj možemo izraziti neperiodičnim beskonačnim decimalnim razlomkom.*

U iracionalne brojeve spadaju napose necijeli realni korijeni algebarskih jednadžbi oblika

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(s cijelim koeficijentima). Npr. jednadžba $x^3 - 9x + 4 = 0$ ima iracionalne korijene (vidi str. 181). Takvi se brojevi nazivaju *algebarske iracionalnosti*. Jednostavniji primjeri algebarskih iracionalnosti jesu korijeni binomnih jednadžbi $x^n - a = 0$ ili brojevi oblika $\sqrt[n]{a}$, ako nisu racionalni (na primjer: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$). Iracionalne brojeve, koji nisu algebarske iracionalnosti, nazivamo *transcendentnim*. K njima spadaju

$$\pi = 3{,}14159265\ldots, \quad e = 2{,}7182818\ldots,$$

dekadski logaritmi cijelih brojeva (osim onih oblika 10^n), većina vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta koji je jednak cijelom broju stupnjeva.

Realni brojevi. Sve racionalne i iracionalne brojeve nazivamo *realnim brojevima*. Osnovna su svojstva skupova realnih brojeva:

1) Skup realnih brojeva je *uređen* (vidi str. 326);

2) *posvuda je gust* (vidi str. 326);

3) *neprekinut skup je*, tj. (za razliku od skupa racionalnih brojeva) svaka točka brojevnog pravca ima jedan broj iz toga skupa kao koordinatu;

4) aritmetičke operacije s realnim brojevima uvijek su moguće (osim dijeljenja s nulom, vidi str. 326) i daju kao rezultat neki realni broj. Potenciranje i inverzne operacije također su moguće u sistemu realnih brojeva [iz svakog pozitivnog iracionalnog broja možemo izvaditi korijen po volji uzetog stupnja; svaki pozitivni realni broj ima logaritam za svaku pozitivnu bazu (osim za jedinicu)].

Daljnje poopćenje pojma broja u matematičkoj analizi jesu *kompleksni brojevi* (vidi str. 599).

2. NIZOVI I NJIHOVI LIMESI

Nizovi. *Nizom brojeva** nazivamo beskonačan skup brojeva

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

koji su raspoređeni u određenom poretku jedan za drugim. Brojevi koji ulaze u niz nazivaju se *članovima*. Članovi niza mogu biti i međusobno jednaki.

Niz smatramo zadanim ako je poznat zakon po kojem se on tvori, tj. pravilo po kojem možemo odrediti svaki član niza. U mnogim slučajevima možemo postaviti formulu za *opći član* a_n niza:

Primjeri: 1) $a_n = n$, 2) $a_n = 4 + 3(n-1)$, 3) $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 4) $a_n = (-1)^{n+1}$, 5) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$, 6) $a_n = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot 10^{-\frac{n-1}{2}}$ za neparni n i $a_n = 3\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 10^{-\frac{n}{2}+1}$ za parni n, 7) $a_n = \frac{1}{n}$, 8) $a_n = (-1)^{n+1} n$, 9) $a_n = -\frac{n+1}{2}$ za neparni n i $a_n = 0$ za parni n, 10) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}}$ za neparni n i $a_n = 13 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2}}$ za parni n.

Prvi članovi tih nizova jesu:

1) 1, 2, 3, 4, 5, ... (niz prirodnih brojeva)

2) 4, 7, 10, 13, 16, ... (aritmetička progresija)

* Ovdje se razmatraju samo beskonačni nizovi.

3) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ (geometrijska progresija),

4) 1, −1, 1, −1, 1, ...,

5) $1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \ldots$,

6) 3, 4, 3,3, 3,4, 3,33, 3,34, 3,333, 3,334, ...,

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$,

8) 1, −2, 3, −4, 5, −6, ...,

9) −1, 0, −2, 0, −3, 0, −4, 0, ...,

10) $1, 11, 2, 12, 2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots$,

Limes niza. Ako za zadani niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ postoji broj A, kojemu se brojevi a_n neograničeno približuju kada n raste, tada takav broj A nazivamo *limesom* niza*. Oznaka:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

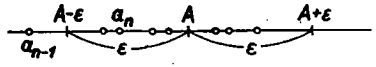
Točna formulacija: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, ako za svaki po volji maleni pozitivni broj ε u zadanom nizu postoji takav broj a_N, da je bez iznimke za sve a_n, koji su u nizu iza a_N (tj. za $n > N$), njihova razlika od A apsolutno manja od ε:

$$|a_n - A| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Od razmatranih primjera 1 do 10 limes imaju nizovi 3, 5, 6 i 7. Limesi su:

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 5) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, 6) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3\frac{1}{3}$, 7) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Geometrijski smisao. Ako članove niza, koji imaju limes, prikažemo točkama brojevnog pravca, tada, počevši od a_N, sva točke a_n padaju u interval omeđen s točkama $A - \varepsilon$ i $A + \varepsilon$ (sl. 261):



Sl. 261

Neizmjerni limes. Slučaj kada limes ne postoji zbog toga što a_n s povećanjem n neograničeno raste po apsolutnoj vrijednosti, označavamo simbolom

* Brojevi a_n mogu se za neke n poklapati s limesom A.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (»limes jednak neizmjerno«).

Točna formulacija: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ako za po volji velik pozitivan broj K možemo naći u zadanom nizu takav broj N, da su svi brojevi a_n za $n > N$ po apsolutnoj vrijednosti veći od K:

$$|a_n| > K \qquad (n > N).$$

Ako su pri tom svi brojevi a_n $(n > N)$ veći od 0, pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako su svi brojevi a_n manji od 0, tada pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Od razmotrenih primjera 1 do 10 neizmjerne limese imaju nizovi 1), 2) i 8), pri čemu je u primjerima 1 i 2 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Monotoni nizovi. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ nazivamo:
uzlaznim, ako je

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots, \tag{1}$$

silaznim, ako je

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{2}$$

nesilaznim, ako je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \tag{3}$$

neuzlaznim, ako je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots. \tag{4}$$

Nizove oblika (1), (2), (3), (4) općenito nazivamo *monotonim*, pri čemu su nizovi (1) i (3) — *monotono uzlazni*, a nizovi (2) i (4) — *monotono silazni*.

Nizovi (1) i (2) nazivaju se ponekad, za razliku od nizova (3) i (4), *striktno monotonim*. Točke brojevnog pravca koje prikazuju članove monotonog niza idu (prema rednom broju članova) u jednom smjeru, a kod nizova (3) i (4) mogu se neki susjedni članovi prikazati istim točkama. Od nizova u primjerima 1 do 10 na str. 328, monotoni su samo 1), 2), 5) (uzlazni) i 7) (silazni).

Ograđeni niz. Ako za zadani niz možemo navesti takav pozitivni broj K da svi članovi niza bez iznimke budu po apsolutnoj veličini manji od K ($|a_n| < K$), tada niz nazivamo *ograđenim*; ako takav broj ne postoji, niz je neograđen. Od primjera 1 do 10 na str. 328 ograđeni su nizovi 3 ($K = 4$), 4 ($K = 2$), 5 ($K = 3$), 6 ($K = 5$), 7 ($K = 2$), 10 ($K = 13$).

Osnovni teoremi o limesima nizova

1) Niz može imati samo jedan limes.

2) Niz koji ima konačan limes ograđen je; niz kojem je limes neizmjerno nije ograđen.

3) Monoton ograđen niz ima konačan limes; ako taj niz monotono raste, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant a_n$; ako monotono pada, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant a_n$.

4) Monotono neograđen niz ima za limes neizmjerno; ako taj niz monotono raste, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; ako monotono pada, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

5) **Potreban i dovoljan uvjet da limes niza postoji.** Da niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ima limes, nužno je i dovoljno da za bilo kako malen broj ε možemo naći takav član a_N niza da se *bilo koja dva* njegova člana, koja stoje iza a_N, razlikuju jedan od drugoga za broj koji je apsolutno manji od ε, tj.:

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \quad \text{za} \quad i > N \quad \text{i} \quad j > N^*.$$

Ostala svojstva i računanje limesa vidi na str. 341 do 344 (»Limes funkcije«).

3. FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE**

Definicija. Varijablu y nazivamo *funkcijom* varijable x (*argumenta* ili *nezavisne varijable*), ako za zadanu vrijednost x veličina y poprima jednu određenu vrijednost (*jednoznačna funkcija*; na primjer $y = x^2$) ili nekoliko određenih vrijednosti (*višeznačna funkcija*, na primjer funkcija $y = \pm\sqrt{x}$ je dvoznačna). Simboli $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ itd. označavaju različite funkcije varijable x; $f(a)$ jest vrijednost funkcije $f(x)$ koju ona prima za $x = a$; na primjer ako je $f(x) = x^2 + 2x - 5$, tada je $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10$.

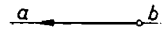
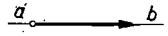
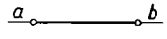
Skup vrijednosti x, za koje je funkcija određena, tvori *područje definicije* funkcije. Najčešće se razmatraju funkcije koje imaju povezano (suvislo) područje definicije. Područje realnih brojeva nazivamo suvislim ako ono 1) ima više od jednog broja i 2) nema praznina, tj. svi brojevi između bilo koja dva broja, koja pripadaju području, spadaju u to područje. Suvislo područje može biti *neograđeno* s obje strane (tj. sadržavati sve točke brojevnog pravca), *ograđeno slijeva* ili *zdesna* (tj. sadržavati sve brojeve veće ili manje od zadanog broja) i *ograđeno* s obje strane (tj. sadržavati sve brojeve između

* Niz koji ima ta svojstva naziva se *temeljnim* ili *fundamentalnim*.

** Ovdje se razmatraju samo funkcije realne varijable. O funkcijama kompleksne varijable vidi na str. 604, 609.

dva zadana). Suvislo područje nazivamo također i *intervalom brojeva s krajevima a* i *b* ($a < b$; kraj a može biti jednak $-\infty$, a kraj b biti jednak $+\infty$). Kraj intervala a ili b nazivamo *otvorenim* ako on ne pripada području, a *zatvorenim*, ako tom području pripada (krajeve $-\infty$ i $+\infty$ smatramo otvorenim).

Interval označavamo njegovim krajevima a i b zatvorenim u zagrade. Pri tom kod otvorenog kraja stavljamo okruglu zagradu, a kod zatvorenog uglastu. Interval sa dva otvorena kraja nazivamo *otvorenim*, sa jednim otvorenim i jednim zatvorenim krajem *poluotvorenim*, sa dva zatvorena kraja *zatvorenim* (vidi sl. 262)*.

Naziv intervala	Granice područja	Oznake intervala	Prikaz u brojevnom pravcu
Otvoren	$a < x < b$	(a, b)	
Poluotvoren	$a < x \leqslant b$	$(a, b]$	
	$a \leqslant x < b$	$[a, b)$	
Zatvoren	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$	
Beskonačni intervali	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	Sl. 262
	$-\infty < x < b$	$(-\infty, b)$	
	$-\infty < x \leqslant b$	$(-\infty, b]$	
	$a < x < +\infty$	$(a, +\infty)$	
	$a \leqslant x < +\infty$	$[a, +\infty)$	

Često razmatramo također funkcije koje za područje definicije imaju konačan skup ili beskonačan niz brojeva. Kao područje definicije osobito često razmatramo skup cijelih pozitivnih brojeva (niz prirodnih brojeva); vrijednosti koje poprima takva funkcija možemo svrstati u niz:

$$f(1), \quad f(2), \quad f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

(*funkcija cjelobrojnog argumenta*).

Razmatramo također i područja definicije, koja se sastoje od više povezanih područja i pojedinih brojeva.

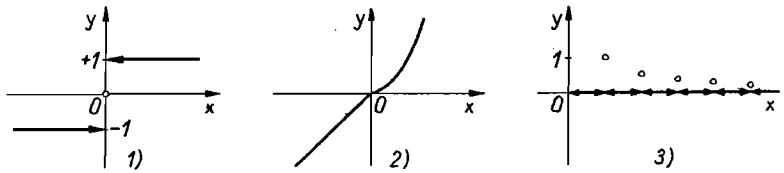
Načini definicije funkcija. Funkcija može biti zadana (definirana) na različite načine, na primjer tablicom vrijednosti, grafom, sa jednom ili (za razna područja) s nekoliko formula.

* Na brojevnom pravcu otvoreni kraj intervala simbolički se označava strelicom, a zatvoreni kraj točkom.

Primjeri funkcija zadanih s nekoliko formula i njihovim grafovima (sl. 263)*.

$$1)\ y = \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ +1 & \text{za } x > 0. \end{cases} \qquad 2)\ y = \begin{cases} x & \text{za } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{za } x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$3)\ y = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{za cijeli, pozitivni } n, \\ 0 & \text{kada } n \text{ nije cio.} \end{cases}$$



Sl. 263

Područje definicije analitičkog izraza. U matematičkoj analizi u prvome redu razmatramo funkcije koje su definirane jednom formulom, pri čemu u područje definicije takve funkcije spadaju sve vrijednosti argumenata za koje zadani analitički izraz ima smisao, tj. poprima određene, konačne realne vrijednosti. Takvo područje se naziva *područjem definicije analitičkog izraza*. Obično, ako nema dodatnih ograničenja, kao područje u kom je zadana *(postoji)* funkcija, koja je definirana jednom formulom, podrazumijevamo upravo područje definicije. U područje definicije ne ulaze u načelu one vrijednosti varijable za koje funkcija: 1) poprima kompleksne vrijednosti, 2) »postaje neizmjerna« (vidi str. 346, tipovi prekinutosti funkcija), 3) poprima neodređene vrijednosti (vidi na str. 342 do 344, neodređeni oblici).

Primjeri: 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; područje definicije $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $y = \lg \cos x$; područje definicije $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$, $\ldots$, $\frac{(4n-1)\pi}{2} < x < \frac{(4n+1)\pi}{2}$, $\ldots$ za n cio broj.

Osnovni oblici analitički zadavanih funkcija. Funkcije mogu biti zadane *eksplicitno*, kada je y izražen sa x [$y = f(x)$]; *implicitno*, kada su x i y međusobno vezani s jednadžbom [$F(x, y) = 0$], na primjer, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ili $y^y - xy = 0$; *parametarski*, kada

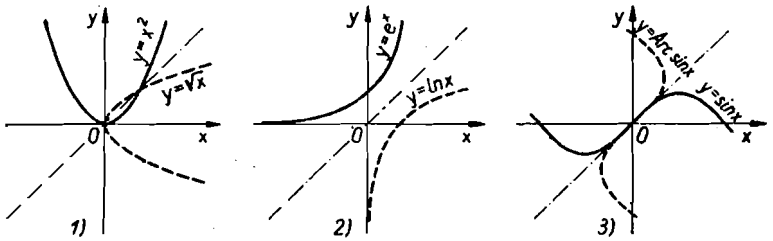
* Strelice pokazuju da njihovi krajevi (šiljci) ne pripadaju grafu.

su vrijednosti x i y, koje međusobno odgovaraju jedna drugoj, izražene pomoću treće varijable, koju nazivamo parametrom $[x = \varphi(t),\ y = \varphi(t)]$, na primjer $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Inverzne funkcije. Dvije funkcije $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ zovemo *inverznim* ako za svaki par vrijednosti a, b, koje zadovoljavaju uvjet $b = f(a)$, zadovoljavaju također uvjet $a = \varphi(b)$, a za svaki par koji zadovoljava uvjet $a = \varphi(b)$, zadovoljava uvjet $b = f(a)$. Jednu od dviju međusobno inverznih funkcija zovemo *direktnom* (bez razlike koju); drugu zovemo *inverznom*, s obzirom na prvu.

Primjeri inverznih funkcija (sl. 264): 1) $y = x^2$ i $y = \pm\sqrt{x}$ 2) $y = e^x$ i $y = \ln x$, 3) $y = \sin x$ i $y = \operatorname{Arc}\sin x$.

Da bi se iz direktne funkcije $y = f(x)$ dobila inverzna, treba međusobno zamijeniti mjesta argumenta i funkcije; jednadžba $x = f(y)$ definira implicitno inverznu funkciju s obzirom na $y = f(x)$. Ako riješimo jednadžbu $x = f(y)$ po y, dobivamo inverznu funkciju $y = \varphi(x)$ u eksplicitnom obliku.



Sl. 264

Grafovi direktne i inverzne funkcije simetrični su s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta (vidi sl. 264).

Elementarne funkcije* su funkcije definirane formulama koje sadrže konačan broj algebarskih ili trigonometrijskih operacija izvedenih na argumentu, funkciji i nekim konstantama. (Pod tim operacijama mislimo na četiri aritmetičke operacije, potenciranje na po volji uzetu potenciju, korjenovanje, logaritmiranje i antilogaritmiranje za po volji uzetu bazu, uzimanje trigonometrijske ili ciklometrijske funkcije). Elementarne funkcije dijele se na *algebarske* i *transcendentne*.

Kod *algebarskih* funkcija su argument x i funkcija y međusobno povezani algebarskom jednadžbom oblika:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x^n y^m = 0,$$

* Tablice jednostavnijih elementarnih funkcija vidi na str. 19 do 113 grafove elementarnih funkcija na str. 114 do 131.

na primjer $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$. Ako ovakvu jednadžbu možemo algebarski riješiti po y, tada dobivamo jedan od ovih jednostavnih tipova algebarskih funkcija:

1) *Cijela funkcija* (*polinom*): sa x se vrši samo zbrajanje, odbijanje i množenje: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Posebno su cijele funkcije $y = a$ (*konstanta*), $y = ax + b$ (*linearna funkcija*), $y = ax^2 + bx + c$ (*kvadratna funkcija*).

2) *Razlomljena* (*racionalna*) *funkcija*: sa x se vrši zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje*. Razlomljenu funkciju uvijek možemo izraziti kvocijentom dviju cijelih funkcija:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Posebno nazivamo $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ *razlomljenom linearnom funkcijom.*

3) *Iracionalna funkcija:* Sa x**, osim operacija nabrojanih pod 2), vršimo i korjenovanje***. Na primjer $y = \sqrt{2x + 3}$, $y = \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}$.

Transcendentne funkcije su takve kod kojih argument i funkcija ne mogu biti vezani algebarskom zavisnošću $\Sigma a_i x^m y^n = 0$. Jednostavnije takve funkcije (*elementarne transcendentne funkcije*) jesu:

1) *Potencija*: varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se u eksponentu (na primjer: $y = e^x$, $y = a^x$, $y = 2^{3x^2-5x}$).

2) *Logaritamske funkcije:* varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se pod znakom logaritma [(na primjer: $y = \ln x$, $y = \lg x$, $y = \log_2(5x^2 - 3x)$].

3) *Trigonometrijske funkcije:* varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se pod znakom sin, cos, tg, ctg, sc, csc (na primjer, $y = \sin x$, $y = \cos(2x + 3)$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$).****

* Ako se dijeljenje ne može izbjeći skraćivanjem.

** Ili sa racionalnom funkcijom od x.

*** Ako se korjenovanje ne može izbjeći izlučivanjem.

**** Pod argumentom x trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$... u analizi ne razumijevamo kut ili luk kružnice (kako se to radi kod prvih upoznavanja tih funkcija u elementarnoj trigonometriji), već po volji uzetu veličinu; trigonometrijske funkcije mogu biti određene čisto analitički, bez pomoći geometrijskih predodžbi [na primjer funkcija $\sin x$ sa svojim razvojem u red potencija (vidi na str. 400) ili kao rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ s početnim uvjetima $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 1$]. Pri takvom shvaćanju trigonometrijske funkcije njen je argument brojčano jednak luku kružnice koji je izražen u radijanima. Prema tome za računanje trigonometrijskih funkcija mogu poslužiti obične trigonometrijske tablice, ako se argument preračuna u radijane.

4) *Ciklometrijske funkcije:* varijabla x ili njena algebarska funkcija nalaze se pod znakom arc sin, arc cos itd. (na primjer, arc sin x, arc cos $\sqrt{1-x}$).

Sve moguće kombinacije algebarskih i transcendentnih funkcija, kada jedna funkcija može služiti kao argument za drugu, daju *složene funkcije*, na primjer, $y = \ln \sin x$, $y = \dfrac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x}$ itd. Takve kombinacije elementarnih funkcija, uzete u konačnom broju, daju također elementarne funkcije.

Neelementarne funkcije. Funkcije koje nisu elementarne možemo definirati na različite načine, počevši od opisivanja veze između vrijednosti argumenta i funkcije. U matematičkoj analizi često se primjenjuju ovi načini definiranja neelementarnih funkcija*:

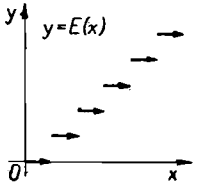
1) Pomoću nekih matematičkih formula (vidi str. 333).

2) Pomoću graničnih prijelaza; posebno:

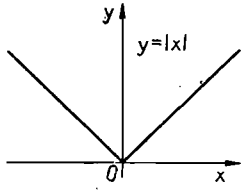
a) pomoću redova i beskonačnih produkata (vidi str. 366),

b) pomoću određenih integrala (s jednom ili dvije promjenljive granice), koje ne možemo izraziti elementarnim funkcijama (vidi str. 409),

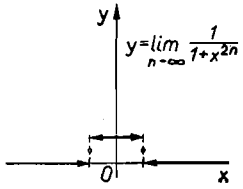
c) pomoću određenih integrala s konstantnim granicama, koje imaju promjenljiv parametar (vidi str. 496).



Sl. 265



Sl. 266



Sl. 267

3) Pomoću diferencijalnih jednadžbi, koje ne možemo riješiti kvadraturama.

4) Pomoću funkcionalnih jednadžbi.

Za neelementarne funkcije koje imaju teoretsko ili praktičko značenje, sastavljamo tablice, crtamo grafove, proučavamo osobine. Takve se funkcije nazivaju *specijalnim*; njima dajemo često posebna imena i oznake.

* Ponekad možemo definirati istu funkciju na različite načine.

Primjeri neelementarnih funkcija:

1) *Cijeli dio varijable* x: y je jednak najvećem cijelom broju koji ne prelazi x. Oznaka: $E(x)$; graf — vidi sl. 265.

2) *Apsolutna vrijednost varijable* x: $y = \begin{cases} -x & \text{za } x \leqslant 0, \\ x & \text{za } x \geqslant 0. \end{cases}$

Oznaka: $y = |x|$; graf — vidi sl. 266.

3) *Predznak* (»signum«) varijable x: $y = \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ 1 & \text{za } x > 0. \end{cases}$

Oznaka: $y = \operatorname{sgn} x$; graf — vidi sl. 263, 1), na str. 333.

4) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ ili $y = \begin{cases} 1 & \text{za } |x| < 1; \\ \dfrac{1}{2} & \text{za } |x| = 1; \\ 0 & \text{za } |x| > 1; \end{cases}$ Graf — vidi sl. 267.

5) $y = \int\limits_0^x \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ ili $y = x - \dfrac{x^3}{3\cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5\cdot 5!} - \dfrac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots$

Oznaka: $y = \operatorname{Si}(x)$ (»integralni sinus«, vidi na str. 452).

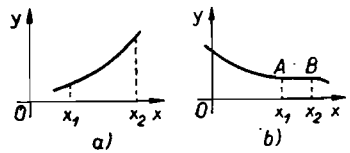
6) $y = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ ili $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$

Oznaka: $y = \Gamma(x)$ (»gama-funkcija«), vidi str. 208.

7) Rješenje Besselove jednadžbe: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$ za određene početne uvjete (»*Besselova funkcija*«, vidi na str. 564).

Neki tipovi funkcija

1) *Monotone funkcije* su funkcije koje za bilo koji $x_2 > x_1$, iz područja definicije, zadovoljavaju uvjet $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ (*monotono uzlazna funkcija*, sl. 268, *a*), ili $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ (*monotono silazna funkcija*, sl. 268, *b*); na primjer $y = e^{-x}$, $y = \ln x$.



Sl. 268

Ako taj uvjet nije zadovoljen za sve vrijednosti x cijelog područja definicije, već samo za dio područja (interval, poluos), tada se funkcija zove *monotona u tom području**.

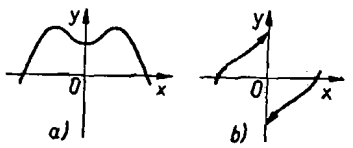
* Monotone funkcije, naprijed definirane, često nazivamo *monotonim u širem smislu*. Funkcija pak koja zadovoljava uvjet $f(x_2) > f(x_1)$ ili $f(x_2) < f(x_1)$ (bez znaka =) naziva se *striktno uzlaznom* (odnosno *striktno silaznom*). Funkcija prikazana na sl. 268, *a* striktno je uzlazna, a ona prikazana na sl. 268, *b* je silazna u širem smislu (na dijelu AB funkcija je konstantna).

2) *Ograđene funkcije.* Funkcija koja je *ograđena odozgo* jest ona kojoj vrijednosti ne prelaze neki broj, a koja je *ograđena odozdo* jest ona kojoj vrijednosti nisu manje od nekog broja. Funkciju koja je ograđena odozgo i odozdo nazivamo *ograđenom.*

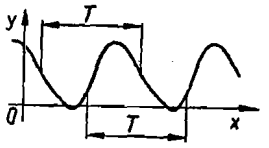
Primjeri: $y = 1 - x^2$ je ograđena odozgo ($y \leqslant 1$); $y = e^x$ je ograđena odozdo ($y > 0$); $y = \sin x$ je ograđena ($-1 \leqslant y \leqslant +1$); $y = \dfrac{4}{1+x^2}$ je ograđena $(0 < y \leqslant 4)$.

3) *Parne funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(-x) = f(+x)$ (sl. 269, *a*); na primjer $y = \cos x$, $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

4) *Neparne funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(-x) = -f(+x)$ (sl. 269, *b*); na primjer $y = \sin x$, $y = x^3 - x$.



Sl. 269



Sl. 270

5) *Periodične funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(x + T) = f(x)$; broj T nazivamo *periodom funkcije* (sl. 270). Obično se periodom naziva najmanji broj T koji zadovoljava taj uvjet.

4. LIMES FUNKCIJE

Pojam *limesa* je ovdje razmotren samo za dva tipa funkcija: 1) za funkciju kod koje je argument cio broj (vidi str. 332) i 2) za funkciju definiranu u suvislom području (vidi str. 331)*.

Limes funkcije kod koje je argument cio broj $y = f(x)$ ($x = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$) određuje se samo za $x \to \infty$; to je limes niza brojeva** $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

Primjeri: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

* Pojam limesa može se razmatrati i za funkcije sa složenijim područjem definicije.

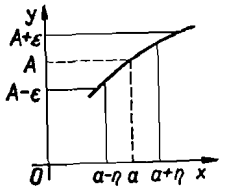
** Vidi str. 329.

Limes funkcije neprekinutog argumenta (tj. sa suvislim područjem definicije).

Definicija. Funkcija $y = f(x)$ ima *limes* A kada $x \to a$:

$$A = \lim_{x \to a} f(x),$$

ako kod približavanja x k a vrijednost funkcije $f(x)$ dolazi po volji blizu broju A. Za vrijednost $x = a$ može da i ne poprimi vrijednost A i općenito može biti nedefinirana.



Sl. 271

Tačna formulacija: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ako, zadavši po volji malen pozitivni broj ε, možemo naći takav pozitivni broj η da po volji uzetim vrijednostima x u intervalu $a - \eta < x < a + \eta$* (osim, eventualno, vrijednosti $x = a$) pripadne vrijednosti $f(x)$ budu u intervalu $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (sl. 271).

Uvjeti za postojanje limesa

1) *Svođenje na limes niza.* Funkcija $f(x)$ ima limes A za $x = a$, ako za *po volji uzeti* niz vrijednosti x ($x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$) iz područja definicije funkcije, kojemu je limes broj a, niz pripadnih vrijednosti $[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots]$ ima limes. Taj limes A je za sve nizove isti i on je limes funkcije $f(x)$.

2) *Cauchyjev uvjet.* Da bi funkcija $f(x)$ imala limes za $x = a$, nužno je i dovoljno da su za po volji uzete dvije vrijednosti argumenta x_1 i x_2 iz područja definicije funkcije, a dovoljno blizu a, pripadne vrijednosti funkcija $f(x_1)$ i $f(x_2)$ budu također međusobno veoma blizu.

Tačna formulacija: Da bi funkcija $f(x)$ imala limes za $x = a$, nužno je i dovoljno da za svaki po volji uzeti mali pozitivni broj ε možemo naći takav pozitivni broj η, da je za po volji uzeti x_1 i x_2, iz područja definicije funkcije, koji zadovoljavaju uvjete $|x_1 - a| < \eta$ i $|x_2 - a| < \eta$, ispunjen uvjet:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Neizmjerni limes funkcije je pojam analogan neizmjernom limesu niza (str. 329); simbolom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (*limes jednak neizmjerno*) označujemo slučaj kada za $x \to a$ nema limesa funkcije zbog toga što funkcija $f(x)$ neograničeno raste po apsolutnoj vrijednosti kada se x približava k a.

* Ako je *a granična* točka suvislog područja, za koje je funkcija zadana, tada se ta dvojna nejednakost zamjenjuje s jednostavnom: $a - \eta < x$ ili $x < a + \eta$.

Točna formulacija: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ako, zadavši po volji velik pozitivan broj K, možemo naći takav pozitivni broj η da za po volji uzete vrijednosti x u intervalu $a-\eta < x < a+\eta$ pripadne vrijednosti $f(x)$ budu po apsolutnoj vrijednosti veće od K:

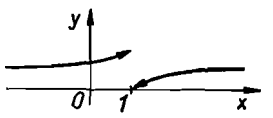
$$|f(x)| > K.$$

Ako su pri tome sve vrijednosti $f(x)$ u intervalu $a-\eta < x < a+\eta$ pozitivne, tada pišemo $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$; ako su negativne, tada je $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Lijevi i desni limes funkcije. Funkcija $f(x)$ ima za $x = a$ lijevi limes A ako se neograničeno približava vrijednosti A kada se x uzlazno približava vrijednosti a. Oznaka: $A = f(a-0)$. Analogno, funkcija za $x = a$ ima *desni* limes A, ako dolazi po volji blizu A kada se x silazno približava vrijednosti a. Oznaka: $A = f(a+0)$. Npr. funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ za $x \to 1$ teži k različitim lijevim i desnim limesima: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (sl. 272).

Limes funkcije kada $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Broj A naziva se limesom funkcije $y = f(x)$ kada $x \to +\infty$:

$$A = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$



Sl. 272

ako, zadavši po volji malen pozitivan broj ε, možemo naći takav broj N da se za po volji uzete vrijednosti za $x > N$ pripadne vrijednosti $f(x)$ nađu u intervalu $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Analogno

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

ako, zadavši po volji malen pozitivan broj ε, možemo naći takav broj N da se za po volji uzete vrijednosti za $x < -N$ pripadne vrijednosti $f(x)$ nađu u intervalu $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Na primjer:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Ako pak funkcija po apsolutnoj vrijednosti neograničeno raste kada x neograničeno raste ili neograničeno pada limesa pri $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) nema. Taj uvjet označavamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Na primjer:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty.$$

Osnovni teoremi o limesima funkcija

1) Limes konstante jednak je toj konstanti:

$$\lim A = A.$$

2) Limes zbroja (razlike) konačnog broja funkcija jednak je pripadnom zbroju (razlici) limesa tih funkcija:

$$\lim_{x\to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x) - \lim_{x\to a} \psi(x).$$

3) Limes produkta konačnog broja funkcija jednak je produktu limesa tih funkcija:

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \varphi(x) \cdot \lim_{x\to a} \psi(x).$$

4) Limes kvocijenta dviju funkcija:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} \varphi(x)}, \quad \text{ako je } \lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0.$$

5) Ako je funkcija $f(x)$ uključena između dvije druge funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$: $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ i ako je $\lim_{x\to a} \varphi(x) = A$ i $\lim_{x\to a} \psi(x) = A$, tada je

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

6) Monotona funkcija neprekinutog argumenta ima limes (konačni ili neizmjerni) za svaku vrijednost x (konačnu ili neizmjernu); monotona ograđena funkcija ima konačan limes za svaku vrijednost x.

Neki važni limesi

1) *Broj e*: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$ (iracionalan broj).

Tablica vrijednosti vezanih sa e vidi na str. 21. Broj e je baza sistema prirodnih logaritama (vidi str. 174).

2) *Broj C*: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$ (*Eulerova konstanta*).

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, ako je x duljina luka ili kut izražen u radijanima.

Računanje limesa. Za računanje limesa primjenjujemo naprijed iznesene osnovne teoreme, ali također i ove:

1) Pretvaramo funkciju u oblik za koji je lako naći limes.

Primjeri: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin 2x)}{2x}=2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2 \text{ itd.}$$

2) U slučajevima koji se svode na »neodređene oblike« $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, primjenjujemo *L'Hospitalovo pravilo*:

a) *Neodređeni oblici* $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Ako je $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pri čemu su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ definirane* u intervalu koji sadrži točku a i imaju u tom intervalu konačne derivacije $[\psi'(x)\neq 0]$, i ako je:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \text{ i } \lim_{x\to a}\psi(x)=0 \left(\text{»neodređeni oblik } \frac{0}{0}\text{«}\right)$$

ili:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty \text{ i } \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty \left(\text{»neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}\text{«}\right),$$

tada je:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

uz uvjet da taj limes postoji ili je jednak ∞ (*L'Hospitalovo pravilo*).

U slučaju da $\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ iznova predstavlja neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada se to pravilo ponovo primjenjuje itd.

* U točki a, $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ mogu biti i nedefinirane.

Primjer:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}=1.$$

b) *Neodređeni oblik* $0\cdot\infty$. Ako je $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ [pod istim uvjetima kao i u slučaju *a*)] i $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (»neodređeni oblik $0\cdot\infty$«), tada za dobivanje limesa $\lim_{x\to a}f(x)$ funkciju pretvaramo u oblik $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ ili $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, što dovodi do slučaja $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer:

$$\lim_{x\to \pi/2}(\pi-2x)\operatorname{tg}x=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\pi-2x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{-2}{\frac{1}{\sin^2 x}}=2.$$

c) *Neodređeni oblik* $\infty-\infty$. Ako je $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ i $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (»neodređeni oblik $\infty-\infty$«), tada za dobivanje limesa $\lim_{x\to a}f(x)$ razliku $\varphi(x)-\psi(x)$ pretvaramo algebarski u oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. To je moguće provesti na različite načine $\left[\text{na primjer } \varphi-\psi=\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\varphi}\right):\frac{1}{\varphi\psi}\right]$.

Primjer: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Nakon dvostruke primjene L'Hospitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

d) *Neodređeni oblik* 0^0, ∞^0, 1^∞. Ako je $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ i $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \psi(x) = 0$, najprije potražimo limes A izraza $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$, koji ima oblik $0 \cdot \infty$ (slučaj *b*), a zatim ga potenciramo, tj. izračunamo e^A.

Primjer: $\lim_{x\to 0} x^x = X$; $\ln x^x = x \ln x$; $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 0} (-x) = 0$, $\ln X = 0$, $X = 1$. Izlazi $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.

U slučajevima ∞^0 i 1^∞ postupamo analogno.

3) Osim L'Hospitalovog pravila, za rješavanje neodređenih oblika primjenjujemo razvoj funkcije u Taylorov red. Na primjer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots\right) = \frac{1}{6}.$$

5. NEIZMJERNO MALE VELIČINE

Definicije. Funkciju α varijable x nazivamo *neizmjerno malom* ili infinitezimalnom veličinom za $x \to a$, ako ona ima za limes nulu ($\lim_{x\to a} \alpha = 0$). Ako je $\alpha = c$ (konstanta) i $\lim_{x\to a} \alpha = 0$, tada je $c = 0$*, tj. *među konstantama je neizmjerno mala veličina samo nula.*

Ako funkcija A varijable x ima za $x \to a$ neizmjerni limes (vidi str. 340), tada je nazivamo *neizmjerno velikom veličinom* za $x \to a$.

Osnovna svojstva. Ako su $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ neizmjerno male veličine i *a konačna* veličina (tj. nemaju za limes ni nulu ni neizmjerno), tada je: 1) zbroj i razlika $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ neizmjerno mala veličina (ako je broj sumanda ograničen); 2) produkt $\alpha \cdot \beta$ ili $\alpha \cdot a$ neizmjerno mala veličina; 3) kvocijent $\frac{\alpha}{a}$ je neizmjerno mala veličina (ako je $a \neq 0$); 4) kvocijent $\frac{\alpha}{\beta}$ može biti ili neizmjerno mala veličina ili konačna, ili neizmjerno velika veličina, ili veličina koja nema limesa.

Primjeri: 1) $\alpha = \sin x$, $\beta = 1 - \cos x$, $\gamma = x^2$. Za $x \to 0$ α, β i γ su neizmjerno male veličine: $\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$;

* Limes konstante je konstanta sama.

$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$; stoga je $\frac{\beta}{\alpha}$ neizmjerno mala, $\frac{\beta}{\gamma}$ konačna, $\frac{\alpha}{\gamma}$ neizmjerno velika veličina.

2) $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{(-1)^n}{n}$ (n je cio broj). Za $n \to \infty$ α i β su neizmjerno male veličine; limes $\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} (-1)^n$ ne postoji.

Red neizmjerno malih veličina. Dvije neizmjerno male veličine imaju *isti red* ako je njihov omjer konačna veličina; ako je pak $\frac{\alpha}{\beta}$ neizmjerno mala veličina, tada je α neizmjerno mala veličina *višeg reda* od β; ako je $\frac{\gamma}{\alpha}$ neizmjerno velika veličina, tada je $\frac{\alpha}{\gamma}$ neizmjerno mala i α ima viši red nego γ.

Primjer: Veličine $\beta = 1 - \cos x$ i $\gamma = x^2$ imaju isti red; β i γ imaju viši red nego $\alpha = \sin x$.

Neizmjerno mala veličina β naziva se *neizmjerno malom veličinom m-tog reda* s obzirom na drugu neizmjerno malu veličinu β, ako je red α jednak redu neizmjerno male veličine β^m.

Primjer: S obzirom na neizmjerno malu veličinu x (za $x \to 0$) $\sin x$ je reda 1, a $1 - \cos x$ reda 2.

Ekvivalentne su takve neizmjerno male veličine kod kojih je limes njihova omjera jednak 1.

Primjeri: neizmjerno male veličine x i $\sin x$ (za $x \to 0$) su ekvivalentne; neizmjerno male veličine x^2 i $1 - \cos x$ nisu ekvivalentne.

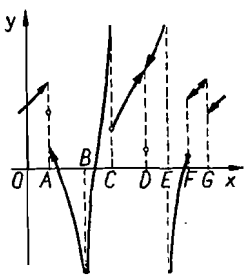
Kada tražimo limes omjera dviju neizmjerno malih veličina, svaku od njih možemo zamijeniti ekvivalentnom neizmjerno malom veličinom, a da time ne promijenimo limese.

6. NEPREKINUTOST I PREKINUTOST FUNKCIJA

Pojam neprekinutosti i prekinutosti. Većina funkcija koje proučavamo u matematičkoj analizi neprekinute su, tj. pri malim promjenama argumenta x funkcija y mijenja se također veoma malo, a graf takve funkcije je suvisla neprekinuta krivulja. Za neke vrijednosti x neprekinutost se može poremetiti, graf se prekida, a funkcija ima *prekinutost*; one vrijednosti argumenta kod kojih dolazi do prekinutosti funkcije nazivamo točkama prekinutosti. Na sl. 273 prikazan je graf funkcija koje su posvuda neprekinute,

osim u točkama prekinutosti A, B, C, D, E, F, G (slova se odnose na projekcije točaka)*.

Definicija. Funkciju $y = f(x)$ nazivamo *neprekinutom* za vrijednosti $x = a$ (u točki $x = a$) ako 1) broj a pripada području definicije funkcije i 2) limes $\lim_{x \to a} f(x)$ postoji i jednak je $f(a)$**.



Sl. 273

Ako je funkcija zadana i neprekinuta za sve vrijednosti x u intervalu od a do b, tada je nazivamo *neprekinutom* u tom *intervalu* (otvorenom, zatvorenom ili poluotvorenom, vidi na str. 332). Funkciju koja je definirana i neprekinuta za sve točke brojevnog pravca nazivamo *posvuda neprekinutom.*

Za one vrijednosti a koje se nalaze unutar ili na granici područja definicije funkcije i u kojima ona nije definirana, ili se vrijednost $f(a)$ ne poklapa s vrijednošću limesa $\lim_{x \to a} f(x)$ ili $\lim_{x \to a} f(x)$ ne postoji, funkcija ima *prekinutost* (»*točke prekinutosti*«)***.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u svim točkama nekog intervala izuzev konačnog broja točaka u kojima $f(x)$ ima konačne prekinutosti (vidi dalje), tada takvu funkciju nazivamo *po odsječcima neprekinutom*; njen graf se sastoji od nekoliko odsječaka krivulja.

Tipovi prekinutosti funkcija koje često susrećemo.

1) *Neizmjerna prekinutost* (»funkcija postaje neizmjerna«) slučaj je koji najčešće susrećemo (točke B, C, E na sl. 273).

Primjeri:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty^{****}$$

(graf vidi na str. 130) (prekinutost tipa točke E na sl. 273);

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}; \qquad f(1-0) = +\infty, \qquad f(1+0) = +\infty$$

(prekinutost tipa točke B na sl. 273);

* Strelice na grafu dogovorno označuju da točka koja se nalazi na vrhu strelice ne pripada grafu; kružićem označena točka je ona koja grafu pripada.

** Drugi uvjet može biti zamijenjen ovim ekvivalentnim uvjetom; za neizmjerno mali α razlika $\beta = f(a+\alpha) - f(a)$ je neizmjerno malena (neizmjerno malom prirastu argumenta odgovara neizmjerno malen prirast funkcije).

*** Ako je funkcija definirana samo s jedne strane zadanog argumenta $x = a$ (na primjer $+\sqrt{x}$ za $x = 0$, $\arccos x$ za $x = 1$), tada ne govorimo o prekinutosti, već o prestanku funkcije.

**** O simboličkom označavanju $f(a-0)$, $f(a+0)$, vidi str. 340.

$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = \infty$ (prekinutost tipa točke C na sl. 273, s tom razlikom, da $f(x)$ u točki 1 nije definirana).

2) *Konačna prekinutost:* pri prelazu varijable x preko vrijednosti a funkcija »preskače« od jedne konačne vrijednosti k drugoj (točke A, F, G na sl. 273). Sama vrijednost $f(x)$ za $x = a$ može da i ne bude definirana (točka G), može se poklapati s vrijednošću $f(a-0)$ ili $f(a+0)$ (točka F) i može biti različita kako od $f(a-0)$, tako i od $f(a+0)$ (točka A).

Primjeri: $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$

(graf vidi na sl. 272) $f(x) = E(x)$ (vidi na sl. 265 na str. 336), $f(a-0) = a-1$, $f(a+0) = a$; $f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ (vidi sl. 267), $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

3) *Uklonjiva prekinutost:* $\lim_{x \to a} f(x)$ postoji: $f(a-0) = f(a+0)$, no za $x = a$ funkcija ili nije definirana ili ima vrijednost $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$ (točka D na sl. 273). Taj slučaj prekinutosti nazivamo uklonjivim, jer pridavajući $f(a)$ vrijednost $\lim_{x \to a} f(x)$ (»dodajemo grafu jednu točku«*) napravili smo funkciju neprekinutom. Različiti slučajevi »neodređenih oblika« koje pronalazimo L'Hospitalovim pravilom i drugim načinima (str. 342 do 344 koji daju kao rezultat konačni limes, predstavljaju primjere uklonjive neprekinutosti.

Primjer: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ za $x = 0$ daje neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$,

$\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$; funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{za } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{za } x = 0 \end{cases}$ postala je neprekinuta.

Neprekinutost i točke prekinutosti elementarnih funkcija

Sve elementarne funkcije su neprekinute u njihovom području definicije; točke prekinutosti tih funkcija ne pripadaju području definicije. O istraživanju i konstrukciji grafa elementarne funkcije

* Ili prenoseći »istrgnutu« točku (D) na graf.

vidi na str. 304; grafove jednostavnijih funkcija vidi na str. 114 do 131. Ovdje dajemo samo opće podatke o prekinutosti elementarnih funkcija.

Cijele funkcije (polinomi) posvuda su neprekinute (na cijelom brojevnom pravcu).

Razlomljene funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ [$P(x)$ i $Q(x)$ polinomi] posvuda su neprekinute, osim za one vrijednosti a kod kojih je $Q(x) = 0$, ali $P(x) \neq 0$; za vrijednosti $x = a$ funkcija ima neizmjernu prekinutost. Ako je a korijen nazivnika i brojnika, tada funkcija ima neizmjernu prekinutost samo u onom slučaju kada je višestrukost korijena nazivnika veća od višestrukosti korijena brojnika; u protivnom slučaju prekinutost je uklonljiva.

Iracionalne funkcije. Radikali (s cijelim eksponentom korijena) cijelih funkcija neprekinute su funkcije za sve vrijednosti x koje pripadaju području definicije; na granicama tih područja one mogu prestati konačnom vrijednošću (korijen sa parnim eksponentom, aritmetički razmatran, na granici između pozitivnih i negativnih vrijednosti radikanda). Radikali iz razlomljenih funkcija su prekinuti za one vrijednosti x za koje funkcija pod korijenom ima prekinutost.

Trigonometrijske funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su posvuda neprekinute; $\operatorname{tg} x$ i $\sec x$ imaju beskonačnu prekinutost za $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} x$ i $\operatorname{csc} x$ imaju beskonačnu prekinutost za $x = n\pi$ (n cio broj).

Ciklometrijske funkcije. $\operatorname{arc\,tg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ su posvuda neprekinute, $\arcsin x$ i $\arccos x$ prestaju na granicama intervala njihova područja ($-1 \leqslant x \leqslant +1$).

Eksponencijalna funkcija e^x ili a^x ($a > 0$) posvuda je neprekinuta.

Logaritamska funkcija $\log x$ (za svaku pozitivnu bazu) neprekinuta je za sve pozitivne vrijednosti x i prestaje za $x = 0$ ($\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$, desni limes).

U slučaju složene elementarne funkcije istražujemo prekinutosti za one vrijednosti argumenata kod kojih imaju prekinutost jednostavne funkcije, koje ulaze u sastav složenih funkcija (u skladu s gore nabrojanim slučajevima).

Primjer: Treba odrediti prekinutosti funkcije $y = \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$.

Eksponent $\frac{1}{x-2}$ ima neizmjernu prekinutost za $x = 2$; $e^{\frac{1}{x-2}}$ ima za $x = 2$ neizmjernu prekinutost

$$\left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2-0} = 0, \qquad \left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2+0} = \infty.$$

Nazivnik izraza y za $x = 2$ je konačan: prema tome za $x = 2$ funkcija ima neizmjernu prekinutost, onakvu kao u točki C na sl. 273.

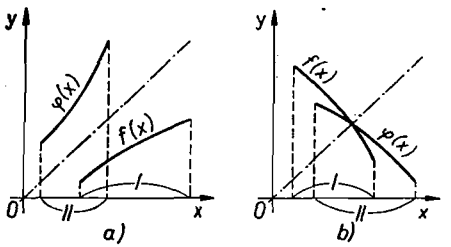
Nazivnik postaje nula za $x = 0$ i za one vrijednosti x za koje postaje nula $\sin \sqrt[3]{1-x}$; ove posljednje vrijednosti se podudaraju s korijenima jednadžbe $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$ ili $x = 1 - n^3\pi^3$, gdje je n po volji uzet cio broj. Niti za jednu od tih vrijednosti nije brojnik jednak nuli, pa funkcija ima za vrijednosti $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3$, ... neizmjerne prekinutosti kao u točki E na sl. 273.

Svojstva neprekinutih funkcija

1) *Prolaženje kroz nulu* (Cauchyjev teorem). Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ima na krajevima intervala vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ s različitim predznacima, tada između a i b postoji (najmanje jedna) takva vrijednost c, za koju je $f(x)$ jednaka nuli:

$$f(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

(Geometrijski smisao: neprekinuta krivulja, koja prelazi s jedne strane osi x na drugu, siječe tu os.)



Sl. 274

2) *Teorem o međuvrijednostima.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u nekom suvislom području i ako u dvije točke a i b ($a < b$) tog područja prima nejednake vrijednosti A i B:

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B, \qquad (A \neq B),$$

onda za bilo kakav broj C između A i B postoji bar jedna točka c između a i b takva da je:

$$f(c) = C \quad (a < c < b;\ A < C < B \text{ ili } A > C > B),$$

(»funkcija $f(x)$ prolazi kroz sve međuvrijednosti između A i B«).

3) *Postojanje inverzne funkcije*.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana u nekom suvislom području I i ako je u tom području I neprekinuta i striktno raste (ili striktno pada) (str. 337), tada za nju postoji jednoznačna neprekinuta i striktno uzlazna (ili striktno silazna) inverzna funkcija $\varphi(x)$, definirana u području II vrijednosti koje prima funkcija $f(x)$ (sl. 274 *a* i *b*).

* Vidi na str. 334.

4) *Teorem o ograđenosti funkcije.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada je ona u tom intervalu ograđena i postoje dva takva broja m i M da je:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{za} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

5) *Postojanje najveće i najmanje vrijednosti.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada u tom intervalu postoji najmanje jedna točka c, takva da je vrijednost $f(c)$ najveća između svih vrijednosti $f(x)$ i najmanje jedna točka d takva da je vrijednost $f(d)$ najmanja između svih vrijednosti $f(x)$:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{i} \quad f(d) \leqslant f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Razliku između najveće i najmanje vrijednosti neprekinute funkcije nazivamo *oscilacijom* te funkcije u zadanom intervalu*.

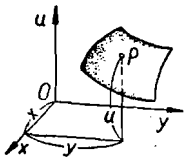
6) Funkcija koja je neprekinuta u zatvorenom intervalu, u tom je intervalu i jednoliko *neprekinuta* (vidi dalje).

Jednolika neprekinutost. Funkciju $y = f(x)$ nazivamo jednoliko *neprekinutom* u određenom području definicije, ako za svaki pozitivni broj ε možemo naći takav broj η, da za po volji uzete dvije točke x_1, x_2 koje pripadaju području definicije funkcije i koje su međusobno udaljene za manje od η, razlika pripadnih vrijednosti funkcija $f(x_1)$ i $f(x_2)$ bude po apsolutnoj vrijednosti manja od ε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{pri} \quad |x_2 - x_1| < \eta.$$

Jednolika neprekinutost označuje da je u svim dijelovima područja definicije funkcije dovoljan jedan te isti stupanj blizine dviju vrijednosti argumenta, da bi se dobio zadani stupanj blizine, koji odgovara vrijednostima funkcije.

Nije uvijek funkcija koja je neprekinuta u zadanom području u tom području i jednoliko neprekinuta.



Sl. 275

7. FUNKCIJE OD VIŠE VARIJABLI

Definicija. Varijablu u nazivamo *funkcijom n varijabli* $x, y, z, \ldots, t$ (*argumenata*), ako za zadane vrijednosti tih varijabli veličina u poprima jednu određenu vrijednost (*jednoznačna funkcija*) ili nekoliko određenih vrijednosti (*višeznačna funkcija*). Oznake:

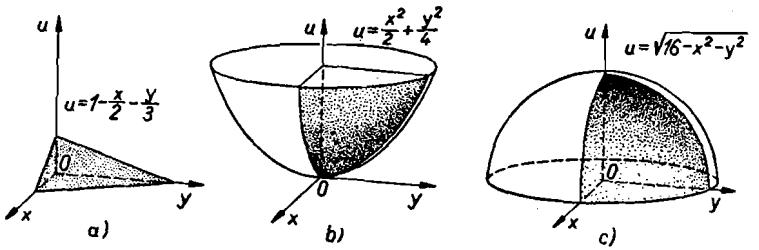
* Pojam oscilacije funkcije može biti proširen i na funkcije koje nemaju najveće i najmanje vrijednosti.

funkcija dviju varijabli: $u = f(x, y)$, funkcija triju varijabli: $u = F(x, y, z)$, funkcija n varijabli: $u = \varphi(x, y, z, \ldots, t)$. Skup od n brojeva, koji predstavljaju pripadne vrijednosti svake varijable, nazivamo *sistemom vrijednosti argumenata**.

Primjeri: Funkcija dviju varijabli: $u = f(x, y) = xy^2$; za sistem vrijednosti $x = 2$, $y = 3$ funkcija poprima vrijednost $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Funkcija četiriju varijabli $u = \varphi(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$; za sistem vrijednosti $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$ poprima vrijednost $\varphi(3, 4, 3, 1) = 3 \cdot \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$.

Geometrijsko prikazivanje

Prikazivanje sistema vrijednosti argumenata. Sistem vrijednosti dviju varijabli x, y može biti prikazan točkom P u ravnini s Descartesovim koordinatama x i y (vidi str. 250); sistem vrijednosti triju varijabli x, y, z točkom P u prostoru s Descartesovim koordinatama x, y, z. Za sistem od četiri i više varijabli takovo prikazivanje nije moguće; ipak je po analogiji uobičajeno nazivati sistem vrijednosti n varijabli $x, y, z, \ldots, t$ *točkom n-dimenzionalnog prostora s koordinatama* $x, y, z, \ldots, t$. U pređašnjem primjeru je sistem brojeva (3, 4, 3, 1) točka 4-dimenzionalnog prostora s koordinatama $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$. Prema tome nazivamo funkciju od više varijabli *funkcijom točke* (vidi str. 639).



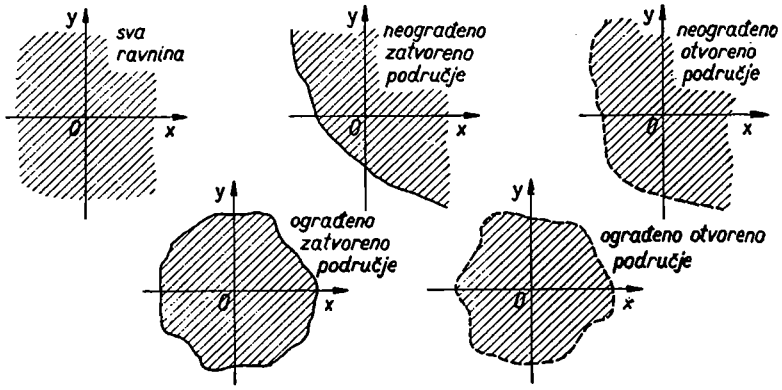
Sl. 276

Prikazivanje funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$. Analogno grafu funkcije jedne varijable prikazujemo funkciju dviju varijabli, *plohom* koja ima jednadžbu $u - f(x, y) = 0$ (sl. 275) (vidi str. 275). Na primjer, funkcija $u = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ (sl. 276, *a*) prikazuje se ravninom (vidi str. 276), funkcija $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ (sl. 276, *b*) eliptičkim

* Ili točka n-dimenzionalnog prostora, vidi niže.

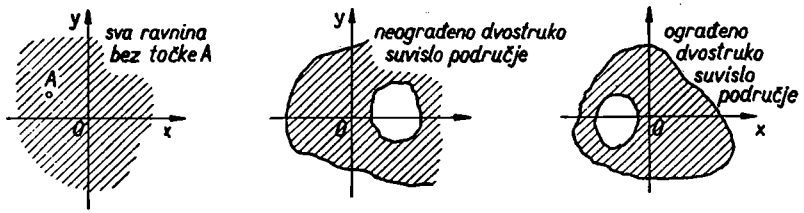
paraboloidom (vidi str. 286), funkcija $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ (sl. 276, *c*) polukuglom itd.*

Područje u kojem je funkcija zadana jest niz sistema vrijednosti koje u okviru razmatranog pitanja argumenti mogu primiti. Ta područja mogu biti različita; često srećemo funkcije sa suvislim područjima definicije.



Sl. 277

Suvisla područja dviju varijabli. Područja prikazana na sl. 277 nazivamo *jednostruko suvislim*** (u jednostruko suvisla područja spada i cijela ravnina). Ako unutar razmatranog dijela ravnine



Sl. 278

ima jedna točka, ili jedno jednostruko suvislo područje, koje ne spada u područje definicije funkcije, tada je takav dio ravnine

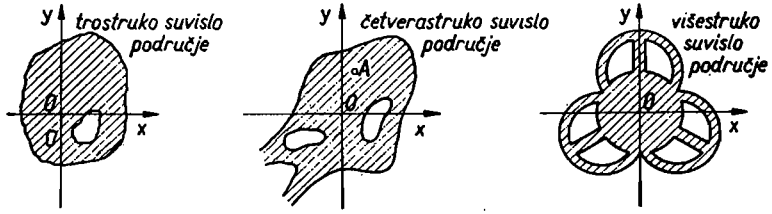
* Funkcije sa tri i više varijabli ne mogu se analogno geometrijski prikazati. No u analogiji s plohom u trodimenzionalnom prostoru uveden je sličan pojam hiperplohe i za *n*-dimenzionalni prostor.

** Na sl. 277 prikazani su jednostavni slučajevi suvislih područja dviju varijabli i označena njihova imena (područja su crtkana; ako granica područja ulazi u područje definicije, tada je ona prikazana izvučenom crtom, ako ne ulazi, onda točkastom).

dvostruko suvislo područje. Primjeri dvostruko suvislih područja prikazani su na sl. 278. Analogno, na sl. 279 prikazana su *višestruko suvisla područja.*

Područje na sl. 280 nije suvislo.

Suvisla područja triju varijabli (jednostavniji slučajevi): Čitav prostor, ili njegov dio, ograđen je s jednom ili nekoliko površina; točke tih površina mogu ili ulaziti ili ne ulaziti u područje definicije; nazivi tih područja analogni su onima navedenim na sl. 277 do 279 za funkcije sa dvije varijable. *Za funkcije koje imaju više varijabli* možemo uvesti analogne geometrijske oblike u višedimenzionalnom prostoru.



Sl. 279

Načini zadavanja funkcija

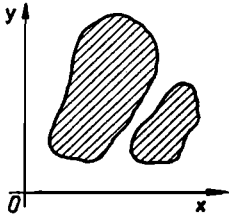
Zadavanje tablicama. Funkcija sa dvije varijable može biti zadana (definirana) tablicom vrijednosti (primjer takvih tablica vidi na str. 94 i 95 — tablice vrijednosti eliptičkih integrala). U toj tablici su vrijednosti argumenata raspoređene na lijevom i gornjem rubu, a vrijednost funkcije se nalazi na presjecištu dotičnog stupca i reda. Tablice takvog oblika nazivamo *tablicama sa dva ulaza.*

Zadavanje formulama. Funkcija od nekoliko varijabli može biti zadana pomoću jedne ili nekoliko formula. *Primjeri:*

1) $u = xy^2$; 2) $u = x \ln (y - zt)$;

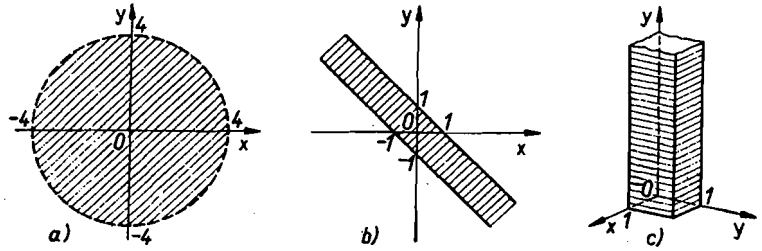
3) $$u = \begin{cases} x + y & \text{za } x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \\ x - y & \text{za } x \geqslant 0, \quad y < 0, \\ -x + y & \text{za } x < 0, \quad y \geqslant 0, \\ -x - y & \text{za } x < 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

(Ova se funkcija može napisati i u obliku $u = |x| + |y|$.)



Sl. 280

Područje u kojem je analitički izraz definiran (*područje postojanja funkcije*). U matematičkoj analizi u prvom se redu razmatraju funkcije koje su određene jednom formulom. Pri tome su u područje definicije takve funkcije uključeni svi oni sistemi vrijednosti argumenata, kod kojih zadani analitički izraz ima smisao, tj. poprima određene konačne realne vrijednosti. Takvo područje nazivamo *područjem u kojem je analitički izraz definiran.* Obično, ako nema dodatnih ograda, pod područjem definicije (*postojanja*) funkcije, koja je određena jednom formulom, razumijevamo upravo područje u kojemu je analitički izraz definiran.



Sl. 281

Primjeri: 1) $u = x^2 + y^2$; područje definicije su sve vrijednosti x i y (cijela ravnina). 2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; područje definicije su sistemi vrijednosti x i y, koji zadovoljavaju nejednadžbu $x^2 + y^2 < 16$ (otvoreno područje unutrašnjosti kruga, sl. 281, *a*). 3) $u = \arcsin(x + y)$; područje definicije su sistemi vrijednosti x i y, koji zadovoljavaju nejednadžbu $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$ (zatvoreno područje, traka između paralelnih pravaca, sl. 281, *b*).

4) $u = \arcsin(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln z$; područje definicije su sistemi vrijednosti koji zadovoljavaju nejednadžbe $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $z > 0$ (sve točke prostora, koje se nalaze nad kvadratom sa stranicom 1, sl. 281, *c*).

Osnovni oblici analitičkog zadavanja funkcija. Funkcije od nekoliko varijabli zadane su *eksplicitno*, ako su izražene pomoću argumenata: $u = f(x, y, z, \ldots, t)$; *implicitno*, kada su argumenti i funkcija vezani jednadžbom $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$; *parametarski*, kada je n argumenata i funkcija izraženo eksplicitno sa n novih varijabli (parametara): $x = \varphi(r, s)$, $y = \psi(r, s)$, $u = \chi(r, s)$ (funkcija sa dvije varijable); $x = \varphi(r, s, t)$, $y = \psi(r, s, t)$, $z = \chi(r, s, t)$, $u = \chi(r, s, t)$ (funkcija sa tri varijable) itd.

Homogene funkcije više varijabli su funkcije $f(x, y, z, \ldots t)$ koje zadovoljavaju uvjet:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots, \lambda t) = \lambda^n f(x, y, z, \ldots, t)$$ (λ je po volji uzet broj);

broj n nazivamo *stupnjem homogenosti.* Na primjer:

$$u = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}}\ (n = 2); \quad u = \frac{x + z}{2x - 3y}\ (n = 0).$$

Za homogenu funkciju $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ vrijedi *Eulerova formula*:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + t\frac{\partial f}{\partial t} = n \cdot f(x, y, z, \ldots, t).$$

Zavisnost funkcija sa više varijabli. Dvije jednoznačne funkcije sa dvije nepoznanice $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$, koje su zadane u nekom području, nazivamo *zavisnim* ako je jednu od njih moguće izraziti kao funkciju druge: $u = F(v)$; tj. za svaku točku područja definicije vrijedi identitet:

$$f(x, y) = F[\varphi(x, y)] \quad \text{ili} \quad \Phi(f, \varphi) = 0;$$

i *nezavisnim*, ako takva funkcija F ili Φ ne postoji. Na primjer, dvije funkcije $u = (x^2 + y^2)^2$ i $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, definirane u području $x^2 + y^2 \geqslant 0$, zavisne su, jer je $u = v^4$.

Analogno: m funkcija $u_1, u_2, \ldots, u_m$ od n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koje su definirane u nekom općem području, nazivamo *zavisnim*, ako jednu od njih (bilo koju) možemo izraziti kao funkciju ostalih, tj. da za svaku točku područja vrijedi identitet:

$$u_l = F(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}, u_{l+1}, \ldots, u_m) \quad \text{ili} \quad \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0,$$

i *nezavisnim*, ako takva funkcija F ili Φ ne postoji. Na primjer, tri funkcije od n varijabli:

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad v = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$
$$w = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

definirane u n-dimenzionalnom prostoru zavisne su, jer je $v = u^2 - 2w$.

Analitički kriterij nezavisnosti dviju funkcija $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$: njihova *Jacobijeva* determinanta, tj. determinanta:

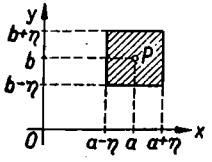
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix},$$ koju pišemo i ovako: $\dfrac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ ili $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$,

ne smije u razmatranom području biti identički jednaka nuli. Taj se kriterij poopćava na slučaj sa n funkcija od istog broja n varijabli $u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

U slučaju kada je broj m funkcija $u_1, u_2, \ldots, u_m$ manji od broja varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ te su funkcije nezavisne, ako je samo jedna determinanta m-tog reda u matrici

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



Sl. 282

različita od nule. Broj nezavisnih funkcija jednak je rangu μ spomenute matrice*. Pri tome su nezavisne one funkcije kojih derivacije služe kao elementi neke determinante μ-tog reda, koja nije identički jednaka nuli.

Ako je $m > n$, tada ne može više od n funkcija od zadanih m biti nezavisno.

Limes funkcije od nekoliko varijabli.** Funkcija dviju varijabli $u = f(x, y)$ ima *limes* A za sistem vrijednosti $x = a$, $y = b$ [oznaka: $A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$], ako se kod približavanja x prema a i y prema b na bilo koji način $f(x, y)$ približava k broju A. U točki $P(a, b)$ (tj. za sistem vrijednosti $x = a$, $y = b$) funkcija može i da ne poprimi vrijednosti A i općenito može biti nedefinirana.

Točna formulacija: $A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ ako, zadavši po volji malen pozitivni broj ε, možemo naći takav pozitivni broj η da će

* O rangu matrice vidi str. 194.

** Ovdje se razmatraju funkcije koje su definirane u suvislom području (vidi str. 352 i 353).

se za po volji uzete vrijednosti x i y, međusobno nezavisne, iz intervala $a - \eta < x < a + \eta$ i $b - \eta < y < b + \eta$ (sl. 282) pripadne vrijednosti $f(x, y)$ nalaziti u intervalu

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon.$$

Pojam limesa funkcije većeg broja varijabli $f(x, y, z, \ldots, t)$ uvodimo analogno.

Kriteriji postojanja limesa koji su razmotreni za funkcije s jednom varijablom (svođenje na limes niza, Cauchyjev kriterij, vidi str. 339) analogno se protežu i na funkcije s više varijabli.

Višestruki limesi. Ako za funkciju sa dvije varijable $f(x, y)$ nađemo najprije limes $\lim_{x \to a} f(x, y)$ (uzimamo da je y konstantan) i od dobivenog izraza, koji je funkcija od y, nađemo limes za $y \to b$, tada nađeni broj $B = \lim_{y \to b} [\lim_{x \to a} f(x, y)]$ nazivamo *višestrukim limesom*. Ako promijenimo poredaj graničnih prelaza, dobivamo drugi višestruki limes: $C = \lim_{x \to a} [\lim_{y \to b} f(x, y)]$.

Općenito je $B \neq C$ (također ako oba limesa postoje); na primjer za funkciju $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ za $x \to 0$, $y \to 0$ imamo $B = -1$, $C = +1$.

Ako funkcija $f(x, y)$ ima limes $A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$, tada je $B = C = A$. Ali jednakost višestrukih limesa $B = C$ ne povlači postojanje limesa A.

Neprekinute funkcije od nekoliko varijabli

Određivanje. Funkciju od dvije varijable $u = f(x, y)$ nazivamo *neprekinutom* za sistem vrijednosti $x = a$, $y = b$ [*u točki* $P(a, b)$], ako: 1) točka $P(a, b)$ pripada području definicije funkcije,

2) $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ postoji i jednak je $f(a, b)$; u protivnom slučaju funkcija ima za $x = a$, $y = b$ *prekinutost*. Ako je funkcija zadana i neprekinuta u svakoj točki koja pripada nekom suvislom području, tada se ona naziva *neprekinutom u tom području.*

Analogno se određuje neprekinutost za funkcije od nekoliko varijabli.

Jednolika neprekinutost funkcije od nekoliko varijabli u nekom suvislom području definira se isto tako kao za funkcije s jednom

varijablom (str. 350). Na primjer, funkcija sa dvije varijable $f(x, y)$ *jednoliko je neprekinuta* u zadanom suvislom području ako za svaki pozitivni broj ε možemo naći takav pozitivni broj η, da za bilo koje dvije točke $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, koje zadovoljavaju uvjete $|x_1 - x_2| < \eta$, $|y_1 - y_2| < \eta$, razlika pripadnih vrijednosti funkcije bude po apsolutnoj vrijednosti manja od ε:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Nije uvijek funkcija, koja je neprekinuta u zadanom području, u tom području i jednoliko neprekinuta.

Svojstva neprekinutih funkcija od nekoliko varijabli

1) *Prolaz kroz nulu* (Cauchyjev teorem). Ako je funkcija $f(x, y)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području, i u dvije točke tog područja $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ ima različite predznake, tada u tom području postoji najmanje jedna takva točka $P_3(x_3, y_3)$ u kojoj je funkcija $f(x, y)$ jednaka nuli:

$$f(x_3, y_3) = 0, \quad \text{ako je} \quad f(x_1, y_1) > 0 \quad \text{i} \quad f(x_2, y_2) < 0.$$

2) *Teorem o međuvrijednosti.* Ako je funkcija $f(x, y)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području, i u dvije točke tog područja $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2$ i $y_2)$ poprima nejednake vrijednosti A i B, $f(x_1, y_1) = A$, $f(x_2, y_2) = B$, tada u tom području postoji za po volji uzet broj C između A i B najmanje jedna točka $P_3(x_3, y_3)$ takva da je:

$$f(x_3, y_3) = C \quad (A < C < B \text{ ili } B < C < A).$$

3) *Teorem o ograđenosti funkcije.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u zatvorenom i ograđenom području, tada je ona ograđena u tom području: postoje dva takva broja m i M, da je za po volji uzetu točku $P(x, y)$ koja pripada tom području:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

4) *Postojanje najveće i najmanje vrijednosti.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u zatvorenom i ograđenom području, tada u tom području postoji najmanje jedna točka $P'(x', y')$, takva da je vrijednost $f(x', y')$ najveća od svih vrijednosti $f(x, y)$ koje funkcija poprima u tom području i najmanje jedna točka $P''(x'', y'')$ takva da je vrijednost $f(x'', y'')$ najmanja od svih vrijednosti $f(x, y)$ koje funkcija poprima u tom području;

$$f(x', y') \geqslant f(x, y) \geqslant f(x'', y'')$$

za po volji uzetu točku $P(x, y)$, koja pripada području.

5) Funkcija koja je neprekinuta u zatvorenom ograđenom području jednoliko je neprekinuta u tom području*.

* Vidi str. 357.

8. REDOVI BROJEVA

Definicije. Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

gdje brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, čine beskonačan niz (vidi str. 332), nazivamo *redom brojeva*; sume $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazivamo *djelomičnim* ili *parcijalnim* sumama reda, a član a_n *općim članom* reda. Ako niz parcijalnih suma $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ima limes (za $n \to \infty$) $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, tada red nazivamo *konvergentnim*, a broj S *sumom reda* (oznaka: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$); ako limesa nema, tada je red *divergentan*; u posljednjem slučaju veličina S_n može neograničeno rasti ($\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$), ili oscilirati. Nužni i dovoljni uvjet za konvergenciju reda svodi se na uvjet za postojanje limesa niza $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ (vidi str. 331).

Primjeri. Red:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \tag{1}$$

konvergira (geometrijska progresija).

Redovi:

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots, \tag{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ (\textit{harmonijski red})} \tag{3}$$

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{4}$$

divergiraju. Za redove (2) i (3) je $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, red (4) oscilira.

Ostatkom konvergentnog reda $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ nazivamo razliku između njegove sume S i parcijalne sume S_n; označujemo ga sa R_n:

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$$

Osnovni teoremi o konvergenciji redova

1) Odbacivanje konačnog broja početnih članova reda ili dodavanje nekoliko novih članova u početku reda ne utječe na ponašanje (konvergenciju ili divergenciju) reda.

2) Ako članove konvergentnog reda pomnožimo s istim faktorom c, tada nećemo poremetiti konvergenciju reda (njegova suma se isto tako množi sa c).

3) Konvergentne redove možemo član po član zbrajati i odbijati: konvergencija redova $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sa sumom S i $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ sa sumom Σ povlači da red $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ konvergira i da je njegova suma jednaka $S \pm \Sigma$.

Nuždan uvjet za konvergenciju reda: opći član reda mora za $n \to \infty$ težiti k nuli: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Taj uvjet *nije dovoljan*; na primjer u harmonijskom redu (3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ali $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Princip uspoređivanja redova s pozitivnim članovima. Ako dva reda:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

i

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (B)$$

imaju pozitivne članove i ako je, počevši od nekog n, $a_n \geqslant b_n$, tada iz konvergencije reda (A) izlazi konvergencija reda (B), a iz divergencije reda (B) izlazi divergencija reda (A).

Primjer. Red:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots \qquad (5)$$

konvergira, jer počevši sa $n = 2$ članovi reda (5) manji su od članova reda (1): $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$, a red (1) konvergira.

Red:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \qquad (6)$$

divergira, jer počevši sa $n > 1$ članovi reda (6) veći su od članova reda (3): $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, a red (3) divergira.

Uvjeti za konvergenciju redova s pozitivnim članovima

D'Alembertov kriterij. Ako su za red $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ svi kvocijenti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, počevši od nekog mjesta, manji od nekog broja $q < 1$, tada red konvergira; ako su ti kvocijenti, počevši od nekog mjesta, veći od nekog broja $Q > 1$, tada red divergira.

Posljedica. Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, tada red konvergira za $\rho < 1$, i divergira za $\rho > 1$. Za $\rho = 1$ kriterij ne daje odluke: red može konvergirati ili divergirati.

Primjeri: 1) za red $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ (7)

je $\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$; red (7) konvergira;

2) za red $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{n+1}{n^2} + \ldots$ (8)

je $\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2} \right) = 1$ i kriterij ne daje odluke.

Cauchyjev kriterij. Ako su za red $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ svi brojevi $\sqrt[n]{a_n}$, počevši od nekog mjesta, manji od nekog broja $q < 1$, tada red konvergira; ako su svi ti brojevi, počevši od nekog mjesta, veći od nekog broja $Q > 1$, tada red divergira.

Posljedica. Ako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, tada red konvergira za $\rho < 1$ i divergira za $\rho > 1$; za $\rho = 1$ kriterij ne daje odluke. Na primjer, za red:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \ldots \qquad (9)$$

je $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e} < 1$; red (9) konvergira.

Integralni kriterij (Cauchy). Red s općim članom $a_n = f(n)$ konvergira, ako je $f(x)$ monotono silazna funkcija i nepravi integral $\int_c^\infty f(x)\,dx$ (vidi str. 490) konvergira; red s općim članom $f(x)$ divergira, ako taj integral divergira. Pri tome donju granicu c uzimamo po volji, tako da funkcija $f(x)$ za $c < x < \infty$ bude definirana i da nema prekinutost. Na primjer, za red (8) je:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \qquad \int_c^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_c^\infty = \infty;$$

integral divergira, a divergira i red (8).

Apsolutna i uvjetna konvergencija. Zajedno s redom:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{A}$$

kojemu članovi imaju različite predznake (npr. alternirani red), podesno je razmatrati red:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{B}$$

koji je tvoren od apsolutnih vrijednosti članova reda (A). Ako red (B) konvergira, tada i red (A) konvergira; u tom slučaju se red (A) naziva *apsolutno konvergentnim*. Ako pak red (B) divergira, tada red (A) može divergirati, ali može i konvergirati; u posljednjem slučaju se on naziva *uvjetno konvergentnim*. Na primjer red:

$$\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \ldots, \tag{10}$$

gdje je α po volji uzet konstantan broj, konvergira apsolutno, jer red s općim članom $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$ konvergira [to je vidljivo iz odnosa njega i reda (1): $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$].

$$\text{Red:} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{11}$$

konvergira (vidi str. 363, Leibnizov kriterij), ali uvjetno, jer red (3) s općim članom $|a_n| = \frac{1}{n}$ divergira.

Svojstva apsolutno konvergentnih redova

1) U apsolutno konvergentnom redu članove možemo premještati s njihovih mjesta na bilo koji način; suma reda neće se pri tome mijenjati. Izmijenivši poredak članova uvjetno konvergentnog reda (tako da premjestimo neizmjerno mnogo članova reda) možemo promijeniti njegovu sumu, načiniti je da bude po volji određen broj (*Riemannov teorem*), a također možemo red načiniti divergentnim.

2) Apsolutno konvergentni redovi mogu se ne samo zbrajati i odbijati član po član (vidi str. 360), već i množiti, kao obični polinomi, pišući rezultat na primjer u obliku:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= \underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_2b_1 + a_1b_2} + \underbrace{a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n} + \ldots$$

Ako je $\Sigma a_n = S_a$ i $\Sigma b_n = S_b$, tada je suma reda koju dobivamo kao rezultat množenja jednaka S_aS_b*.

Alternirani redovi. Za konvergenciju reda

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n \mp \ldots,$$

gdje je a_n pozitivan broj, dovoljno je da se zadovolje dva uvjeta:

$$1) \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad 2) \; a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

(*Leibnizov kriterij*). Na primjer, red (11) konvergira.

Ocjena ostatka alterniranog reda. Ako se kod konvergentnog alternatiranog reda ograničimo na prvih n članova, ostatak $R_n = S - S_n$ ima predznak prvog odbačenog člana i manji je od njega po apsolutnoj vrijednosti: $|S - S_n| < a_{n+1}$. Tako je za red:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots,$$

koji ima sumu ln 2, ostatak $|\ln 2 - S_n| < \frac{1}{n+1}$.

Tablica suma nekih redova brojeva

$$1)\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e,$$

$$2)\; 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \mp \ldots = \frac{1}{e},$$

$$3)\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots = \ln 2,$$

$$4)\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2,$$

$$5)\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots \pm \frac{1}{2^n} \mp \ldots = \frac{2}{3},$$

$$6)\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$7)\; \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1,$$

* Ako dva reda $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ i $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ konvergiraju, i jedan od njih konvergira apsolutno, tada red koji dobivamo kao rezultat njihovog umnoška, konvergira, ali ne uvijek apsolutno.

8) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}$,

9) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\ldots=\frac{3}{4}$,

10) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots=$
$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$,

11) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}$,

12) $\frac{1}{1\cdot 2\ldots l}+\frac{1}{2\cdot 3\ldots(l+1)}+\ldots+\frac{1}{n\ldots(n+l-1)}+\ldots=$
$=\frac{1}{(l-1)(l-1)!}$,

13) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$,

14) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\pm\frac{1}{n^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{12}$,

15) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$,

16) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$,

17) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots\pm\frac{1}{n^4}\mp\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$,

18) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$,

Bernoullijevi brojevi B_k:

19) $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots+\frac{1}{n^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}\,2^{2k-1}}{(2k)!}B_k$,

20) $1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots\pm\frac{1}{n^{2k}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k$,

21) $1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^{2k}}+\ldots=$
$=\frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k$.

Tablica prvih Bernoullijevih brojeva

k	B^k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43867}{798}$		

Eulerovi brojevi E_k:

22) $1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}\mp\ldots=$
$=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k$.

Tablica prvih Eulerovih brojeva

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50521
2	5	6	2702765
3	61	7	199360981
4	1385		

Neki autori upotrebljavaju druge oznake za Bernoullijeve i Eulerove brojeve:

$B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$, $B_6=\frac{1}{42}$,

$B_7=0$, $B_8=-\frac{1}{30}$ itd.

$E_1=0$, $E_2=-1$, $E_3=0$, $E_4=5$, $E_5=0$, $E_6=-61$,

$E_7=0$, $E_8=1385$ itd.

9. REDOVI FUNKCIJA

Definicije. Red sastavljen od funkcija jedne te iste varijable x:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (1)$$

zove se *red funkcija*. Sve one vrijednosti $x = a$ koje ulaze u područje definicije svih funkcija $f_n(x)$ i za koje red brojeva

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

konvergira [tj. za koje postoji limes parcijalnih suma $S_n(a)$: $\lim_{n\to\infty} S_n(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f_r(a) = S(a)$], tvore *područje konvergencije* reda funkcija (1). Funkciju $S(x)$ nazivamo sumom reda (1) [red (1) »konvergira k funkciji $S(x)$«]. Sumu prvih n članova reda (1) nazivamo *parcijalnom sumom*: $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. Razlika između sume $S(x)$ konvergentnog reda funkcija i njegove parcijalne sume $S_n(x)$ naziva se *ostatkom reda* (1); on se označava sa $R_n(x)$:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+m}(x) + \ldots$$

Jednolika i nejednolika konvergencija reda. Prema definiciji limesa niza brojeva (str. 329) red (1) *konvergira* u zadanom području, ako za po volji uzet mali broj $\varepsilon > 0$ možemo naći takav cijeli broj N, da je $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ za $n > N$. Pri tome za redove funkcija mogu nastupiti dva slučaja:

1) Možemo naći broj N, koji je zajednički za sve vrijednosti x koje ulaze u područje konvergencije reda; u tom slučaju red (1) nazivamo *jednoliko konvergentnim* u zadanom području. 2) Takvog zajedničkog broja za sve x koje leže u području konvergencije nema: ma kakav bio n, postoji u području konvergencije takav broj x, da je $|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$. U tom slučaju red (1) *konvergira* u zadanom području *nejednoliko*.

Primjeri. 1) Red:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (*)$$

konvergira za sve vrijednosti x; njegova je suma jednaka e^x (vidi str. 402). Ta je konvergencija jednolika za po volji uzeto konačno područje definicije varijable x. U stvari za $|x| < a$ imamo:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}\right| \overset{*}{<} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{a}; \quad \text{ali} \quad \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{a}$$

* Prema formuli za ostatak MacLaurinova reda, vidi str. 396.

za dovoljno velik n (koji ne zavisi od x) može biti načinjeno manje od ε, jer $(n+1)!$ raste brže od a^{n+1}. Za cijeli brojevni pravac taj red konvergira nejednoliko: za bilo kakav zadani n možemo naći takav x, da $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}\right|$ bude veće od po volji uzetog ε.

2) Red:

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots \qquad (**)$$

konvergira za sve vrijednosti x u zatvorenom intervalu $[0, 1]$, jer prema D'Alembertovom kriteriju (posljedica str. 361) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1 - x| < 1$ za $0 < x \leqslant 1$ (za $x = 0$ je $S = 0$). Ali ta je konvergencija nejednolika:

$$S(x) - S_n(x) = x[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \ldots] = (1-x)^{n+1};$$

i kakav god je n, postoji tako mali x, da je $(1-x)^{n+1}$ po volji blizu 1, tj. nije manji od ε. U području pak $a \leqslant x \leqslant 1$ (gdje je $0 < a < 1$) red konvergira jednoliko.

Kriterij (Weierstrassov) *za jednoliku konvergenciju redova.* Red:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

jednoliko konvergira u zadanom području, ako postoji takav konvergentni red brojeva:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \qquad (2)$$

da za sve vrijednosti x, koje leže u tom području, postoji nejednakost:

$$|f_n(x)| \leqslant c_n.$$

U tom slučaju red (2) nazivamo *majorantom* reda (1).

Primjer: Redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jednoliko konvergiraju u po volji uzetom području, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, jer je $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$ i $|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

Svojstva jednoliko konvergentnih redova:

1) Ako su $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ neprekinute funkcije u nekom području definicije i red $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ jednoliko konvergira u tom području, tada je njegova suma $S(x)$

također neprekinuta funkcija u tom području. Ako pak red konvergira nejednoliko u konačnom području, tada njegova suma $S(x)$ može biti i prekinuta u tom području [u primjeru (**) na str. 367 suma reda je prekinuta: $S(x)$ je jednaka nuli za $x=0$ i jednaka 1 za $x>0$; u primjeru (*) na str. 366 funkcija e^x je neprekinuta: red konvergira nejednoliko, ali ne u konačnom području, već na cijelom beskonačnom brojevnom pravcu].

2) Jednoliko konvergentni red možemo integrirati član po član u zadanom području, i suma integrala članova jednaka je integralu sume zadanog reda.

Redovi potencija su redovi funkcija oblika:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (A)$$

ili oblika:

$$a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots, \qquad (B)$$

gdje su a_i konstantni koeficijenti.

Osnovna svojstva redova potencija

1) Red (A) apsolutno konvergira za sve vrijednosti x koje su po apsolutnoj vrijednosti manje od nekog broja ρ ($|x|<\rho$), koji nazivamo *polumjerom konvergencije* reda potencije. Red (B) apsolutno konvergira za sve vrijednosti x koje zadovoljavaju nejednakost $|x-a|<\rho$ (ρ je polumjer konvergencije). Polumjer konvergencije može biti određen prema formulama:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \qquad \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,^{*}.$$

Na granicama područja konvergencije [za red (A) za $x=+\rho$ i $x=-\rho$; za red (B) za $x=a+\rho$ i $x=a-\rho$] red može konvergirati ili divergirati.

2) Ako red (A) konvergira za pozitivnu vrijednost $x=x_1$, tada on konvergira jednoliko unutar intervala $(-x_1+\varepsilon, x_1)$ (*Abelov teorem*).

Primjer: Za red

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj. $\rho=1$ i red konvergira apsolutno za $-1<x<+1$, pri čemu za $x=-1$ red konvergira uvjetno [vidi red (11) na str. 362], a za $x=1$ divergira [vidi red (3) na str. 359]. Prema Abelovom teoremu red konvergira jednoliko u području $[-x_1, +x_1]$, gdje je x_1 po volji uzet broj između 0 i 1.

* U slučajevima kada ti limesi ne postoje, u navedenim formulama umjesto lim uzimamo *limes superior* ($\overline{\lim}$).

Tablica prvih članova nekih potencija reda potencija

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots,$$
$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \ldots.$$

$$\sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = S^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{S} = S^{-1} = a^{-1}\left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{S^2} = S^{-2} = a^{-2}\left[1 - 2\frac{b}{a}x + \left(3\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(6\frac{bc}{a^2} - 2\frac{d}{a} - 4\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(6\frac{bd}{a^2} + 3\frac{c^2}{a^2} - 2\frac{e}{a} - 12\frac{b^2c}{a^3} + 5\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

Obrat reda potencije. Ako je zadan red:

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \ldots \quad (a \neq 0),$$

tada razvoj inverzne funkcije u red potencija:

$$x = \varphi(y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \ldots$$

ima ove koeficijente:

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5).$$

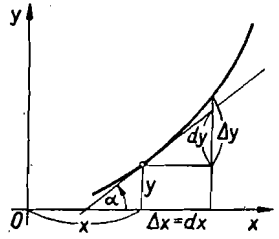
Razvoj funkcija u redove: *potencija* vidi na str. 395, u *trigonometrijske* redove vidi str. 739.

II. DIFERENCIJALNI RAČUN

1. OSNOVNI POJMOVI

Derivacija funkcije jedne varijable* $y = f(x)$ je nova funkcija varijable x $\left[\text{oznake: } y', \dot{y}, Dy, \frac{dy}{dx}, f'(x), Df(x), \frac{df(x)}{dx}\right]$; jednaka je za svaku vrijednost x limesu kvocijenta prirasta funkcije Δy i pripadnog prirasta argumenta Δx, kada Δx teži k nuli:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$



Sl. 283

Geometrijski smisao derivacije. Ako je funkcija $y = f(x)$ prikazana svojim grafom, tj. krivuljom u Descartesovim koordinatama (sl. 283), tada je $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, gdje je α kut između osi Ox i tangente na krivulju u zadanoj točki, mjeren od pozitivnog smjera osi Ox protivno vrtnji kazaljke na satu**.

Postojanje derivacije. Derivacija postoji za takve vrijednosti argumenta x za koje vrijedi: 1) funkcija $y = f(x)$ je definirana i neprekinuta i 2) navedeni odnos ima konačan limes (1). Nepostojanje derivacije za zadanu vrijednost x_1 ukazuje na to da u odnosnoj točki grafa funkcije ili ne postoji određena tangenta, ili ta tangenta zatvara s osi Ox kut od 90°. U posljednjem slučaju limes (1) je neizmjeran; ovo (ne sasvim strogo) označavamo: $f'(x_1) = \infty$ (»derivacija postaje neizmjerna«).

Primjeri nepostojanja derivacije u zadanoj točki:

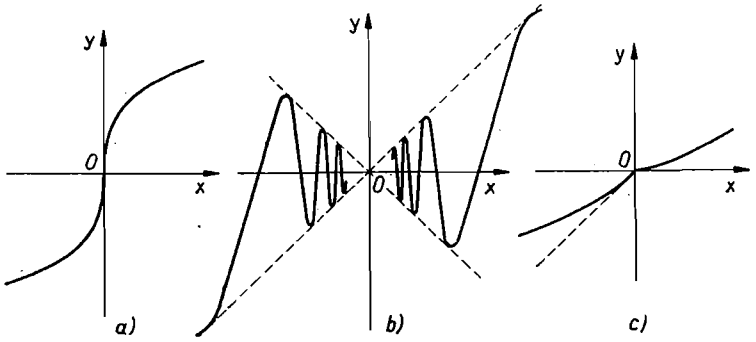
1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0) = \infty$, u točki 0 derivacija teži prema neizmjerno (sl. 284, *a*); 2) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, limesa (1) za

* U ovoj glavi se razmatraju samo jednoznačne funkcije.

** Formula $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ je točna samo u tom slučaju ako su na osima Ox i Oy jednaka mjerila.

$x = 0$ nema (sl. 284, *b*); 3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, limesa (1) za $x = 0$ nema, ali postoji lijevi limes $f'(-0) = 1$ i desni limes $f'(+0) = 0$; u tom slučaju krivulja ima točku loma (sl. 284, *c*).

Lijeva i desna derivacija. Ako za zadanu vrijednost $x = a$ limesa (1) nema, ali postoje lijevi i desni limes (kao u primjeru 3, sl. 284, *c*), tada njih nazivamo *lijevom i desnom derivacijom.* Geometrijski smisao takvih derivacija: $f'(a - 0) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $f'(a + 0) = \operatorname{tg} \alpha_2$ (sl. 285); krivulja ima točku loma.



Sl. 284

Elementarne funkcije imaju derivaciju u cijelom području postojanja, isključujući pojedine točke gdje mogu biti slučajevi koje smo pokazali (sl. 284, *a*, *b*, *c*).

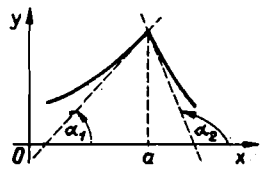
Parcijalna derivacija funkcije nekoliko varijabli $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ po jednoj od njih, na primjer po x $\left[\text{oznake } \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u'_x,\ \dfrac{\partial f}{\partial x},\ f'_x\right]$, određuje se jednadžbom:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x};$$

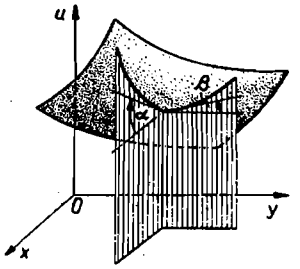
u tom slučaju prirast dobiva samo jedna od nezavisnih varijabli. Funkcija n varijabli ima n parcijalnih derivacija prvog reda: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Parcijalna derivacija se dobiva prema pravilima diferenciranja funkcije jedne varijable (vidi str. 376 do 380), pri čemu ostale varijable smatramo konstantama. Na primjer:

$$u = \frac{x^2 y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}.$$

Geometrijski smisao parcijalne derivacije funkcije dviju varijabli. Ako je funkcija $u = f(x, y)$ prikazana plohom u Descartesovim koordinatama, tada je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, gdje je α kut između pozitivnog smjera osi Ox i tangente na presjek površine u danoj točki, paralelan ravnini xOu (α se računa od osi Ox u protivnom smislu kazaljke na satu, ako se gleda s pozitivne strane osi Oy). Analogno, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ (β se računa u protivnom smislu od hoda kazaljke na satu; sl. 286; na toj slici su oba kuta, α i β, pozitivna).



Sl. 285



Sl. 286

Usmjerena derivacija i prostorna derivacija, vidi teoriju polja (str. 646 i 653).

Diferencijali varijabli x, y itd. [označuju se: dx, dy, itd.) određuju se različito, u zavisnosti od toga je li vrijednost nezavisna varijabla ili funkcija. *Diferencijal nezavisne varijable* x je njen prirast, kojemu možemo dodavati po volji određenu vrijednost ($dx = \Delta x$). *Diferencijal funkcije* $y = f(x)$ *jedne varijable* x za zadanu vrijednost x i zadani diferencijal argumenta dx jest produkt $f'(x)$ sa dx:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Geometrijski smisao diferencijala. Kod prikazivanja funkcije grafom u Descartesovim koordinatama dy se prikazuje prirastom koji dobiva ordinata tangente na krivulju u danoj točki x pri danom prirastu dx (vidi sl. 283 na str. 371).

Osnovna svojstva diferencijala. 1) *Invarijantnost:* jednadžba $dy = f'(x)\, dx$ ostaje valjana, bude li x nezavisna varijabla ili funkcija nove varijable t. 2) *Red veličine:* ako je dx neizmjerno mala veličina, tada su dy i Δy ekvivalentne neizmjerno male veličine $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1\right)$, a razlika između njih je neizmjerno mala veličina

višeg reda od dx, dy, Δy. Ovo svojstvo dopušta pri računanju da male priraste funkcija zamijenimo njihovim diferencijalima; to primjenjujemo kako kod aproksimativnog računanja (str. 154), tako i kod diferencijalnog i integralnog računa.

Parcijalni diferencijal funkcije više varijabli $u = f(x, y, z, \dots t)$ po jednoj od njih, npr. po x [označava se $d_x u$ ili $d_x f$], određuje se jednadžbom:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Derivabilna funkcija i totalni diferencijal. Funkciju od nekoliko varijabli $u = f(x, y, \dots, t)$ nazivamo *derivabilnom* u točki $M_0 (x_0, y_0, \dots, t_0)$, ako se pri prelazu u neizmjerno blizu točku $M(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt)$ (gdje su $dx, dy, \dots, dt$ neizmjerno male veličine) *totalni prirast* funkcije:

$$\Delta u = f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz, \dots, t_0 + dt) - f(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0)$$

razlikuje od sume parcijalnih diferencijala po svim varijablama:

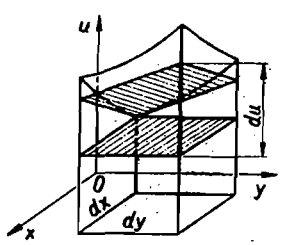
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)_{x_0, y_0, \dots, t_0} \qquad (*)$$

za neizmjerno malu veličinu koja je višeg reda od udaljenosti

$$M_0 M = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \dots + dt^2}.$$

Ako je u derivabilna funkcija, tada se suma (*) naziva njenim *potpunim ili totalnim diferencijalom* i označava sa du:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt^*. \qquad (**)$$



Sl. 287

Svaka neprekinuta funkcija nekoliko varijabli, koja ima neprekinute parcijalne derivacije, po svim je varijablama derivabilna. Ali samo postojanje parcijalnih derivacija funkcije po svim varijablama još ne povlači njenu derivabilnost.

* O totalnom diferencijalu u vektorskom obliku vidi u teoriji polja str. 647.

Geometrijski smisao totalnog diferencijala funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$, prikazane plohom u Descartesovim koordinatama (sl. 287): du je jednak prirastu aplikate tangencijalne ravnine u zadanoj točki, ako su x i y dobili priraste dx i dy.

Osnovno svojstvo totalnog diferencijala analogno je svojstvima diferencijala s jednom varijablom*: *invarijantnost* izraza (**) s obzirom na varijable u njemu.

Linearnost diferencijalnih izraza. Diferencijali varijabli, koje su povezane nekom funkcionalnom ovisnošću (*konačnom jednadžbom*), vezani su međusobno uvijek linearnom zavisnošću (*diferencijalnom jednadžbom* prvog stupnja). To se odnosi kako na diferencijale nezavisnih varijabli, tako i na diferencijale (parcijalne i totalne) funkcija s jednom ili nekoliko varijabli.

Dobivanje diferencijalne jednadžbe iz konačne jednadžbe nazivamo *diferenciranjem*. U užem smislu diferenciranjem se naziva dobivanje derivacije ili diferencijala.

Derivacije i diferencijali višeg reda. *Druga derivacija* funkcije s jednom varijablom $y = f(x)$ [oznaka: y'', $\ddot{y}$, $D^2 y$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$**, $f''(x)$, $D^2 f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$**] jest derivacija derivacije: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$. Derivacije bilo kojega reda [oznaka: y''', $\dddot{y}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$**, $f^{IV}(x)$, $D^n f(x)$, $\frac{d^5 f(x)}{dx^5}$**] definiramo analogno.

Parcijalnu derivaciju drugog reda funkcije $u = f(x, y, z, \dots, t)$ možemo uzeti po istoj varijabli kao i prvu $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right)$, ili po nekoj drugoj $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \dots\right)$; u posljednjem slučaju derivacija se naziva *mješovitom*. Iznos mješovite derivacije, koja je neprekinuta za zadane vrijednosti x i y, ne zavisi od reda varijabli po kojem računamo derivaciju $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)$. Parcijalne derivacije višeg reda definiramo analogno $\left[\text{oznaka: } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \dots\right]$.

* Vidi str. 373.

** Ove oznake su zgodne samo u slučaju kada je x nezavisna varijabla, a nisu zgodne ako je $x = \varphi(v)$; vidi str. 385 (zamjena varijabli).

Drugi diferencijal funkcije s jednom varijablom $y = f(x)$ [označuje se d^2y, $\mathrm{d}^2f(x)$] jest diferencijal prvog diferencijala: $\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = f''(x)\,\mathrm{d}x^2$*. Analogno se definiraju diferencijali viših redova: $\mathrm{d}^3y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2y) = f'''(x)\,\mathrm{d}x^3$* itd.

Totalni diferencijal drugog reda funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$:

$$\mathrm{d}^2u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

ili u simboličkom obliku: $\mathrm{d}^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 u$**

Totalni diferencijal reda n funkcije sa dvije varijable:

$$\mathrm{d}^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n u^{**},$$

za funkcije s većim brojem varijabli:

$$\mathrm{d}^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}z + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}t\right)^n u^{**}.$$

2. TEHNIKA DIFERENCIRANJA

Opće upute. Koristimo li se niže navedenim pravilima za diferenciranje i tablicom derivacija, možemo naći derivaciju svake elementarne funkcije; takva derivacija je uvijek elementarna funkcija. Najvažnije pravilo za diferenciranje funkcije po funkciji (*složene funkcije*) nazivamo »lančanim pravilom« (str. 379); na primjer:

$$y = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}};$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}(\mathrm{tg}\sqrt{x})}{\mathrm{d}x} = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x} =$$

$$= e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

* Ove su oznake zgodne samo u slučaju kada je x nezavisna varijabla, a nisu zgodne ako je $x = \varphi(v)$; vidi str. 385 (zamjena varijabli).

** U slučaju kada su varijable $x, y, \ldots, t$ i same funkcije novih varijabli, formule su složenije. Vidi str. 386 i 387.

Tablica derivacija elementarnih funkcija

Funkcija	Derivacija	Funkcija	Derivacija
C (konstanta)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1		
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{arc\,tg}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{arc\,ctg}\,x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{arc\,sc}\,x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$\mathrm{arc\,csc}\,x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{th}\,x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\mathrm{cth}\,x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{Ar\,sh}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\mathrm{Ar\,ch}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{ctg}\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$	$\mathrm{Ar\,th}\,x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x \sec x$	$\mathrm{Ar\,cth}\,x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x \csc x$		

Prije diferenciranja, ako je moguće, zgodno je pretvoriti funkciju u oblik sume rješavanjem zagrada (str. 178), zatim odijeliti cijeli dio (str. 168 i 169), logaritmirati izraz (str. 175) itd.

Primjeri:

$$1)\ y = \frac{2 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + x^2}{x} = \frac{2}{x} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} + 1.$$

$$2)\ y = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

Osnovna pravila diferenciranja. (u, v, w su funkcije nezavisne varijable x; u', v', w', ... su derivacije tih funkcija po x.)

1) *Derivacija* (ili *diferencijal*) *algebarske sume* dviju ili više funkcija jednaka je algebarskoj sumi derivacija (diferencijala) svake funkcije:

$$(u + v - w + \ldots + t)' = u' + v' - w' + \ldots + t';$$

$$\mathrm{d}(u + v - w + \ldots + t) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w + \ldots + \mathrm{d}t.$$

2) *Derivacija* (*diferencijal*) *produkta* dviju ili nekoliko funkcija jednaka je sumi n sumanda (gdje je n broj množenih funkcija); svaki sumand sastavljen je kao dani produkt, s tom razlikom, da je po redu jedan od faktora zamijenjen sa svojom derivacijom (diferencijalom):

za dvije funkcije:

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad \mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u;$$

za tri funkcije:

$$(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw,$$

$$\mathrm{d}(uvw) = uv\,\mathrm{d}w + uw\,\mathrm{d}v + vw\,\mathrm{d}u \quad \text{itd.}$$

Često za izračunavanje derivacije produkta od nekoliko funkcija najprije tražimo *logaritamsku derivaciju*

$$\left[\text{tj. derivaciju logaritma zadane funkcije } (\ln y)' = \frac{y'}{y}\right];\ \text{npr.:}$$

$$y = \sqrt{x^3 e^{4x}\sin x};\quad \ln y = \frac{1}{2}(3\ln x + 4x + \ln\sin x),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2x} + 2 + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sqrt{x^3 e^{4x}\sin x}\,*.$$

3) *Derivacija* (*diferencijal*) *funkcije s konstantnim faktorom.* Konstantni faktor možemo izlučiti pred znak derivacije (diferencijala):

$$(cu)' = cu', \qquad \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u.$$

4) *Derivacija* (*diferencijal*) *razlomka* izračunava se prema ovoj formuli:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}.$$

5) *Derivacija funkcije od funkcije* (*složene funkcije*). Ako je $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, tada je:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(x);$$

ako je $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$, tada je

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(t)\cdot\psi'(x)\ \text{(»lančano pravilo«).}$$

U slučaju »lanca« većeg broja funkcija postupamo analogno.

* Taj se način primjenjuje i za diferenciranje funkcija oblika u^v, npr.:

$$y = (2x+1)^{3x},\quad \ln y = 3x\ln(2x+1),\quad \frac{y'}{y} = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right],$$

$$y' = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right]y = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right](2x+1)^{3x}.$$

Derivacije višega reda jednostavnih funkcija

Funkcija	n-ta derivacija
x^m	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (za cijeli m i $n > m$ je derivacija 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ za parni n, $\operatorname{ch} x$ za neparni n
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ za parni n, $\operatorname{sh} x$ za neparni n

Derivacija n-tog reda produkta dviju funkcija (*Leibnizova formula*):

$$D^n(uv) = u\cdot D^n v + \frac{n}{1} Du\, D^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2} D^2u\, D^{n-2}v + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} D^m u\, D^{n-m}v + \dots + D^n u\cdot v,$$

ili (ako postavimo $D^0u = u$, $D^0v = v$):

$$D^n(uv) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m D^m u\, D^{n-m}v$$

(formula analogna binomnoj formuli, vidi str. 210).

Derivacija složene funkcije od nekoliko varijabli. Slučaj jedne nezavisne varijable: $u = f(x, y, \dots, t)$,
gdje je: $x = \varphi(\xi)$, $y = \psi(\xi), \dots, t = \chi(\xi)$:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\xi}. \qquad (*)$$

Slučaj s nekoliko nezavisnih varijabli $u = f(x, y, \dots, t)$, gdje je $x = \varphi(\xi, \eta, \dots, \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \dots, \tau)\dots$, $t = \chi(\xi, \eta, \dots, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi},\\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}.
\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Diferenciranje implicitne funkcije

1) *Funkcija jedne varijable* $y = f(x)$, zadana jednadžbom:

$$F(x, y) = 0. \qquad (A)$$

Diferenciranje (A) po x na osnovu formule (*) daje:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0, \qquad (B)$$

odakle je:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Diferenciranje (B) po x na osnovu te iste formule daje:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2 + F'_y y'' = 0, \qquad (C)$$

odakle dobivamo, uzevši u obzir (B):

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}. \qquad (D)$$

Na taj način dobivamo i:

$$F''''_{xxx} + 3F''''_{xxy}y' + 3F''''_{xyy}(y')^2 + F''''_{yyy}(y')^3 + 3F''_{xy}y'' + 3F''_{yy}y'y'' + F'_y y''' = 0, \qquad (E)$$

odakle se, uzevši u obzir (B) i (E), izračuna y''' itd.

2) *Funkcija s više varijabli* $u = f(x, y, \ldots, t)$ zadana jednadžbom:

$$F(x, y, \ldots, t, u) = 0.$$

Parcijalne derivacije dobiju se analogno, pomoću formule (**) na str. 381:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -F'_x/F'_u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -F'_t/F'_u, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -F'_t/F'_u;$$

a istim putem nalazimo i parcijalne derivacije višega reda.

3) *Dvije funkcije jedne varijable* $y = f(x)$ i $z = \varphi(x)$, zadane sistemom jednadžbi:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{A}$$

Diferenciranje (A) prema formuli (*) na str. 381 daje:

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0, \qquad \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' = 0, \tag{B}$$

odakle je:

$$y' = \frac{F'_z \Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y}, \qquad z' = \frac{F'_x \Phi'_y - F'_y \Phi'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y};$$

na isti način [diferenciranjem (B), uzevši u obzir vrijednosti y' i z'] nalazimo drugu derivaciju y'' i z'' itd.

4) *n funkcija jedne varijable* $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $\ldots$, $t = \psi(x)$, zadanih sistemom od n jednadžbi:

$$F(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \ldots$$
$$\ldots, \Psi(x, y, z, \ldots, t) = 0. \tag{A}$$

Diferencirajući (A) prema formuli (*) na str. 381, dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} &F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' + \ldots + F'_t \cdot t' = 0, \\ &\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' + \ldots + \Phi'_t \cdot t' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Psi'_x + \Psi'_y \cdot y' + \Psi'_z \cdot z' + \ldots + \Psi'_t \cdot t' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Riješivši sistem (B) s obzirom na $y', z', \ldots, t'$, nalazimo prve derivacije; istim postupkom dobivamo derivacije višega reda.

5) *Dvije funkcije sa dvije varijable* $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$, zadane sistemom dviju jednadžbi:

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi(x, y, u, v) = 0. \tag{A}$$

Diferenciranjem jednadžbi (A) po x i po y [prema formulama (**) na str. 381] dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right\} (B_x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} (B_y)$$

Ako riješimo sistem (B_x) s obzirom na $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ i sistem (B_y) s obzirom na $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, dobivamo parcijalne derivacije prvoga reda; istim putem dobivamo derivacije viših redova.

6) *n funkcija sa m varijabli, zadanih sistemom n jednadžbi.* Parcijalne derivacije prvoga i bilo kojeg reda izračunavamo analognim putem.

Derivacije funkcije $y = f(x)$, **zadane u parametarskom obliku**: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (derivacije po t označene su crticom):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \ldots$$

Derivacija inverzne funkcije. Ako je funkcija $y = f(x)$ inverzna s obzirom na $y = \varphi(x)$, tada njene derivacije računamo po ovim formulama:

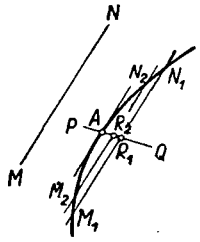
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \ldots$$

Na primjer, $y = \arcsin x$; direktna funkcija: $y = \sin x$,

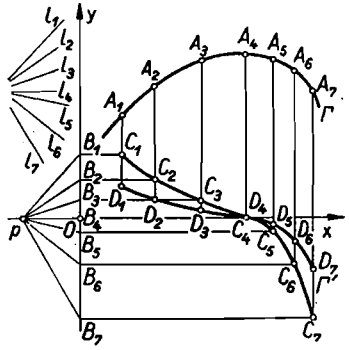
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Grafičko deriviranje. Ako je derivabilna funkcija $y = f(x)$ prikazana (u Descartesovim koordinatama) grafom (Γ) u nekom intervalu $a < x < b$, tada graf njene derivacije (Γ') možemo nacrtati na način koji ćemo sada prikazati.

Prethodna zadaća: konstrukcija tangente u zadanoj točki krivulje »odoka« vrlo je netočna; ako je pak zadan smjer tangente (MN, sl. 288), tada točku dodira A možemo konstruirati točnije. Nacrtamo dvije tetive M_1N_1 i M_2N_2, koje su paralelne sa MN, tako da sijeku krivulju u bliskim točkama, zatim nacrtamo polovišta R_1 i R_2 tih tetiva i kroz točke R_1 i R_2 nacrtamo pravac PQ; taj pravac siječe krivulju u točki A, u kojoj tangenta (približno) ima zadani smjer. Za kontrolu ispravnosti takve konstrukcije možemo nacrtati treću tetivu koja je paralelna dvjema prvima i bliza njima, a pravac PQ je mora sjeći u sredini.



Sl. 288



Sl. 289

Konstrukcija grafa derivacije. 1) Zadamo nekoliko smjerova ($l_1, l_2, \ldots$) tangenata na krivulju $y = f(x)$ (sl. 289), koji odgovaraju razmatranom intervalu krivulje, i odredimo dirališta $A_1, A_2, \ldots$ prema prethodnoj konstrukciji (tangente ne moramo crtati).

2) Na negativnom dijelu osi Ox izaberemo po volji točku P (»pol«); odsječak $PO = a$ mora biti to veći, što je krivulja plosnatija.

3) Iz pola P povučemo pravac PB_1, PB_2 paralelno smjerovima $l_1, l_2, \ldots$ do sjecišta s osi Oy u točkama $B_1, B_2, \ldots$

4) Kroz $B_1, B_2, \ldots$ povučemo horizontalni pravac $B_1C_1, B_2C_2, \ldots$ do sjecišta u točkama $C_1, C_2, \ldots$ s dotičnim ordinatama točaka $A_1, A_2, \ldots$

5) Točke $C_1, C_2, \ldots$ spajamo glatkom krivuljom; njena jednadžba je $y = a \cdot f'(x)$. To je traženi graf derivacije, ako smo za jedinicu mjerila po osi Oy uzeli odsječak a. Da bismo dobili graf u običnom mjerilu (krivulja Γ') konstruiramo točke $D_1, D_2, \ldots$ kojoj su ordinate jednake ordinatama točaka $C_1, C_2, \ldots$, podijeljenim sa a ($a = PO$ na sl. 289).

3. ZAMJENA VARIJABLI U DIFERENCIJALNIM IZRAZIMA

Funkcija s jednom varijablom. Ako je $y = f(x)$ i ako imamo u izrazu

$$H = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$$

sadržan argument, funkciju i njenu derivaciju, tada u slučaju zamjene varijabli s novima, derivacije računamo prema ovim formulama:

1) Za slučaj da zamijenimo argument x sa argumentom t, koji je sa x vezan formulom $x = \varphi(t)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left\{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2} + [3[\varphi''(t)]^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)\frac{dy}{dt}\right\}^*.$$

2) Za slučaj zamjene funkcije y s funkcijom u, koja je sa y vezana formulom $y = \varphi(u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3, \ldots$$

3) Za slučaj zamjene argumenta x i funkcije y s novim argumentom t i funkcijom u, koji su sa x i y vezani formulama $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}}\right] =$$

* Ako je formula transformacije dana u nerazvijenom obliku s obzirom na x kao $\Phi(x, t) = 0$, tada derivacije $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ računamo po istim formulama, samo što derivacije $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ računamo po pravilima diferenciranja implicitnih funkcija. Pri tom konačni izraz H može sadržavati varijablu x, koju treba eliminirati pomoću jednadžbe $\Phi(x, t) = 0$.

$$= \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{B}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B^3}\left(B\frac{dA}{dt}-A\frac{dB}{dt}\right),$$

gdje je $A = \dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}$, $\quad B = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}$.

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ računamo analogno.

Primjer: Pri transformaciji Descartesovih koordinata u polarne po formulama $x = \rho\cos\varphi$, $\quad y = \rho\cdot\sin\varphi$ imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^3}.$$

Funkcija sa dvije varijable. Ako je:

$$\omega = f(x, y)$$

i ako su u izrazu:

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

sadržani argumenti, funkcija i njene parcijalne derivacije, tada u slučaju zamjene varijabli x, y s novim varijablama u, v, koje su sa x i y povezane formulama $x = \varphi(u, v)$, $v = \psi(u, v)$, parcijalnu derivaciju prvog reda $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$ dobivamo iz sistema jednadžbi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

odakle izlazi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = C\frac{\partial\omega}{\partial u}+D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

gdje su A, B, C, D funkcije od u, v. Druge parcijalne derivacije izračunavamo po istim formulama, no ne primjenjujemo na funkciju ω, već na $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$; na primjer:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) =$$

$$= A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$$

Na isti način dobivamo i parcijalne derivacije višega reda.

Primjer: Treba izraziti Laplaceov operator*:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

u polarnim koordinatama $x = \rho\cos\varphi$, $\quad y = \varphi\sin\varphi$.

Imamo:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi;$$

odavde je:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)$$

Analogno računajući $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, dobivamo:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Za funkcije s većim brojem varijabli dobivamo formule za zamjenu na sličan način.

4. OSNOVNI TEOREMI DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Uvjet monotonosti funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području i ima derivaciju u svim unutrašnjim točkama tog područja**, tada je nuždan i dovoljan uvjet za monotonost funkcije u području definicije:

* Vidi na str. 658.

** Tj. u točkama koje nisu krajevi intervala.

$f'(x) \geqslant 0$ za monotono uzlaznu funkciju,

$f'(x) \leqslant 0$ za monotono silaznu funkciju*.

Geometrijski smisao. Graf monotono uzlazne funkcije jest krivulja koja, ako ju razmatramo slijeva nadesno, ni u kom mjestu ne pada (uspinje se ili ide horizontalno, sl. 290, *a*); tangenta u točkama te krivulje tvori s pozitivnim smjerom osi Ox šiljast kut ili je s njim paralelna. Analogno je za monotono silaznu funkciju (sl. 290, *b*)**.

Fermatov teorem. Ako funkcija $y = f(x)$, koja je zadana u suvislom području, ima u nekoj nutarnjoj točki područja*** najveću ili najmanju vrijednost, tj.:

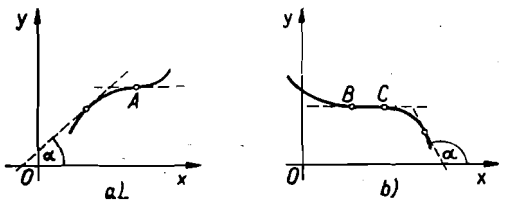
$$f(c) < f(x)$$

ili:

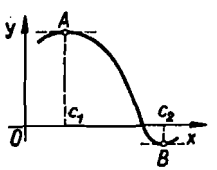
$$f(c) > f(x),$$

i u točki c ima konačnu derivaciju, tada je ta derivacija jednaka nuli:

$$f'(c) = 0.$$



Sl. 290



Sl. 291

Geometrijski smisao. U točkama A i B grafa funkcije, koja zadovoljava uvjete teorema, tangenta je paralelna s osi x (sl. 291).

Fermatov teorem daje samo nuždan uvjet za postojanje najveće i najmanje vrijednosti funkcije; on nije dovoljan: na sl. 290, *a* u točki A je $f'(x) = 0$, ali tamo nema ni najveće ni najmanje vrijednosti.

* Ovaj uvjet vrijedi za monotono rastenje ili padanje u širokom smislu (vidi primjedbu na str. 337). Da funkcija striktno raste ili pada treba uz taj uvjet još i drugi: derivacija $f'(x)$ ne smije biti identična nuli ni u kom intervalu koji je dio razmatranog područja. Taj uvjet nije npr. ispunjen na odsječku BC, sl. 290, *b*.

** U slučaju striktne monotonosti tangenta može biti paralelna s osi Ox samo za pojedine točke (npr. u točki A na sl. 290, *a*), ali ne na cijelom intervalu (BC na sl. 290, *b*).

*** Tj. u točki koja nije kraj (rub) intervala.

Uvjet *konačnosti* derivacije bitan je u Fermatovom teoremu: na sl. 292, *d*, u točki E, funkcija ima najveću vrijednost, ali derivacija nije nula.

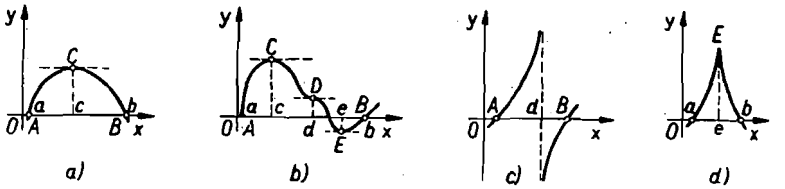
Rolleov teorem. Ako je funkcija $y = f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinuta, a ima barem u otvorenom intervalu (a, b) derivaciju i postaje nula na njegovim krajevima:

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0 \qquad (a < b),$$

tada postoji najmanje jedan broj c između a i b takav da je:

$$f'(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

Geometrijski smisao. Ako je krivulja, koja je graf funkcije $y = f(x)$ ili koja siječe os Ox u dvije točke A i B, neprekinuta i ima tangentu na cijelom području od A do B, tada postoji najmanje jedna točka C između A i B u kojoj je tangenta paralelna s osi Ox (sl. 292, *a*).



Sl. 292

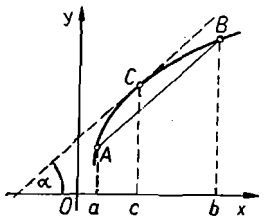
Takvih točaka može biti i nekoliko (točke C, D, E na sl. 292, *b*). Zahtjev neprekinutosti funkcije i egzistencije njene derivacije bitan je: na sl. 292, *c* funkcija ima prekinutost za $x = d$, na sl. 292, *d* derivacija u točki E ne postoji; u oba ova slučaja nema točke C u kojoj je $f'(x) = 0$.

Lagrangeov teorem (*teorem srednje vrijednosti*). Ako je funkcija $y = f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinuta, a ima u otvorenom intervalu (a, b) derivaciju, tada postoji najmanje jedan broj c između a i b takav da je:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

Ako drugačije pišemo (stavivši da je $b = a + h$ i ako sa Θ označimo neki broj između 0 i 1), tada je

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1).$$



Sl. 293

Geometrijski smisao. Ako je krivulja $y = f(x)$ (sl. 293) neprekinuta i ima između A i B u svakoj točki tangentu, između A i B

postoji takva točka C krivulje da je tangenta u njoj paralelna s tetivom AB.

Takvih točaka može biti nekoliko: uvjet neprekinutosti funkcije i postojanja njene derivacije bitan je (lako je konstruirati primjere koji to ilustriraju analogno kao na sl. 292, *b*, *c*, *d*).

Taylorov teorem (poopćenje Lagrangeovog teorema). Ako je funkcija $y = f(x)$ u intervalu $[a, a + h]$* neprekinuta i ima neprekinute derivacije do uključivo $(n - 1)$-toga reda i ako u unutrašnjosti intervala postoji još i n-ta derivacija, vrijedi jednadžba (*formula Taylora*):

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \Theta h),$$

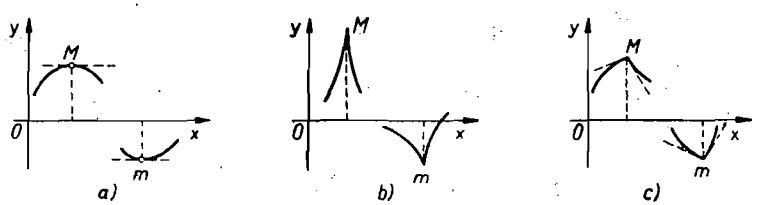
gdje je Θ neki broj između 0 i 1 ($0 < \Theta < 1$).

Cauchyjev teorem (poopćeni teorem srednje vrijednosti). Ako su dvije funkcije $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinute i imaju barem u unutrašnjosti intervala derivaciju, pri čemu $\varphi'(x)$ ni u jednoj točki intervala nije nula, tada postoji takav broj c između a i b da vrijedi jednadžba:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (a < c < b).$$

Geometrijski smisao Cauchyjevog teorema je isti kao i kod Lagrangeovog; ako razmatramo krivulju na sl. 293, zadanu u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, gdje točka A odgovara vrijednosti parametara $t = a$, a točka B vrijednosti $t = b$, tada je za točku C koeficijent smjera tangente na krivulju:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$



Sl. 294

* Ovdje može h biti pozitivan i negativan.

5. ODREĐIVANJE MAKSIMUMA I MINIMUMA

Funkcija s jednom varijablom.

Definicija. Maksimum (M) ili *minimum* (m)* funkcije $y = f(x)$ jest takva vrijednost $f(x_0)$ za koje vrijedi nejednadžba:

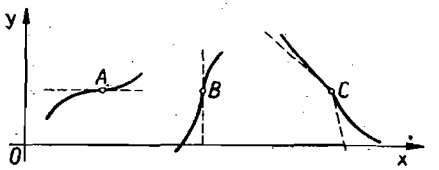
$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \text{(za maksimum)}$$

i:

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \quad \text{(za minimum)}$$

za po volji uzete male vrijednosti h pozitivne i negativne. Na taj način u točkama maksimuma (minimuma) vrijednost $f(x_0)$ je veća (ili manja) od svih *susjednih* vrijednosti funkcije.

Nuždan uvjet za maksimum ili minimum neprekinute funkcije. Neprekinuta funkcija može imati maksimum ili minimum samo u onim točkama, u kojima je derivacija ili jednaka nuli ili uopće ne postoji (napose kad postaje neizmjerna).



Sl. 295

Geometrijski smisao. U točkama grafa funkcije, koje odgovaraju maksimumu ili minimumu, tangenta je paralelna s osi Ox (sl. 294, *a*), ili je paralelna s osi Oy (sl. 294, *b*), ili ne postoji (sl. 294, *c*).

Taj uvjet nije dovoljan: na sl. 295 u točkama A, B, C nužni uvjeti su ostvareni, ali u njima nema niti maksimuma niti minimuma.

Za neprekinutu funkciju maksimumi i minimumi se izmjenjuju: između dva susjedna maksimuma ima jedan minimum, a između dva susjedna minimuma, jedan maksimum.

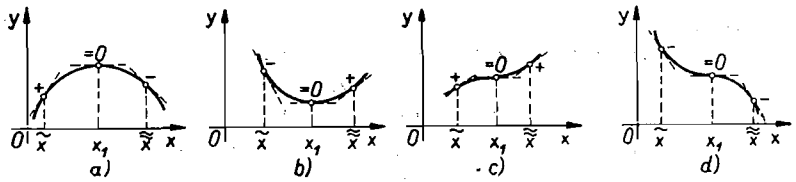
Određivanje maksimuma i minimuma neprekinute funkcije, zadane eksplicitno sa $y = f(x)$, koja ima neprekinutu derivaciju. Najprije nađemo točke koje zadovoljavaju nužni uvjet $f'(x) = 0$ (*stacionarne točke*): izračunamo derivaciju $f'(x)$ i nađemo sve realne korijene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednadžbe $f'(x) = 0$.

Zatim svaki od nađenih korijena, npr. x_1, ispitujemo na jedan od ovih načina:

1) *Usporedba predznaka derivacije.* Odredimo predznak $f'(x)$ za vrijednosti $\tilde{x}$, koje nisu mnogo manje i za vrijednosti $\tilde{\tilde{x}}$, koje nisu mnogo veće od x_1 [točnije: koje se od x_1 razlikuju tako malo da između $\tilde{x}$ i x_1 i između x_1 i $\tilde{\tilde{x}}$ nema više korijena jednadžbe $f'(x) = 0$]. Ako predznak $f'(x)$ pri tome prelazi od »+« na »—« (sl. 296, *a*), tada za $x = x_1$ imamo za $f(x)$ maksimum; ako prelazi od »—« na »+« (sl. 296, *b*), imamo minimum; ako se predznak derivacije ne mijenja (sl. 296, *c* i *d*), tada za $x = x_1$ nema niti M,

* U matematičkoj analizi pojmovi maksimuma i minimuma zajedno se zovu »ekstremi«.

niti m, a na grafu postoji točka infleksije s tangentom koja je paralelna s osi Ox.



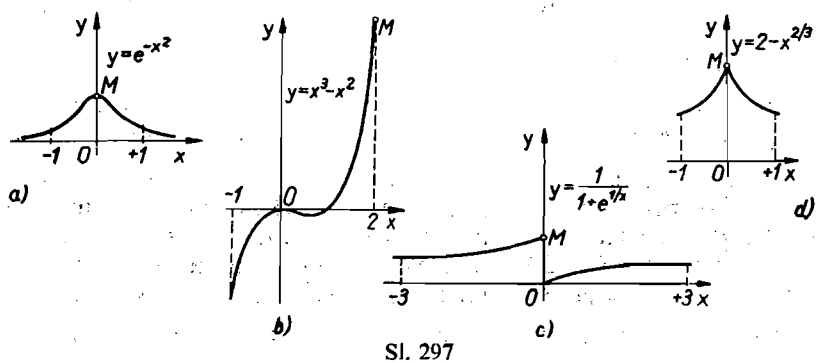
Sl. 296

2) *Metoda viših derivacija* (može biti primijenjena u onim slučajevima kada za $x = x_1$ postoje derivacije višega reda). Uvrstimo svaki korijen x_1 u drugu derivaciju $f''(x)$. Ako je $f''(x_1) < 0$, tada za $x = x_1$ imamo M; ako je $f''(x_1) > 0$, tada imamo m; ako je $f''(x_1) = 0$, tada uvrstimo x_1 u treću derivaciju $f'''(x)$. Ako je u tom slučaju $f'''(x_1) \neq 0$, tada za $x = x_1$ nema niti M niti m funkcije (točka infleksije); ako je pak $f'''(x_1) = 0$, tada uvrštavamo x_1 u četvrtu derivaciju, itd.

Opće pravilo. Ako je red prve derivacije, koja nije nula za $x = x_1$, paran, tada $f(x)$ ima za $x = x_1$ M ili m, što zavisi od toga da li je ta derivacija negativna ili pozitivna. Ako je taj red neparan, tada funkcija nema niti M niti m za $x = x_1$.

Usporedbu predznaka derivacije možemo primijeniti i na one vrijednosti funkcije gdje nema derivacije (vidi sl. 294, *b* i *c* i sl. 295).

Pri određivanju *najveće* i *najmanje* vrijednosti funkcije u zadanom intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ nalazimo sve njezine M i m unutar toga intervala, a također ispitujemo funkciju na krajevima intervala, u točkama prekinutosti funkcije i u točkama prekinutosti njene derivacije. Tražene se vrijednosti mogu naći u jednoj od razmotrenih točaka; sve te vrijednosti moramo izračunati i ustanoviti koja je od njih najveća, a koja je najmanja.



Sl. 297

Primjeri određivanja najveće vrijednosti:

a) $y = e^{-x^2}$ u intervalu $[-1, +1]$. Najveća vrijednost je u točki $x = 0$ (maksimum, sl. 297, *a*).

b) $y = x^3 - x^2$ u intervalu $[-1, +2]$. Najveća vrijednost je u točki $x = +2$ (desni kraj intervala, sl. 297, *b*).

c) $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ u intervalu $[-3, 3]$. Najveća vrijednost je u točki $x = 0$ (prekinutost funkcije, sl. 297, *c*) [ako postavimo $y = 1$ za $x = 0$].

d) $y = 2 - x^{2/3}$ u intervalu $[-1, +1]$. Najveća vrijednost je u točki $x = 0$ (maksimum, neizmjerna derivacija, sl. 297, *d*).

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije koja je zadana implicitno. Pri nalaženju M i m funkcije $y = f(x)$, koja je zadana implicitno jednadžbom $F(x, y) = 0$ (ako su F, F'_x i F'_y neprekinuti), postupamo ovako: Riješimo sistem jednadžbi $F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$ i dobivena rješenja (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... uvrstimo u F'_y i F''_{xx}. Ako u točki (x_i, y_i), F'_y i F''_{xx} imaju različite predznake, tada za dani x_i funkcija y_i ima m; ako su F'_y i F''_{xx} istog predznaka, tada funkcija za zadani x_i ima M. Ako je jedan od izraza F'_y ili F''_{xx} jednak nuli u razmatranoj točki, tada su daljnje analitičke metode složenije.

Funkcija s nekoliko varijabli

Definicija. Funkcija $u = f(x, y, \ldots, t)$ ima za sistem vrijednosti $x_0, y_0, \ldots, t_0$ (»u točki P_0«) maksimum (minimum), ako možemo naći takav broj ε da područje $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, ..., $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ ulazi u područje definicije funkcije i da su za svaki sistem vrijednosti u tom području, osim sistema $x_0, y_0, \ldots, t_0$, zadovoljeni uvjeti:

$$f(x, y, \ldots, t) < f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \qquad \text{(za maksimum),}$$

odnosno

$$f(x, y, \ldots, t) > f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \qquad \text{(za minimum).}$$

Služeći se pojmom višedimenzionalnog prostora*, možemo reći da je u točkama maksimuma (minimuma) vrijednost funkcije u veća (odnosno manja) nego u ma kojoj susjednoj točki.

Geometrijski smisao maksimuma (minimuma) funkcije sa dvije varijable, koja je prikazana plohom u Descartesovim koordinatama (vidi str. 351): u točki A maksimuma (minimuma), aplikata plohe je veća (odnosno manja) nego aplikata bilo koje točke, koja se nalazi u dovoljno maloj okolini točke A (tj. u malom području za koje je točka A unutrašnja točka), vidi sl. 298: a) maksimum, *b*) minimum.

* Vidi str. 351.

Ako ploha ima u točki P maksimuma ili minimuma tangencijalnu ravninu, tada je ta ravnina paralelna s ravninom xOy (sl. 298, *a* i *b*). Taj uvjet je nuždan, ali nije dovoljan za to, da točka P ima M ili m: na sl. 298, *c* ploha ima u točki P horizontalnu tangencijalnu ravninu, ali funkcija u njoj nema niti M niti m (P je sedlasta točka).

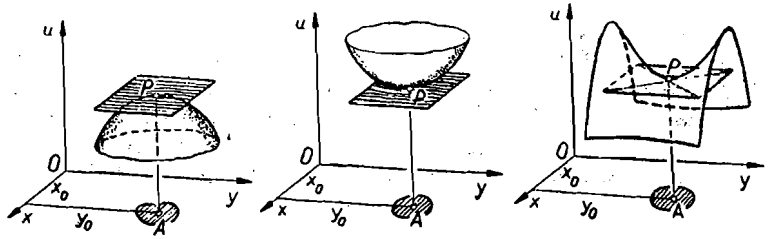
Određivanje maksimuma i minimuma funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$. Riješimo sistem jednadžbi:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

dobivene sisteme rješenja (x_1, y_1), (x_2, y_2) uvrstimo u $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Tvori se izraz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = [f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2]_{x=x_1,\ y=y_1}.$$

Ako je $\Delta > 0$, tada funkcija $f(x, y)$ za sistem vrijednosti (x_1, y_1) ima M pri $f''_{xx} < 0$ i m pri $f''_{xx} > 0$. Ako je $\Delta < 0$, tada $f(x, y)$ nema ni M ni m. Ako je pak $\Delta = 0$, tada su metode složenije.



Sl. 298

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije sa n varijabli $u = F(x, y, \ldots, t)$. *Nuždan* ali ne i dovoljan uvjet za to da bi za sistem vrijednosti $(x, y, \ldots, t)$ derivabilna funkcija u imala M ili m jest: taj sistem mora zadovoljavati n jednadžbi:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \ldots, \quad F'_t = 0. \qquad \text{(A)}$$

Dovoljni uvjeti su općenito složeni; da bismo praktički ustanovili da li će sistem rješenja $x_1, y_1, \ldots, t_1$ jednadžbi (A) dati M, m ili ne, treba ispitati funkciju za vrijednosti koje su bliske $x_1, y_1, \ldots, t_1$.

Uvjetni (vezani) maksimum i minimum (Lagrangeova metoda). Ako treba naći M ili m funkcije s nekoliko (n) varijabli

$u = F(x, y, \ldots, t)$ koje nisu međusobno nezavisne, već međusobno povezane dodatnim uvjetima (broj uvjeta je $k < n$):

$$\varphi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \psi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \ldots, \quad \chi(x, y, \ldots, t) = 0,$$

uvodimo k neodređenih multiplikatora $\lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ i razmatramo funkciju $n + k$ varijabli $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ kako slijedi:

$$\Phi(x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa) = F(x, y, \ldots, t) + \lambda \cdot \varphi(x, y, \ldots, t) + \\ + \mu \cdot \psi(x, y, \ldots, t) + \ldots + \varkappa \cdot \chi(x, y, \ldots, t).$$

Nužni uvjeti maksimuma ili minimuma funkcije Φ daju sistem od $n + k$ jednadžbi (A) s nepoznatim $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$. Te jednadžbe imaju oblik:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \ldots, \quad \chi = 0, \quad \Phi'_x = 0, \quad \Phi'_y = 0, \quad \ldots, \quad \Phi'_t = 0.$$

Sistem rješenja $(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ koji zadovoljava te jednadžbe može dati M ili m za funkciju F; to je samo nuždan uvjet.

Na primjer, za funkciju $u = f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, točku maksimuma (minimuma) dobivamo iz tri jednadžbe:

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$

sa tri nepoznanice x, y, λ.

6. RAZVOJ FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA

Taylorov red za funkcije jedne varijable. Funkciju $y = f(x)$, koja je neprekinuta i ima sve derivacije za $x = a$, možemo u mnogim slučajevima izraziti u obliku sume reda potencija (vidi str. 368) dobivenoga iz Taylorove formule (str. 390):

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \quad \textit{(Taylorov red)} \qquad \text{(T)}$$

Formula (T) je ispravna za one vrijednosti x za koje *ostatak** $f(x) - S_n = R_n$ teži k nuli za $n \to \infty$.

Formule za ostatak:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (\xi \text{ je između } a \text{ i } x),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Drugi oblik Taylorovog reda:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots;$$

za taj su oblik izrazi za ostatak:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\, dt.$$

MacLaurinov red je razvoj funkcije $f(x)$ po potencijama od x i predstavlja specijalan slučaj reda (T) za $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots; \quad (M)$$

njegov ostatak je:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x) \qquad (0 < \Theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Konvergencija Taylorova i MacLaurinova reda određuje se ili određivanjem člana R_n, ili određivanjem polumjera konvergencije (str. 368); u posljednjem slučaju može se desiti da red konvergira, ali njegova suma $S(x)$ nije jednaka $f(x)$.

* Ovdje pojam ostatka nije jednak onome koji smo upotrijebili u paragrafu o redovima funkcija (str. 366). Oba su pojma ista samo u onim slučajevima kada je formula (T) ispravna.

Taylorov red za funkcije s dvije varijable:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} k^2\right\} + \frac{1}{6}\left\{\ldots\right\} + \ldots + \frac{1}{n!}\left\{\ldots\right\} + R_n$$

ili u simboličkom obliku:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x,y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x,y) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^3 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x,y) + R_n,$$

gdje je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{n+1} f(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k)$$

$$(0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1).$$

Za funkciju s m varijabli analogna je simbolička formula:

$$f(x+h, \quad y+k, \quad \ldots, \quad t+l) =$$

$$= f(x,y,\ldots,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l\right)^i f(x,y,\ldots,t) + R_n,$$

gdje je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l\right)^{n+1} f(x + \Theta_1 h,$$

$$y + \Theta_2 k, \ldots, t + \Theta_m l) \quad (0 < \Theta_i < 1).$$

Tablica razvoja nekih funkcija u redove potencija

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
	Algebarske funkcije	
$(a \pm x)^m$	Binomni red se pretvori u oblik $a^m \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ i svede na ove redove:	$\lvert x\rvert \leqslant a$ za $m > 0$, $\lvert x\rvert < a$ za $m < 0$.
	Binomni redovi s pozitivnim eksponentom	
$(1 \pm x)^m$ $(m > 0)$*	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$ $+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/4}$	$1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/3}$	$1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$

* Za cio, pozitivan m red je konačan i sadrži $m + 1$ članova. Koeficijenti su $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = C_m^n$; tablicu binomnih koeficijenata C_m^n vidi na str. 210.

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$(1 \pm x)^{3/2}$	$1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{5/2}$	$1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$
	Binomni redovi s negativnim eksponentom:	
$(1 \pm x)^{-m}$ $(m > 0)$	$1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots +$ $+ (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/4}$	$1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/3}$	$1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$(1 \pm x)^{-3/2}$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5/2}$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{1\cdot 2}(2\cdot 3x \mp 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 \mp 5\cdot 6x^4 + \dots)$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-4}$	$1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cdot 3\cdot 4x \mp 3\cdot 4\cdot 5x^2 + 4\cdot 5\cdot 6x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7x^4 + \dots)$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5}$	$1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x \mp 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^2 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4 + \dots)$	$\lvert x\rvert < 1$

Trigonometrijske funkcije

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a + x\cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \dots + \frac{x^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \dots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a - x\sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \dots + \frac{x^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \dots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$*	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots + \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots\right]$*	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\sec x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$**	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\csc x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}$*	$0 < \lvert x\rvert < \pi$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 365).
** E_n — Eulerovi brojevi (vidi str. 365).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
	Eksponencijalne funkcije	
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$a^x=e^{x\ln a}$	$1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+$ $+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\frac{x}{e^x-1}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{2!}-\frac{B_2x^4}{4!}+\frac{B_3x^6}{6!}-\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{B_nx^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$*	$\lvert x\rvert<2\pi$
	Logaritamske funkcije	
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\ldots\right.$ $\left.+\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}+\ldots\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-$ $-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\pm\ldots$	$0<x\leqslant 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots$ $\ldots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\ldots$	$x>\frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\pm\ldots$	$-1<x\leqslant 1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 365).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$\ln(1-x)$	$-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right]$	$-1\leqslant x<1$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=$ $=2\operatorname{Ar th}x$	$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert<1$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=$ $=2\operatorname{Ar cth}x$	$2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert>1$
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots$ $\ldots-\frac{2^{2n-1}B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\ldots$*	$0<\lvert x\rvert<\pi$
$\ln\cos x$	$-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots$ $\ldots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\ldots$*	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\ln\lvert\operatorname{tg}x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\ldots$ $\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n}+\ldots$*	$0<\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
	Ciklometrijske funkcije	
$\arcsin x$	$x+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5x^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots$ $\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)(2n+1)}+\ldots$	$\lvert x\rvert<1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 365).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
arc cos x	$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots\right]$	$\lvert x\rvert < 1$
ar ctg x	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
ar ctg x	$= \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} \pm \ldots$*	$\lvert x\rvert > 1$
arc ctg x	$\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots\right]$	$\lvert x\rvert < 1$
	Hiperbolne funkcije	
sh x	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \infty$
ch x	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \infty$

* Prvi član $\frac{\pi}{2}$ ima predznak »+« za $x > 1$ i predznak »—« za $x < -1$.

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
th x	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \ldots$*	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
cth x	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \ldots$*	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
sch x	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n x^{2n} \pm \ldots$**	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
csch x	$\frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}\ldots$*	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
	Area-funkcije	
Ar sh x	$x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\,(2n+1)}x^{2n+1} \pm \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 365).
** E_n — Eulerovi brojevi (vidi str. 365).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
Ar ch x*	$\pm\left[\ln(2x)-\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}-\right.$ $\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}-\dots\right]$	$x>1$
Ar th x	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$	$\lvert x\rvert<1$
Ar cth x	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\dots$ $\dots+\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}}+\dots$	$\lvert x\rvert>1$

* Funkcija je dvoznačna.

III. INTEGRALNI RAČUN

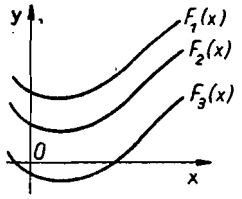
A. NEODREĐENI INTEGRALI

1. OSNOVNI POJMOVI I TEOREMI

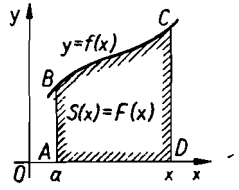
Primitivna funkcija. *Primitivnom funkcijom* za danu funkciju jedne varijable $y=f(x)$, definiranu u nekom suvislom području, nazivamo takvu funkciju $F(x)$ koja je definirana u tom istom području*, a derivacija joj je jednaka $f(x)$ [ili, što je isto, diferencijal joj je jednak $f(x)\,dx$]:

$$F'(x)=f(x) \quad \text{ili} \quad dF(x)=f(x)\,dx.$$

Primitivnih funkcija za danu funkciju ima beskonačan skup; razlika između dvije primitivne funkcije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ jest konstantna veličina. Grafovi svih funkcija $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)\dots$, koje su primitivne za danu funkciju, predstavljaju jednu te istu krivulju i dobivaju se jedan iz drugoga paralelnim pomakom krivulje u smjeru osi ordinate prema gore ili dolje (sl. 299).



Sl. 299



Sl. 300

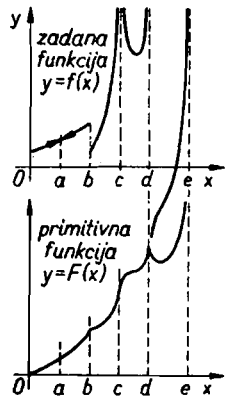
Geometrijski smisao primitivne funkcije. Ako je dana funkcija $f(x)$ izražena krivuljom u Descartesovim koordinatama (sl. 300), tada je primitivna funkcija brojčano jednaka površini $S(x)$ ograđenoj krivuljom $y=f(x)$, osi Ox i dvjema ordinatama: fiksnom ordinatom AB (za $x=a$) i promjenljivom ordinatom CD (za apscisu x). Birajući po volji konstantu a dobivamo različite primitivne funkcije.

Pri tome se površina $S(x)$ uzima u algebarskom smislu**.

* U nekim slučajevima područje definicije primitivne funkcije šire je od područja definicije zadane funkcije. Ako je područje definicije funkcije $f(x)$ — suvislo s isključenjem nekih pojedinih točaka neprekinutosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, tada se područje definicije prvobitne $F(x)$ može uključiti u ove točke prekinutosti (vidi str. 408).

** Površina lika $ABCD=\int_a^x f(x)\,dx$, vidi na str. 475.

Teorem o postojanju primitivne funkcije. Za svaku funkciju koja je neprekinuta u nekom suvislom području postoji primitivna funkcija, koja je također neprekinuta u tom području. Funkcija koja ima prekinutosti za pojedine vrijednosti x ima primitivnu funkciju, koja je ili neprekinuta ili ima prekinutost za iste vrijednosti x*.



Sl. 301

Primjeri:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(x) = -\frac{1}{x}$.

U oba primjera funkcija $f(x)$ ima prekinutost za $x = 0$, ali funkcija $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je neprekinuta, a $F(x) = -\frac{1}{x}$ ima također prekinutost za $x = 0$.

Tok grafa primitivne funkcije $F(x)$ u različitim točkama prekinutosti dane funkcije $f(x)$ vidi na sl. 301. U slučaju uklonjive (*a*) ili konačne (*b*) prekinutosti $f(x)$ je primitivna i neprekinuta; u slučaju pak neizmjerne prekinutosti, primitivna $f(x)$ može biti neprekinuta [krivulja $F(x)$ ima točku infleksije (*c*) ili šiljak (*d*) s vertikalnom tangentom] ili ima također prekinutost (*e*). Analitički uvjet toga, kakav slučaj nastupa, vidi na str. 493 do 496.

Neodređeni integral. Opći izraz $F(x) + C$ za sve primitivne funkcije od zadane funkcije $f(x)$ nazivamo neodređenim integralom funkcije $f(x)$ ili diferencijala $f(x)\,dx$. Oznaka je:

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx.$$

($\int$ — *znak integrala*, $f(x)$ — integrand ili podintegralna funkcija, $f(x)\,dx$ — *podintegralni izraz*).

Za primitivnu funkciju $F(x)$ može biti uvijek uzet određeni integral (vidi str. 476) s konstantnom (po volji odaberivom) donjom granicom i varijabilnom gornjom granicom.

Integrali elementarnih funkcija nisu uvijek elementarne funkcije. Na str. 409 do 425 izloženi su postupci za računanje integrala (postupci *integriranja*) onih jednostavnih funkcija, koje imaju elementarne primitivne funkcije, a rezultati integriranja sabrani su u tablici na str. 426 do 473**.

* Vidi napomenu na predašnjoj stranici.

** U daljnjem je izraz »primitivna« zamijenjen s riječi »integral«, ali u tablicama integrala izostavljena je po volji odaberiva konstanta C.

Ako integral nije elementarna funkcija, tada u slučaju potrebe (teoretskog interesa ili česte praktičke primjene) za takvu funkciju sastavljamo tablicu njenih vrijednosti: takvim specijalnim funkcijama (za koje je po volji odaberiva konstanta određena time što je fiksno odabrana donja granica integrala) često se daju specijalni nazivi, na primjer:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\,(x)\ (\text{»integralni logaritam«}),$$

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi)\ (\text{»eliptički integral I. vrste«})^*$$

Ako se funkcija elementarno ne može integrirati ili je integracija komplicirana, često podintegralnu funkciju razvijamo u red (vidi str. 395) koji (u slučaju njegove jednolike konvergencije, vidi str. 366) integriramo član po član. Za približno integriranje možemo zamijeniti funkciju s polinomom.**

2. OPĆA PRAVILA INTEGRIRANJA

Osnovni integrali. Formule za integriranje, dobivene kao obrat osnovnih formula diferenciranja (str. 377) sabrane su u tablici na str. 410. Na takve integrale nastojimo dovesti zadani integral pomoću algebarskih ili trigonometrijskih transformacija ili primjenom pravila integriranja.

Osnovna pravila integriranja su svojstva neodređenih integrala koja omogućuju da pretvorimo integral zadane funkcije u integral drugih funkcija:

1) *Konstantni faktor* možemo izlučiti pred znak integrala:

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$$

2) *Integral sume* (*razlike*) jednak je sumi (odnosno razlici) pojedinih članova:

$$\int (u + v - w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx^{***}.$$

3) *Pravilo substitucije:* ako je $x = \varphi(t)$, tada je:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

4) *Parcijalna integracija*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du^{****}.$$

* O eliptičkim integralima vidi na str. 421.

** O grafičkom integriranju tj. konstrukciji grafa primitivne funkcije iz grafa zadane funkcije, vidi na str. 482.

*** u, v, w su funkcije od x.

**** u, v su funkcije od x.

Tablica osnovnih integrala

(Konstanta integracije je ovdje, a i u drugim tablicama, izostavljena)

Potencije

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

Trigonometrijske funkcije

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x^*$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x^*$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Razlomljene racionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}^* \quad (\text{za } |x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}^* \quad (\text{za } |x| > a)$$

Eksponencijalne funkcije

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

Hiperbolne funkcije

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\operatorname{ch} x^*$$

$$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\operatorname{sh} x^*$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

Iracionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^*$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^*$$

* U svim formulama u kojima u sastav primitivne funkcije ulazi izraz koji sadrži $\ln f(x)$, treba ga razumjeti kao $\ln|f(x)|$; znak apsolutne vrijednosti je radi jednostavnosti izostavljen.

Opći postupci pri računanju integrala. Ne može se dati opće pravilo za integriranje neke elementarne funkcije; tehnika integriranja stiče se pokusima. U idućim paragrafima sistematski su razmotreni načini integriranja jednostavnijih vrsti elementarnih funkcija; na str. 426 do 473 su tablice integrala u kojima možemo potražiti zadani integral ili onaj blizak zadanom.

Od općih postupaka koji se najčešće primjenjuje pri integriranju možemo navesti ove:

1) Algebarskim ili trigonometrijskim pretvorbama izražavamo podintegralnu funkciju kao sumu nekoliko funkcija, te rastavljamo integral na sumu integrala.

Primjeri:

$$\int (x+3)^2(x^2+1)\,dx = \int (x^4+6x^3+10x^2+6x+9)\,dx = \frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+\frac{10}{3}x^3+3x^2+9x+C.$$

$$\int \sin 2x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C.$$

2) Ako je poznat (na primjer iz tablica) $\int f(x)\,dx = F(x)$, tada je:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+C, \qquad \int f(x+b)\,dx = F(x+b)+C,$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Primjeri: $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax+C,$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C, \qquad \int \frac{dx}{1+(x+a)^2} = \operatorname{arc\,tg}(x+a)+C.$$

3) Ako je podintegralni izraz razlomak, kojemu je brojnik diferencijal nazivnika, tada je integral jednak logaritmu nazivnika:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x)+C^*.$$

Primjer: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5}\,dx = \ln(x^2+3x-5)+C.$

* Vidi napomenu na prethodnoj stranici.

3. INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJA

Integrali racionalnih funkcija uvijek se mogu izraziti elementarnim funkcijama.

Opća pravila. *Cijela racionalna funkcija* (*polinom*) integrira se neposredno:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C.$$

Razlomljena racionalna funkcija $\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ [gdje su $Q(x)$ i $P(x)$ dva polinoma m-tog i n-tog stupnja] algebarski se pretvara u oblik koji je podesan za integraciju ovako:

1) Skratimo razlomak, tako da polinomi $Q(x)$ i $P(x)$ više nemaju zajedničkih faktora.

2) Ako je $m \geqslant n$, tada dijeljenjem $Q(x)$ sa $P(x)$ dobivamo cijeli dio razlomka (vidi str. 168), koji se integrira kao polinom, pa ostaje za integriranje još ostatak koji je pravi razlomak sa $m < n$.

3) Nazivnik $P(x)$ rastavljamo u linearne i kvadratne faktore (vidi str. 183):

$$P(x) = a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^r(x^2+p'x+q')^s \ldots,$$

gdje je:

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \frac{p'^2}{4} - q' < 0, \ldots$$

4) Koeficijent a_0 u nazivniku stavljamo pred integral.

5) Kraćenjem dobiveni pravi razlomak kojemu je nazivnik rastavljen na proste faktore, pretvaramo u sumu parcijalnih razlomaka (vidi str. 169), koje lako integriramo. Pri tome mogu nastupiti četiri slučaja:

1) Svi su korijeni nazivnika *realni* i *jednostruki*:

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Rastav je oblika: $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda},$

gdje je:

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \quad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \quad \ldots, \quad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)}\,*.$$

* Brojevi $A, B, C, \ldots, L$ mogu se odrediti i metodom neodređenih koeficijenata (vidi na str. 170).

Integrira se po formuli

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\ln(x-\alpha) \text{ itd.}$$

Primjer: $I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$; $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$;

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=0} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=1} = \frac{5}{3}, \quad C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + \ln C_1 = \ln\frac{C_1(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}.$$

2) Svi su korijeni nazivnika *realni*; između njih ima *višestrukih:*

$$P(x) = (x-\alpha)^l(x-\beta)^m \ldots$$

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \ldots$$

Konstante $A_1, A_2, \ldots, A_l, B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ izračunavamo metodom neodređenih koeficijenata (vidi str. 170); integriramo po formulama:

$$\int \frac{A_1\,dx}{x-\alpha} = A_1\ln(x-\alpha), \quad \int \frac{A_k\,dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \quad (k>1).$$

Primjer:

$$I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx; \quad \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje jednadžbe:

$$A + B_1 = 1, \qquad -3A - 2B_1 + B_2 = 0, \qquad 3A + B_1 - B_2 + B_3 = 0,$$

$-A=1$, odakle dobivamo:

$$A=-1,\quad B_1=2,\quad B_2=1,\quad B_3=2;$$

$$I=\int\left[-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right]dx=$$

$$=-\ln x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C=$$

$$=\ln\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{x}{(x-1)^2}+C.$$

3) Među korijenima nazivnika ima *jednostrukih kompleksnih korijena:*

$$P(x)=(x-\alpha)^l(x-\beta)^m\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\ldots,$$

pri čemu je $\frac{p^2}{4}<q$, $\frac{p'^2}{4}<q'$, ...

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-\alpha)^l}+$$

$$+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-\beta)^m}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+\frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'}+\ldots$$

Konstante se izračunavaju po metodi neodređenih koeficijenata (vidi str. 170).

Izraze integriramo $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ po formuli:

$$\int\frac{(Cx+D)\,dx}{x^2+px+q}=\frac{C}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{D-\frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Primjer:

$$I=\int\frac{4\,dx}{x^3+4x};\quad \frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje jednadžbe:

$$A+C=0,\quad D=0,\quad 4A=4,$$

odakle je:

$$A=1,\qquad C=-1,\qquad D=0;$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\ln C_1=\ln\frac{C_1x}{\sqrt{x^2+4}}$$

(u danom slučaju nema člana s arkus-tangensom).

4) Nazivnik ima *višestrukih kompleksnih korijena:*

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n\ldots$$

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+$$

$$+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}+$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2}+\ldots+\frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n}+\ldots$$

Konstante ćemo izračunati po metodi neodređenih koeficijenata (vidi str. 170).

Izraze integriramo $\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$ ovako: Pišemo brojnik u obliku:

$$C_mx+D_m=\frac{C_m}{2}(2x+p)+\left(D_m-\frac{C_mp}{2}\right).$$

Traženi integral raspada se na dva sumanda. Prvi od njih integriramo neposredno:

$$\int\frac{C_m}{2}\frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^m}=-\frac{C_m}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

a drugi (bez koeficijenta) po formuli za sniženje stupnja:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}=\frac{x+\frac{p}{2}}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}}+$$

$$+\frac{2m-3}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}.\quad(*)$$

Primjer:

$$I=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx;$$

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje sistem jednadžbi:

$$A+C_1=0,\quad -2C_1+D_1=0,\quad 2A+C_1-2D_1+C_2=2,$$
$$-2C_1+D_1-2C_2+D_2=2,\quad A-2D_1-2D_2=13,$$

odakle je:

$$A=1,\ C_1=-1,\quad D_1=-2,\quad C_2=-3,\quad D_2=-4$$

i:
$$I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right)dx=\ln(x-2)-$$
$$-\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arc\,tg}x\right]-\left[-\frac{3}{2(x^2+1)}+\int\frac{4dx}{(x^2+1)^2}\right].$$

Prema formuli (*) je:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x,$$

odakle konačno dobivamo:

$$I=\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

Odvajanje racionalnog dijela integrala (*metoda Ostrogradskog*) Integral razlomljene racionalne funkcije elementarna je funkcija, koja je suma *racionalnog dijela* (tj. nekog algebarskog razlomka) i *transcendentnog dijela* (koji sadrži logaritme i arkus-tangense). Pri tome se racionalni dio pojavljuje u drugom i četvrtom razmatranom slučaju, tj. samo tada, kad nazivnik podintegralne funkcije ima višestrukih korijena (realne ili kompleksne). Racionalni dio možemo odrediti pomoću *metode Ostrogradskog* bez integriranja i svesti integriranje na slučajeve u kojima nazivnik ima samo jednostavne korijene. Način se sastoji u ovom:

Nazivnik $P(x)$ podintegralne funkcije $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (pravog razlomka koji se ne da više kratiti, vidi str. 413) ima oblik:

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n\ldots$$

Njega možemo rastaviti na dva faktora $P_1(x)$ i $P_2(x)$, gdje je $P_2(x)$ produkt svih faktora koji se javljaju u $P(x)$ uzetih jednostruko:

$$P_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\ldots,$$

i zbog toga:

$$P_1(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x^2+px+q)^{m-1}(x^2+p'x+q')^{n-1}\ldots*$$

Dani integral možemo predočiti u obliku:

$$\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx=\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}+\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}dx \qquad (A)$$

(*formula Ostrogradskog*), gdje su $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ poznati polinomi stupnjeva r, s i t, zatim $Q(x)$, poznat polinom stupnja ne višeg od $r-1$, a $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ poznati polinomi stupnja ne višeg od $s-1$, odnosno $t-1$:

$$Q_1(x)=ax^{s-1}+bx^{s-2}+\ldots+d,\quad Q_2(x)=ex^{t-1}+fx^{t-2}+\ldots+h.$$

Diferenciranje izraza (A) daje:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\left[\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right]'+\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}. \qquad (B)$$

Nepoznati koeficijenti polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ određuju se iz jednadžbe (B) pomoću metode neodređenih koeficijenata.

Ako znamo polinome $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, svodimo integraciju danog integrala na integral $\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}dx$, u kojemu nazivnik podintegralne funkcije nema višestrukih korijena.

---

* Pri određivanju polinoma $P_1(x)$ i $P_2(x)$ nema teškoća ako znamo rastaviti $P(x)$ na faktore, tj. ako su određeni svi korijeni jednadžbe $P(x)=0$. Ali $P_1(x)$ i $P_2(x)$ možemo odrediti i da ne rješavamo jednadžbe: za to je dovoljno diferencirati polinom $P(x)$ i naći najveću zajedničku mjeru polinoma $P(x)$ i $P'(x)$ (vidi str. 167). Najveća zajednička mjera je $P_1(x)$, a $P_2(x)=\frac{P(x)}{P_1(x)}$.

Primjer: $\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

Ovdje je $P_1 = P_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$, $P = (x^3+x^2+x+1)^2$, $Q = x^4+x^3+4x^2+3x+2$, $Q_1 = ax^2+bx+c$, $Q_2 = ex^2+fx+g$.

Formula (B) daje:

$$\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right] + \frac{ex^2+fx+g}{x^3+x^2+x+1},$$

odakle je:

$$x^4+x^3+4x^2+3x+2 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) - (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (ex^2+fx+g)(x^3+x^2+x+1).$$

Izjednačenjem koeficijenata jednako visokih potencija od x u oba dijela dobivamo sistem jednadžbi: za a, b, c, d, e, f, g: 1) $e = 0$, 2) $-a+f = 1$, 3) $-2b+f+g = 1$, 4) $a-b-3c+f+g = 4$, 5) $2a-2c+f+g = 3$, 6) $b-c+g = 2$ [u jednadžbama 2) do 6) koeficijent $e = 0$ je izostavljen]; odatle dobivamo $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = -1$, $e = 0$, $f = \frac{3}{4}$, $g = \frac{3}{4}$.

Prema tome je:

$$\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^3+1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + \frac{3}{4}\int \frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Posljednji integral jednak je arc tg x.

Tablice integrala racionalnih funkcija vidi na str. 426 do 435.

4. INTEGRIRANJE IRACIONALNIH FUNKCIJA

Integriranje iracionalnih funkcija ne daje uvijek elementarne funkcije. U jednostavnim slučajevima integrali iracionalnih funkcija mogu se svesti na integrale racionalnih funkcija pomoću ovih supstitucija:

Integral*	Supstitucija
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \ldots\right)dx$	$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$, gdje je r najmanji zajednički višekratnik brojeva $n, m, \ldots$
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	Jedna od triju Eulerovih supstitucija:
1) ako je $a > 0$**	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$
2) ako je $c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
3) ako trinom ax^2+bx+c ima različite realne korijene:	
$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

Integral $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ može biti sveden i na jedan od ova tri oblika:

$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$,

budući da kvadratni trinom ax^2+bx+c uvijek može biti predočen u obliku sume ili razlike dvaju kvadrata.

Primjeri:

1) $4x^2+16x+17 = 4\left(x^2+4x+4+\frac{1}{4}\right) = 4\left[(x+2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4\left[x_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$, gdje je $x_1 = x+2$;

2) $x^2+3x+1 = x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x_1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$, gdje je $x_1 = x+\frac{3}{2}$;

* Simbol R označuje racionalnu funkciju izraza na koje se odnosi. Brojevi $n, m, \ldots$ su cijeli.

** Ako je $a < 0$ i trinom ax^2+bx+c ima kompleksne korijene, tada podintegralna funkcija ne postoji ni za koju vrijednost x, jer je $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kompleksan broj za sve realne vrijednosti od x. Integriranje nas u tom slučaju ne zanima.

3) $-x^2+2x=1-x^2+2x-1=1^2-(x-1)^2=1^2-x_1^2$, gdje je $x_1=x-1$.

Ti se integrali računaju pomoću supstitucija:

Integral	Supstitucija
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}\right)dx$	$x=\alpha \operatorname{sh} t$ ili $x=\alpha \operatorname{tg} t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-\alpha^2}\right)dx$	$x=\alpha \operatorname{ch} t$ ili $x=\alpha \operatorname{sc} t$
$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2-x^2}\right)dx$	$x=\alpha \sin t$ ili $x=\alpha \cos t$

Navedene supstitucije dovode do integrala racionalnih izraza, koji sadrže trigonometrijske ili hiperbolne funkcije (vidi str. 422 ili 425).

Integriranje binomnih diferencijala. *Binomnim diferencijalom* nazivamo izraz:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

u kojem su a, b po volji uzeti realni brojevi, a m, n, p po volji uzeti racionalni brojevi (pozitivni ili negativni).

Teorem Čebiševa. Integral:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (*)$$

može biti izražen elementarnim funkcijama samo u ova tri slučaja:

1) p je *cio broj*. Izraz $(a+bx^n)^p$ razvit ćemo po Newtonovoj binomnoj formuli (vidi str. 210), a podintegralna funkcija nakon rješenja zagrada je suma članova oblika cx^k, koje lako integriramo.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ je *cio broj*. Integral (*) svodimo na integral racionalne funkcije supstitucijom $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$, gdje je r nazivnik razlomka p.

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ je *cio broj*. Integral (*) svodimo na integral racionalne funkcije supstitucijom $t=\sqrt[r]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, gdje je r nazivnik razlomka p.

Primjeri:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx;$

$m=-\dfrac{1}{2}, \quad n=\dfrac{1}{4}, \quad p=\dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{m+1}{n}=2$ (slučaj 2).

Supstitucija: $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=12\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}=\int x^3(1+x^3)^{-1/4}\,dx;$

$m=3, \quad n=3, \quad p=-\dfrac{1}{4}; \quad \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{13}{12};$

niti jedan od uvjeta 1), 2) i 3) nije ispunjen, tako da integral nije elementarna funkcija.

Eliptički integrali. Integrali oblika:

$$\left.\begin{array}{r}\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx\\ \int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx\end{array}\right\}\ (A)$$

i

u pravilu se ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija. U slučajevima kada ti integrali nisu elementarne funkcije, oni se nazivaju *eliptičkim**.

Integrali tipova (A), koji se ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija, mogu se izvjesnim pretvorbama svesti na elementarne funkcije i integrale ovih triju tipova:

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \int\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\\ \displaystyle\int\frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\end{array}\right\}\ (0<k<1).\quad (B)$$

* U slučajevima kada se integrali (A) mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija, nazivaju se pseudoeliptičkim.

Supstitucijom $t = \sin\varphi$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ integrali (B) mogu biti svedeni na *Legendrov oblik:*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad (\textit{eliptički integral prve vrste}),$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad (\textit{eliptički integral druge vrste}),$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad (\textit{eliptički integral treće vrste}).$$

Pripadne određene integrale s donjom granicom nula označujemo ovim simbolima:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k,\varphi), \quad \text{II)}\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = E(k,\varphi). \\ &\text{III)}\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \Pi(h,k,\varphi) \end{aligned}\right\} (k < 1).$$

Ti se integrali nazivaju *nepotpunim eliptičkim integralima* 1, 2 i 3-ćeg reda. Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ integrale I i II nazivamo *potpunim eliptičkim integralima* i označujemo ih sa:

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi.$$

Tablicu vrijednosti nepotpunih i potpunih eliptičkih integrala 1 i 2 vrste vidi na str. 94 do 96.

Tablice integrala iracionalnih funkcija vidi na str. 436 do 451.

5. INTEGRIRANJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Integral oblika: $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$* (A)

uvijek možemo svesti na integral racionalne funkcije s dalje navedenom »univerzalnom supstitucijom«, a u posebnim slučajevima i jednostavnijim postupcima.

* Simbol R označuje racionalnu funkciju izrazâ na koje se odnosi.

Univerzalna supstitucija za integral (A)

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \text{ odakle je } dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Na primjer:

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x\,(1 + \cos x)}\, dx = \int \frac{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Ako se u podintegralnoj funkciji integrala (A), $\sin x$ i $\cos x$ nalaze samo u parnim potencijama, integral se jednostavnije svodi na integral racionalne funkcije supstitucijom $t = \operatorname{tg} x$.

Pojednostavnjene metode za slučajeve koje često susrećemo:

1) $\int R(\sin x)\cos x\, dx$. Supstitucija $t = \sin x$, $\cos x\, dx = dt$.

2) $\int R(\cos x)\sin x\, dx$. Supstitucija $t = \cos x$, $\sin x\, dx = -dt$.

3) $\int \sin^n x\, dx$.

Ako je n neparan ($n = 2m + 1$), tada je:

$$\int \sin^n x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^m \sin x\, dx = -\int (1 - t^2)^m dt, \text{ gdje je } t = \cos x.$$

Ako je n paran ($n = 2m$), tada je:

$$\int \sin^n x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx = \frac{1}{2^{m+1}}\int (1 - \cos t)^m\, dt,$$

gdje je $t = 2x$.

Eksponent potencije snizuje se na polovicu; rješivši zagrade izraza $(1 - \cos t)^m$, integriramo svaki član (vidi slučaj 4).

4) $\int \cos^n x\,dx$.

Ako je n neparan ($n = 2m + 1$), tada je:

$\int \cos^n x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^m \cos x\,dx = \int (1 - t^2)^m dt$, gdje je $t = \sin x$.

Ako je n paran ($n = 2m$), tada je:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1 + \cos t)^m\,dt,$$

gdje je $t = 2x$.

Eksponent potencije snizuje se na polovicu; riješivši zagrade, integriramo svaki član.

5) $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ svodi se na slučaj 1) ili 2), ako je jedan od brojeva m ili n neparan.

Primjeri: $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx =$

$= \int t^2 (1 - t^2)^2\,dt$, gdje je $t = \sin x$; $\quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$,

gdje je $t = \cos x$.

Ako su oba broja m i n parna, tada eksponenti mogu biti sniženi na polovicu, analogno slučajevima 3) i 4). Pri tome primjenjujemo formule:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Primjer: $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

6) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\,dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x\ d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \text{ itd.}$$

Ponavljanjem toga postupka integral svedemo uz parni n na integral $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x\,dx$.

7) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$ integrira se analogno slučaju 6).

Tablice integrala trigonometrijskih funkcija vidi na str. 451 do 465.

6. INTEGRIRANJE DRUGIH TRANSCENDENTNIH FUNKCIJA

Eksponencijalne funkcije. Integrale tipa:

$$\int R(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px})\,dx,$$

gdje su $m, n, \ldots, p$ racionalni brojevi, svodimo supstitucijom $t = e^x$ na integral $\int \frac{1}{t} R(t^m, t^n, \ldots, t^p)\,dt$; posljednji integral svodi se na integral racionalne funkcije (vidi str. 412) uvođenjem supstitucije $z = \sqrt[r]{t}$, gdje je r najmanji zajednički višekratnik nazivnika razlomaka $m, n, \ldots, p$.

Hiperbolne funkcije. Integrale koji sadrže $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, obično računamo zamjenjujući hiperbolne funkcije s eksponencijalnim (str. 245 i 246). Slučajeve $\int \operatorname{sh}^n x\,dx$, $\int \operatorname{ch}^n x\,dx$, $\int \operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x\,dx$ koji su najčešći, integriramo analogno kao dotične integrale s trigonometrijskim funkcijama (str. 422 do 424).

Primjena parcijalne integracije. Funkcije koje sadrže logaritme, ciklometrijske funkcije i area-funkcije, produkte x^m sa $\ln x$, e^{ax} sa $\sin ax$ ili $\cos ax$ integriraju se uglavnom primjenom (jednostrukom ili višestrukom) formula za parcijalno integriranje (str. 409). U nekim slučajevima primjena višestruke parcijalne integracije dovodi do početnog integrala, pa se tada računanje tog integrala svodi na rješenje algebarske jednadžbe: tako se računaju na primjer integrali $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$ (kod tih integrala provodi se dvostruka parcijalna integracija, pri čemu treba kao faktor u oba slučaja uzeti istu funkciju, eksponencijalnu ili trigonometrijsku).

U slučajevima $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$, $\int P(x) \sin bx\,dx$, $\int P(x) \cos bx\,dx$, gdje je $P(x)$ polinom, također primjenjujemo formulu parcijalne integracije.

Tablice integrala transcendentnih funkcija vidi na str. 465 do 473.

7. TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA

Opće upute

1. Konstanta integracije je izostavljena svugdje, osim u slučajevima kada integral može biti predočen u različitim oblicima, s različitim konstantama.

2. U svim formulama u kojima je u sastavu primitivne funkcije izraz koji sadrži $\ln f(x)$, treba ga razumjeti kao $\ln |f(x)|$; oznaka za apsolutnu vrijednost svuda je zbog jednostavnosti izostavljena.

3. U slučajevima, u kojima je primitivna funkcija izražena u obliku reda potencije, nije moguće izraziti je elementarnim funkcijama.

Integrali racionalnih funkcija

Integrali sa $ax + b$

Oznaka: $X = ax + b$

1) $\int X^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ $(n \neq -1$; za $n = -1$, v. br. 2).

2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X.$

3) $\int xX^n \, dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$

$(n \neq -1, \neq -2$; pri $n = -1, = -2$, v. br. 5 i 6).

4) $\int x^m X^n dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n \, dX$ [primjenjuje se za $m < n$ ili kada je m cio broj, a n razlomak; u tim slučajevima $(X-b)^m$ razvijemo prema binomnoj formuli, str. 210]. $(n \neq -1, \neq -2, \ldots, \ldots, \neq -m)$.

5) $\int \frac{x \, dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X.$

6) $\int \frac{x \, dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X.$

7) $\int \frac{x \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2} \right).$

8) $\int \frac{x \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2) X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1) X^{n-1}} \right)$ $(n \neq 1, \neq 2).$

9) $\int \frac{x^2 \, dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right).$

10) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X} \right).$

11) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right).$

12) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{-1}{(n-3) X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2) X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1) X^{n-1}} \right]$

$(n \neq 1, \neq 2, \neq 3).$

13) $\int \frac{x^3 \, dx}{X} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2 X - b^3 \ln X \right).$

14) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^2} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X} \right).$

15) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^4} \left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2} \right).$

16) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^4} = \frac{1}{a^4} \left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3} \right).$

17) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{-1}{(n-4) X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3) X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2) X^{n-2}} + \right.$

$\left. + \frac{b^3}{(n-1) X^{n-1}} \right]$ $(n \neq 1, n \neq 2, n \neq 3, n \neq 4).$

18) $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}.$

19) $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{ax}{X} \right).$

20) $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2 x^2}{2X^2} \right).$

21) $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n} \left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i} \frac{(-a)^i x^i}{iX^i} \right]$ $(n \geqslant 1).$

22) $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}.$

23) $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -a \left[\frac{1}{b^2 X} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x} \right].$

24) $\int \frac{dx}{x^2 X^3} = -a \left[\frac{1}{2b^2 X^2} + \frac{2}{b^3 X} + \frac{1}{ab^3 x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x} \right].$

25) $\int \frac{dx}{x^2 X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}} \left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1) X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln \frac{X}{x} \right]$ $(n \geqslant 2).$

26) $\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{b^3} \left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2} \right].$

$X = ax + b$

27) $\int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2 \ln\frac{X}{x} + \frac{a^3 x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right].$

28) $\int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2 \ln\frac{X}{x} + \frac{4a^3 x}{X} - \frac{a^4 x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right].$

29) $\int \frac{dx}{x^3 X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^{i} \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2) X^{i-2}} + \frac{a^2 X^2}{2x^2} - \frac{(n+1) aX}{x} + \frac{n(n+1) a^2}{2} \ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geqslant 3).$

30) $\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^{i} \frac{X^{m-i-1} (-a)^i}{(m-i-1) x^{m-i-1}}$

[ako je nazivnik člana pod znakom Σ nula, takav član zamjenjujemo s ovim:

$$C_{m+n-2}^{n-1} (-a)^{m-1} \ln\frac{X}{x}\Big].$$

Oznaka: $\Delta = bf - ag$

31) $\int \frac{ax+b}{fx+g} dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2} \ln(fx+g).$

32) $\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \ln\frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$

33) $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{g}{f} \ln(fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0).$

34) $\int \frac{dx}{(ax+b)^2 (fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0).$

35) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

36) $\int \frac{x^2 dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln(a+x) + \frac{b^2 - 2ab}{(b-a)^2} \ln(b+x) \quad (a \neq b).$

37) $\int \frac{dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

38) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

39) $\int \frac{x^2 dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$

Integrali sa $ax^2 + bx + c$

Oznake: $X = ax^2 + bx + c, \qquad \Delta = 4ac - b^2$

40) $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad (\text{za } \Delta > 0).$

$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{Ar\,th}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{za } \Delta < 0).$

41) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

42) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

43) $\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}.$

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2$$

44) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln X - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

45) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

46) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}$.

47) $\int \frac{x^2dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

48) $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

49) $\int \frac{x^2dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a}\int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a}\int \frac{x\,dx}{X^n}$

(vidi br. 43 i 46).

50) $\int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} +$

$$+ \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}dx}{X^n}$$

($m \neq 2n-1$; za $m = 2n-1$ vidi br. 51).

51) $\int \frac{x^{2n-1}dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}dx}{X^n}$.

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

55) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} -$

$$- \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n} \quad (m > 1).$$

56) $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2 - gbf + g^2a)}\left[f\ln\frac{(fx+g)^2}{X}\right] + \frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\int \frac{dx}{X}$ (v. br. 40).

Integrali sa $a^2 \pm x^2$

Oznake:

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \text{arc tg}\,\frac{x}{a} \text{ za predznak »+«,} \\ \text{Ar th}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x} \\ \text{za predznak »—« pri } |x| < a, \\ \text{Ar cth}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a} \\ \text{za predznak »—« pri } |x| > a. \end{cases}$$

U slučaju dvostrukog predznaka u formuli, gornji predznak se odnosi na $X = a^2 + x^2$, a donji na $X = a^2 - x^2$.

57) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}Y$.

58) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3}Y$.

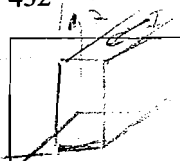
59) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5}Y$.

60) $\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{X^n}$.

61) $\int \frac{x\,dx}{X} = \pm\frac{1}{2}\ln X$.

62) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \mp\frac{1}{2X}$.

63) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \mp\frac{1}{4X^2}$.



$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \text{arc tg } \dfrac{x}{a} & \text{za predznak »+«} \\ \text{Ar th } \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+x}{a-x} & \text{za predznak »—« pri } |x| < a, \\ \text{Ar cth } \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+a}{x-a} & \text{za predznak »—« pri } |x| > a. \end{cases}$$

64) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{1}{2nX^n}$ $(n \neq 0)$.

65) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{X} = \pm x \mp aY.$

66) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{X^2} = \mp\frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a}Y.$

67) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{X^3} = \mp\frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3}Y.$

68) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int\frac{dx}{X^n}$ $(n \neq 0)$.

69) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X.$

70) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X.$

71) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^3}{4X^2}.$

72) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $(n > 1)$.

73) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}.$

74) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

75) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

76) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y.$

77) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y.$

78) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y.$

79) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

80) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

81) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}.$

82) $\displaystyle\int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \mp \frac{b}{a}Y\right].$

Integrali sa $a^3 \pm x^3$

Oznaka: $a^3 \pm x^3 = X$; ako je u formuli dvostruki predznak, gornji predznak se odnosi na $X = a^3 + x^3$, a donji na $X = a^3 - x^3$.

83) $\displaystyle\int \frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

84) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int\frac{dx}{X}$ (v. br. 83).

85) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

86) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (v. br. 85). $\boxed{X = a^3 \pm x^3}$

87) $\int \frac{x^2dx}{X} = \pm \frac{1}{3}\ln X.$

88) $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}.$

89) $\int \frac{x^3dx}{X} = \pm x \mp a^3\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

90) $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3}\ln \frac{x^3}{X}.$

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6}\ln \frac{x^3}{X}.$

93) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (vidi br. 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{X}$ (vidi br. 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

Integrali sa $a^4 + x^4$

97) $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax\sqrt{2}}{a-x^2}.$

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2}.$

99) $\int \frac{x^2dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

100) $\int \frac{x^3dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4}\ln(a^4+x^4).$

Integrali sa $a^4 - x^4$

101) $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$

102) $\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

103) $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\ln \frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$

104) $\int \frac{x^3dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4}\ln(a^4-x^4).$

Neki slučajevi rastavljanja na parcijalne razlomke

105) $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right).$

106) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c},$

gdje je $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$, $B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$,

$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$

107) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d},$ gdje je $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$,

$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$ itd.

108) $\frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\cdot\left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2}\right).$

Integrali iracionalnih funkcija

Integrali sa $\sqrt{x}$ i $a^2 \pm b^2x$

Oznake: $X = a^2 \pm b^2x$, $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b\sqrt{x}}{a} & \text{za predznak »+«,} \\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}} & \text{za predznak »—«.} \end{cases}$

Ako je u formuli dvostruki predznak, gornji se predznak odnosi na $X = a^2 + b^2x$ a donji na $X = a^2 - b^2x$.

109) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm\frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3}Y.$

110) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5}Y.$

111) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp\frac{\sqrt{x}}{b^2X} \pm \frac{1}{ab^3}Y.$

112) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm\frac{2\sqrt{x^3}}{b^2X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X} - \frac{3a}{b^5}Y.$

113) $\displaystyle\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab}Y.$

114) $\displaystyle\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3}Y.$

115) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^3b}Y.$

116) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5}Y.$

Drugi integrali sa $\sqrt{x}$

117) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

118) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

119) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

120) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^4-x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

Integrali sa $\sqrt{ax+b}$

Oznaka: $X = ax + b$

121) $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{X^3}.$

122) $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$

123) $\displaystyle\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$

124) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$

125) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$

126) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$

127) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{Ar\,th}\sqrt{\dfrac{X}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\dfrac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}} & \text{za } b > 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{X}{-b}} & \text{za } b < 0. \end{cases}$

128) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = 2\sqrt{X} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

$X = ax + b$

129) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}$.

132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{x^5}}{5a}$.

133) $\int x\sqrt{X^3}dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5})$.

134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right)$.

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 127).

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right)$.

137) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right)$.

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 127).

140) $\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}$.

141) $\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right)$.

142) $\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right)$.

143) $\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int \frac{X^{(n-2)/2}}{x}\,dx$.

144) $\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}$.

145) $\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}$.

Integrali sa $\sqrt{ax+b}$ i $\sqrt{fx+g}$

Oznake: $X = ax + b$, $Y = fx + g$, $\Delta = bf - ag$

146) $\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{fX}{aY}} & \text{za } af<0, \\ \frac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{Ar\,th}\sqrt{\frac{fX}{aY}} = & \\ \quad = \frac{2}{\sqrt{af}}\ln\left(\sqrt{aY} + \sqrt{fY}\right) & \text{za } af>0. \end{cases}$

147) $\int \frac{xdx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (vidi br. 146).

148) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}$.

149) $\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{za } \Delta f<0, \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\frac{f\sqrt{X}-\sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X}+\sqrt{\Delta f}} & \text{za } \Delta f>0. \end{cases}$

150) $\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta+2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (v. br. 146).

151) $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (vidi br. 146).

$X = ax + b, \quad Y = fx + g, \quad \Delta = bf - ag$

152) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (vidi br. 149).

153) $\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)\,a}\left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right)$.

154) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\,\Delta}\left\{\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n-\frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right\}$.

155) $\int \sqrt{X}\,Y^n\,dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}\,Y^{n+1} + \Delta\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}}\right)$ (vidi br. 153).

156) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right)$.

Integrali sa $\sqrt{a^2 - x^2}$

Oznaka: $X = a^2 - x^2$

157) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

158) $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}$.

159) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

160) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}$.

161) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

162) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}$.

163) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}$.

165) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}$.

166) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

167) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}$.

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}$.

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

171) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)$.

172) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}$.

173) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}$.

174) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}$.

175) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

176) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

177) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

$X = a^2 - x^2$

178) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

179) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}.$

181) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

183) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

184) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Integrali sa $\sqrt{x^2+a^2}$

Oznaka: $X = x^2 + a^2$

185) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$
$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$

186) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

187) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$
$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$

188) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$

189) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

190) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$
$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

191) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

192) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

193) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

194) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$
$= \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

195) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

196) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

197) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$

198) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

199) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{a}\right) + C =$
$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$

200) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

$X = x^2 + a^2$

201) $\int x^2 \sqrt{X^3}\,dx =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2 x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2 x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

202) $\int x^3 \sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

203) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

204) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

205) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right).$

206) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

207) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$

208) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

209) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

210) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

211) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

212) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Integrali sa $\sqrt{x^2 - a^2}$

Oznaka: $X = x^2 - a^2$

213) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{2}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

214) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

215) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

216) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$

217) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = \sqrt{X} - a\arccos\frac{a}{x}.$

218) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

219) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$

220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

222) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

223) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$

$X = x^2 - a^2$

224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{x}.$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right] + C_1.$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

231) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3 \arccos \frac{a}{x}.$

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2 \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a \arccos \frac{a}{x}.$

234) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

235) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$

236) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$

237) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

238) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \arccos \frac{a}{x}.$

239) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

240) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \arccos \frac{a}{x}.$

Integrali sa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Oznake: $X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$

241) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(2\sqrt{aX} + 2ax + b\right) + C & \text{za } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar\,sh} \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{za } a > 0,\ \Delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax + b) & \text{za } a > 0,\ \Delta = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{za } a < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$

242) $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{\Delta\sqrt{X}}.$

243) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right).$

244) $\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax + b)}{(2n - 1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n - 1)}{2n - 1} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$

$$X = ax^2 - bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$$

245) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

246) $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

247) $\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

248) $\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)\,X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx.$

249) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

250) $\int \frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$

251) $\int \frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)\,aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (v. br. 244).

252) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

253) $\int \frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)\,x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

254) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (v. br. 241).

255) $\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (v. br. 246).

256) $\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)\,a} - \frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (v. br. 248).

257) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{X}\,dx$ (v. br. 245).

258) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b\right) + C & \text{za } c > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{Arsh}\frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{za } c > 0,\ \Delta > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{bx+2c}{x} & \text{za } c > 0,\ \Delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{za } c < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$

259) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 258).

260) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 241 i 258).

261) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 241 i 258).

262) $\int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}\,dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx + c\int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x}\,dx$ (v. br. 248 i 260).

$$X = ax^2 - bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$$

263) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}.$$

264) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$$

265) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

266) $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

267) $$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} \quad (ag-bf>0),$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}} \quad (ag-bf<0).$$

Integrali s iracionalnim izrazima drugog oblika

268) $$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}.$$

269) $$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$$

270) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$$

271) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

272) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Rekurzijske formule za binomne integrale

273) $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx =$$

$$= \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{a(m+pn+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

Integrali trigonometrijskih funkcija*

Integrali sa sinusom

274) $$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

275) $$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

276) $$\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$$

277) $$\int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$$

278) $$\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx \quad (n \text{ cio}, >0).$$

279) $$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$$

* Integrale funkcija koje sadrže sin x i cos x u vezi s hiperbolnim funkcijama i sa e^{ax}, vidi na str. 466 do 468.

280) $\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$

281) $\int x^3 \sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$

282) $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \quad (n > 0).$

283) $\int \frac{\sin ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \ldots$*.

284) $\int \frac{\sin ax}{x^2}dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax}{x}dx$ (v. br. 322).

285) $\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$

(v. br. 324).

286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \operatorname{ctg} ax).$

287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$

$(n > 1).$

---

* Određeni integral $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ nazivamo *integralni sinus* i označavamo sa Si (x): $\operatorname{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$

290) $\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left[ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \right.$

$\left. + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n (ax)^{2n+1} + \ldots\right]$*.

291) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln \sin ax.$

292) $\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)a\sin^{n-1} ax} -$

$-\frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 2).$

293) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

294) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

295) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

296) $\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

297) $\int \frac{\sin ax\,dx}{1\pm\sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right).$

298) $\int \frac{dx}{\sin ax(1\pm\sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

299) $\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

300) $\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

301) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

---

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 364 i 365).

302) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$$

303) $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax-1}{\sin^2 ax+1}\right).$$

304) $$\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$$

305) $$\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$
$(|a| \neq |b|$; za $|a| = |b|$ v. br. 275).

306) $$\int \frac{dx}{b+c\sin ax} =$$
$$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2 + c}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (\text{za } b^2>c^2),$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2 + c - \sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2 + c + \sqrt{c^2-b^2}} \quad (\text{za } b^2<c^2).$$

307) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$$ (v. br. 306).

308) $$\int \frac{dx}{\sin ax\,(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$$
(v. br. 306).

309) $$\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} +$$
$$+ \frac{b}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$$ (v. br. 306).

310) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} +$$
$$+ \frac{c}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$$ (v. br. 306).

311) $$\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$$
$(b>0)$.

312) $$\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} =$$
$$= \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b} \quad (b^2>c^2,\ b>0),$$
$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax - b} \quad (c^2>b^2,\ b>0).$$

Integrali sa kosinusom

313) $$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$$

314) $$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

315) $$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$$

316) $$\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$$

317) $$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$$

318) $$\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$$

319) $$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$$

320) $$\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$$

321) $$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$$

322) $\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \ldots$*

323) $\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax\,dx}{x}$ (v. br. 283).

324) $\int \frac{\cos ax}{x^n}\,dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax\,dx}{x^{n-1}}$

$(n \neq 1)$ (v. br. 285).

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\,dx =$

$= \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax).$

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$

327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1).$

329) $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5\,(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61\,(ax)^8}{8\cdot 6!} + \right.$

$\left. + \frac{1385\,(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \ldots + \frac{E_n\,(ax)^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n!)} + \ldots\right]$**.

330) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax.$

---

* Određeni integral $\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ nazivamo *integralni kosinus* i označavamo sa $\operatorname{Ci} x$;

$$\operatorname{Ci} x = C - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots,$$

gdje je C Eulerova konstanta (vidi str. 341).

** E_n su Eulerovi brojevi (vidi str. 365).

331) $\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)\,a\cos^{n-1} ax}$

$- \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 2).$

332) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

333) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

334) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}.$

335) $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2}.$

336) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

337) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

338) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

339) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

340) $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

341) $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

342) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

343) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

344) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right).$

345) $\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

346) $\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}$

($|a| \neq |b|$; za $|a| = |b|$ v. br. 314).

347) $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} =$

$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(b-c)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$ (za $b^2 > c^2$),

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \sqrt{c^2-b^2}}$ (za $b^2 < c^2$).

348) $\int \frac{\cos ax \, dx}{b + c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (v. br. 347).

349) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(b + c\cos ax)} =$

$= \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (v. br. 347).

350) $\int \frac{dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b + c\cos ax)} -$

$- \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (v. br. 347).

351) $\int \frac{\cos ax \, dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b + c\cos ax)} -$

$- \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (v. br. 347).

352) $\int \frac{dx}{b^2 + c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}$ ($b > 0$).

353) $\int \frac{dx}{b^2 - c^2\cos^2 ax} =$

$= \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}$ ($b^2 > c^2$, $b > 0$),

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{b\operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2-b^2}}$ ($c^2 > b^2$, $b > 0$).

Integrali sa sinusom i kosinusom

354) $\int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$

355) $\int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$

356) $\int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax$ ($n \neq -1$).

357) $\int \sin ax \cos^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax$ ($n \neq -1$).

358) $\int \sin^n ax \cos^m ax \, dx =$

$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax \, dx$

(sniženje eksponenta n; m i $n > 0$),

$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx$

(sniženje eksponenta m; m i $n > 0$).

359) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg} ax.$

360) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{\sin ax}\right].$

361) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax}\right).$

362) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2\sin^2 ax}\right).$

363) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$

364) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a}\operatorname{ctg} 2ax.$

365) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} =$

$= \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$

366) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right).$$

367) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$$ (v. br. 361, 363).

368) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \quad (n \neq 1)$$ (v. br. 360, 362).

369) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$

(sniženje eksponenta n; $m > 0$, $n > 1$),

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$

(sniženje eksponenta m; $n > 0$, $m > 1$).

370) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a}\sec ax.$$

371) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$$

372) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$$

373) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

374) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$$

375) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$(n \neq 1)$ (v. br. 325, 326, 328).

376) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln \cos ax\right).$$

377) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$$

378) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right]$$

$(n \neq 1,\ n \neq 3)$.

379) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\, dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1).$$

380) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}dx =$$

$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}dx \quad (m \neq 1),$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\, dx}{\cos^m ax} \quad (m \neq n),$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\, dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1).$$

381) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\csc ax.$$

382) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$$

383) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$$

384) $$\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

385) $$\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

386) $$\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right)$$

$(n \neq 1)$ (v. br. 289)

387) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln \sin ax\right).$

388) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$

389) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right]$
$(n \neq 1,\ n \neq 3).$

390) $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax}$ $(n \neq 1).$

391) $\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} =$

$= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax}$ $(m \neq 1),$

$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax}$ $(m \neq n),$

$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax}$ $(m \neq 1).$

392) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} =$

$= \mp\frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$

395) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$

396) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} =$

$= \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

397) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

398) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

399) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

400) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$

401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm\frac{1}{a}\ln\left(1 \pm \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

402) $\int \frac{dx}{b\sin ax + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}}\ln \operatorname{tg}\frac{ax + \Theta}{2},$
gdje je $\sin\Theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}},\ \operatorname{tg}\Theta = \frac{c}{b}.$

403) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c\cos ax} = -\frac{1}{ac}\ln(b + c\cos ax).$

404) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln(b + c\sin ax).$

405) $\int \frac{dx}{b + c\cos ax + f\sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\Theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2}\sin(ax + \Theta)},$
gdje je $\sin\Theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$, a $\operatorname{tg}\Theta = \frac{c}{f}$ (v. br. 306).

406) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} ax\right).$

407) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\frac{c\operatorname{tg} ax + b}{c\operatorname{tg} ax - b}.$

408) $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$
$(a^2 \neq b^2;$ za $a = b$ v. br. 354).

Integrali s tangensom

409) $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$

410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$

412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$

413) $\int x \operatorname{tg} ax\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \dots$
$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$*

414) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \dots$
$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$*

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

417) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

Integrali s kotangensom

418) $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 364).

421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx$
$(n \neq 1).$

422) $\int x \operatorname{ctg} ax\,dx =$
$= \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots$*

423) $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \dots$
$\dots - \frac{2^{2n}B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots$*

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (v. br. 417).

Integrali drugih transcendentnih funkcija

Integrali hiperbolnih funkcija

426) $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$

427) $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x.$

429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x.$

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx =$
$= \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx \quad (\text{za } n > 0),$
$= \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx$
$(\text{za } n < 0) \quad (n \neq -1).$

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 364).

431) $$\int \operatorname{ch}^n ax\,dx =$$

$$= \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx \quad (\text{za } n > 0),$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx$$

(za $n < 0$) ($n \neq -1$).

432) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{th}\frac{ax}{2}.$$

433) $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}.$$

434) $$\int x \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax.$$

435) $$\int x \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax.$$

436) $$\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{ch} ax.$$

437) $$\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sh} ax,$$

438) $$\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$$

439) $$\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$$

440) $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax).$$

$a^2 \neq b^2$.

441) $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax).$$

$a^2 \neq b^2$.

442) $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax).$$

$a^2 \neq b^2$.

443) $$\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$$

444) $$\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax).$$

445) $$\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax).$$

446) $$\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$$

Integrali eksponencijalnih funkcija

447) $$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

448) $$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$$

449) $$\int x^2 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$$

450) $$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$$

451) $$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots *$$

452) $$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right) \qquad (n \neq 1).$$

453) $$\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$$

454) $$\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax}).$$

455) $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax}).$$

---

* Određeni integral $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ nazivamo *integralnom eksponencijalnom funkcijom* i označujemo sa Ei (x). Za $x > 0$ u točki $t = 0$ integral divergira; u tom slučaju pod Ei (x) razumijevamo glavnu vrijednost nepravog integrala (vidi str. 493).

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots$$

(C je Eulerova konstanta, vidi str. 341).

456) $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arc\,tg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$ $(bc>0)$,

$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}}$ $(bc<0)$.

457) $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$.

458) $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$ (v. br. 451).

459) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$.

460) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$.

461) $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$ (v. br. 447, 459).

462) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$ (v. br. 447, 460).

463) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) -$

$- \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx]$.

464) $\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) -$

$- \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx]$.

Integrali logaritamskih funkcija

465) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$.

466) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.

467) $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x$.

468) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$ $(n \neq -1)$.

469) $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$*.

470) $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$

$(n \neq 1)$ (v. br. 469).

471) $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right]$ $(m \neq -1)$.

472) $\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} -$

$- \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\,dx$ $(m \neq 1,\ n \neq -1$; v. br. 471).

473) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$.

474) $\int \frac{\ln x}{x^m}dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}}$ $(m \neq 1)$.

475) $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}dx$

$(m \neq 1)$ (v. br. 474).

476) $\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}dy$, gdje je $y = -(m+1)\ln x$ (v. br. 451).

477) $\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$.

---

* Određeni integral $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ nazivamo *integralnim logaritmom* i označavamo sa li (x). Za $x > 1$ u točki $t = 1$ integral divergira; u tom slučaju pod li (x) razumijevamo glavnu vrijednost nepravog integrala (str. 493). Integralni logaritam je povezan s integralnom eksponencijalnom funkcijom (vidi str. 467); li (x) = Ei $(\ln x)$.

478) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$

479) $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln \ln x - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$

480) $\int \frac{dx}{x (\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1) (\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$

481) $\int \frac{dx}{x^p (\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1} (n-1) (\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1} \int \frac{dx}{x^p (\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$

482) $\int \ln \sin x \, dx = x \ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n (2n+1)!} - \dots *.$

483) $\int \ln \cos x \, dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1} (2^{2n}-1) B_n}{n (2n+1)!} x^{2n+1} - \dots *.$

484) $\int \ln \operatorname{tg} x \, dx = x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \dots + \frac{2^{2n} (2^{2n-1}-1) B_n}{n (2n+1)!} x^{2n+1} + \dots *.$

485) $\int \sin \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x).$

486) $\int \cos \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x).$

487) $\int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx$ (v. br. 451).

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 364).

Integrali ciklometrijskih funkcija

488) $\int \arcsin \frac{x}{a} \, dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

489) $\int x \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$

490) $\int x^2 \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$

491) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{a} dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots$

492) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$

493) $\int \arccos \frac{x}{a} \, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

494) $\int x \arccos \frac{x}{a} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$

495) $\int x^2 \arccos \frac{x}{a} \, dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$

496) $\int \frac{\arccos \frac{x}{a} dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} - \dots$

497) $\int \frac{\arccos \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$

498) $\int \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$

499) $\int x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$

500) $\int x^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

501) $\int x^n \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2}$

$(n \neq -1).$

502) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots \quad (|x| < |a|).$

503) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

504) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$

505) $\int \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$

506) $\int x \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

507) $\int x^2 \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

508) $\int x^n \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2}$

$(n \neq 1).$

509) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} - \ldots$

510) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

511) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} =$

$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$

Integral Area-funkcija

512) $\int \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}.$

513) $\int \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}.$

514) $\int \operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2).$

515) $\int \operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}\,d\check{x} = x\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2).$

B. ODREĐENI INTEGRALI

8. OSNOVNI POJMOVI I TEOREMI

Definicija. *Određenim integralom* funkcije $y = f(x)$ u granicama od a do b, zadane u zatvorenom intervalu $[a, b]$* [pri tome može biti $a < b$ (slučaj A) ili $a > b$ (slučaj B)], nazivamo broj koji dobijemo kako slijedi:

1) interval $[a, b]$ podijelimo na n »elementarnih intervala« sa po volji uzetim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ izabranim tako, da je

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (u slučaju A)

ili

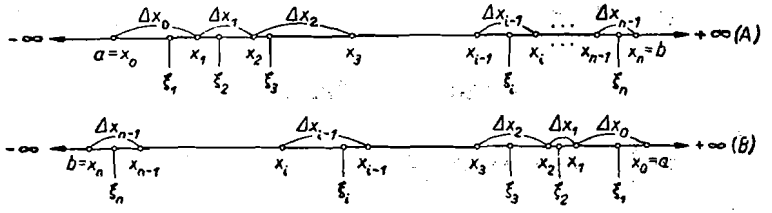
$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots > x_{n-1} > x_n = b$ (u slučaju B);

2) unutar (ili na rubu) svakog elementarnog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ izaberemo po volji broj ξ_i (sl. 302):

$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x$ (u slučaju A) ili $x_{i-1} \geqslant \xi_i \geqslant x_i$ (u slučaju B);

* Pojam određenog integrala može biti poopćen i na funkcije definirane u bilo kojem suvislom području (otvoreni ili poluotvoreni interval, poluos ili čitav brojevni pravac) ili u suvislom području s izuzetkom konačnog broja singularnih točaka. Integrali koje razmatramo u takvom poopćenom smislu spadaju u neprave integrale (vidi str. 481 do 495).

3) vrijednosti $f(\xi_i)$ funkcije $f(x)$ u tim izabranim točkama pomnožimo s pripadnim razlikama $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ (duljinama elementarnih intervala $[x_{i-1}, x_i]$, uzetim s predznacima »+« u slučaju A i predznacima »—« u slučaju B)



Sl. 302

4) svih n dobivenih produkata $f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}$ zbrojimo;

5) izračunamo limes dobivene sume

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1},$$

kada dužina svakog elementarnog intervala Δx_{i-1}, teži k nuli (i stoga i $n \to \infty$).

Ako taj limes postoji i ne zavisi od izbora brojeva x_i i ξ_i, tada se on naziva određeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}. \qquad (*)$$

Teorem egzistencije. Određeni integral funkcije, koja je neprekinuta u intervalu $[a, b]$, postoji, tj. limes (*) postoji i ne zavisi od izbora brojeva x_i i ξ_i.*

Elementi određenog integrala. U formuli (*) simbol $\int$ nazivamo *znakom integrala*, broj a *donjom granicom*, broj b *gornjom granicom*, funkciju $f(x)$ *podintegralnom funkcijom*, izraz $f(x)\,dx$ *podintegralnim izrazom*, slovo x *varijablom integracije*. Vrijednost integrala zavisi samo od oblika funkcije f i od granica a i b, ali ne zavisi od varijable integracije koja može biti označena bilo kojim slovom. Tako je

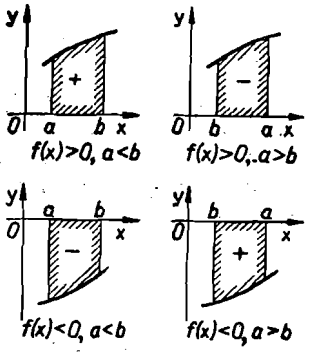
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \quad \text{itd.}$$

* Određeni integral postoji također i za ograđenu funkciju koja u intervalu $[a\ b]$ ima konačan broj točaka prekinutosti. Funkcija za koju postoji određeni integral u danom intervalu naziva se *integrabilnom* za taj interval.

Geometrijski smisao određenog integrala neprekinute funkcije. Integral (*) brojčano je jednak površini koja je omeđena dijelom grafa funkcije $y = f(x)$, osi Ox i ordinatama $f(a)$ i $f(b)$, uzetima s predznacima »+« ili »—«, suglasno shemi na sl. 303. Ako krivulja siječe os Ox jedanput ili nekoliko puta unutar intervala $[a, b]$, tada je integral brojčano jednak algebarskoj sumi površina koje se nalaze na obje strane osi Ox.

Integral s jednakim granicama. Prema definiciji je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$



Sl. 303

Osnovna svojstva određenog integrala izražena su ovim teoremima:

1) *Teorem o zamjeni granica.* Zamjenom granica integral mijenja predznak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2) *Teorem o rastavljanju integrala.* Za bilo koje brojeve a, b, c, vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3) *Integral algebarske sume* nekoliko funkcija jednak je sumi integrala tih funkcija:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

4) *Konstantni faktor* možemo izlučiti pred znak integrala:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

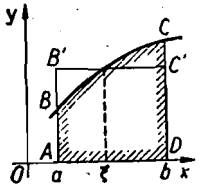
5) *Teorem o srednjoj vrijednosti.* Ako je $f(x)$ neprekinuta u intervalu $[a, b]$, tada unutar intervala $[a, b]$ postoji najmanje jedan takav broj ξ ($a < \xi < b$ u slučaju A, te $a > \xi > b$ u slučaju B, vidi str. 473), da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

Geometrijski smisao ovog teorema pokazan je na sl. 304: između točaka a i b postoji takva točka ξ da je površina lika $ABCD$ jednaka površini pravokutnika $AB'C'D$.

Poopćenje teorema o srednjoj vrijednosti. Za integral produkta dviju funkcija $f(x)$ i $\varphi(x)$ (gdje je $f(x)$ neprekinuta funkcija, a $\varphi(x)$ ne mijenja predznak u intervalu $[a, b]$) postoji unutar toga intervala najmanje jedan takav broj ξ da je

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$



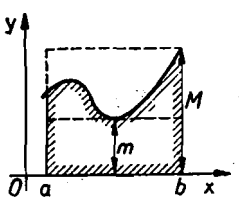
Sl. 304

6) *Teorem o ocjeni integrala.* Vrijednost određenog integrala nalazi se između produkta najmanje i najveće vrijednosti podintegralne funkcije s duljinom intervala u kojem integriramo, tj.

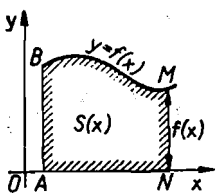
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

gdje je m najmanja, a M najveća vrijednost $f(x)$ u intervalu $[a, b]$.

Geometrijski smisao tog teorema jasan je iz sl. 305.



Sl. 305



Sl. 306

7) *Leibnitz-Newtonov teorem.* Određeni integral s varijabilnom gornjom granicom $\int_a^x f(t)\,dt$* neprekinuta je funkcija $F(x)$ te granice, i primitivna u odnosu na podintegralnu funkciju:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ili} \quad d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx.$$

Geometrijski smisao tog teorema: derivacija varijabilne površine $S(x)$, koja je prikazana na sl. 306, jednaka je varijabilnoj

* Ovdje je varijabla integracije označena sa t, da je ne bismo zamijenili s varijabilnom granicom x (vidi str. 474).

konačnoj ordinati NM (kako površinu, tako i ordinatu, uzimamo sa predznakom »+« ili »—«, vidi sl. 303 na str. 475).

8) *Osnovni teorem integralnog računa* (izražavanje određenog integrala s neodređenim). Ako je

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Desni dio jednadžbe (**) često označujemo *simbolom supstitucije*:

$$F(b) - F(a) \equiv \left[F(x)\right]_a^b \quad \text{ili} \quad F(x)\Big|_a^b.$$

Konstanta integracije C kod supstitucije granica se ukida pa prema tome može biti izostavljena pri računanju određenog integrala prema formuli (**). Na taj način jednadžbu (**) možemo izraziti u obliku

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

Jednadžbu (**) možemo izraziti također i u obliku integrala diferencijala

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

9. IZRAČUNAVANJE ODREĐENIH INTEGRALA

Osnovna metoda za izračunavanje određenih integrala jeste da izrazimo određeni integral pomoću neodređenog integrala (vidi osnovni teorem gore)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

U tom je slučaju za izračunavanje određenog integrala potrebno naći primitivnu funkciju od $f(x)$.

Pravila za pretvaranje određenog integrala. Određeni integral pretvara se u drugi najčešće pomoću pravila, koja su analogna pravilima pretvaranja neodređenih integrala:

1) *Pravilo supstitucije.* S pomoćnom funkcijom $x = \varphi(t)$ (gdje je nova varijabla t jednoznačna funkcija $t = \psi(x)$ u intervalu $[a, b]$) integral se pretvara u oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ova formula omogućuje da ne treba izvršiti inverznu supstituciju pri određivanju neodređenog integrala.

Primjer:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\,\sin t^* = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t\right]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z\,dz^{**} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left[\sin z\right]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) ***Pravilo parcijalne integracije.*** Pošto podintegralni izraz $f(x)\,dx$ predočimo na bilo koji način u obliku $u\,dv$, nađemo du (diferenciranjem) i v (integriranjem), i pretvorimo dani integral u oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Primjer:

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv} = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1.$$

Doskočice. Ako je neodređeni integral veoma teško izračunati ili ga uopće ne možemo izraziti elementarnim funkcijama, tada u nizu slučajeva vrijednost određenog integrala nalazimo pomoću doskočica. Na primjer, možemo se poslužiti svojstvima analitičkih funkcija kompleksne varijable (primjeri na str. 623 i 626) i teoremom o diferenciranju integrala po parametru (vidi str. 496)

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx. \qquad (A)$$

* Supstitucija $x = \varphi(t) = a\sin t$, $t = \psi(x) = \arcsin\frac{x}{a}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(a) = \frac{\pi}{2}$.

** Supstitucija $t = \varphi(z) = \frac{z}{2}$, $z = \psi(t) = 2t$, $\psi(0) = 0$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Primjer: Treba izračunati

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx.$$

Uvodimo parametar t i promatramo integral

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\,dx; \qquad F(0) = 0; \quad F(1) = I.$$

Primijenimo li na $F(t)$ formulu (A) imamo

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x^t-1}{\ln x}\right]dt = \int_0^1 \frac{x^t \ln x}{\ln x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^t\,dx = \left[\frac{1}{t+1}x^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1}$$

Integriranje daje

$$F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{dt}{t+1} = \left[\ln(t+1)\right]_0^t = \ln(t+1),$$

odakle je traženi integral $I = F(1) = \ln 2$.

Integriranje razvojem u red. Ako podintegralnu funkciju $f(x)$ možemo izraziti u intervalu integriranja $[a, b]$ jednoliko konvergentnim redom funkcije (vidi str. 367)

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

tada vrijedi jednadžba

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

pa određeni integral možemo izraziti u obliku konvergentnog reda brojeva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

U slučaju da imamo funkcije $\varphi_i(x)$ koje se lako mogu integrirati (npr. pri razvijanju $f(x)$ u red potencija, koji jednoliko konvergira u intervalu $[a, b]$) integral $\int_a^b f(x)\,dx$ možemo izračunati po volji točno.

Primjer: Treba izračunati $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ s točnošću do 0,0001.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

(vidi tablicu na str. 402); red konvergira jednoliko u po volji uzetom konačnom intervalu (prema Abelovom teoremu, vidi str. 368); stoga je

$$\int e^{-x^2}\,dx = x\left(1 - \frac{x^2}{1!3} + \frac{x^4}{2!5} - \frac{x^6}{3!7} + \frac{x^8}{4!9} - \dots\right),$$

odakle dobivamo

$$I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 1! \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{2^6 \cdot 3! \cdot 7} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^8 \cdot 4! \cdot 9} - \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} - \frac{1}{2688} + \frac{1}{55296} - \dots\right);$$

za izračunavanje I sa zadanom točnošću možemo se prema Leibnizovom teoremu o alterniranim redovima (vidi str. 363) ograničiti na prva četiri člana razvoja

$$I \approx \frac{1}{2}(1 - 0{,}08333 + 0{,}00625 - 0{,}00037) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}92255 = 0{,}46127,$$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = 0{,}4613.$$

Metode aproksimacije. Najviše se primjenjuju one koje se osnivaju na zamjeni integrala s konačnom sumom. Da bismo izračunali $\int_a^b y\,dx$ interval od $a(=x_0)$ do $b\,(=x_n)$ razdijelimo na n jednakih dijelova i za diobene točke $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ izračunamo vrijednosti funkcije y koju integriramo. Zatim se koristimo jednom od triju formula $\left(\text{uzimamo } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

1) *Formula pravokutnika* (sl. 307, *a*)

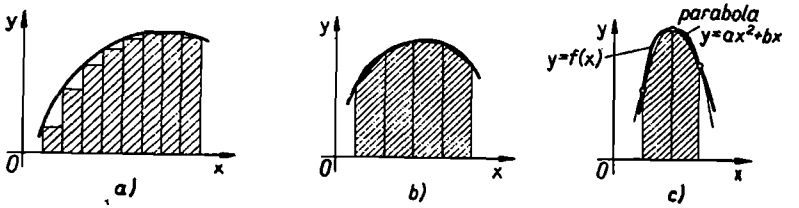
$$\int_a^b y\,dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

2) *Formula trapeza* (sl. 307, *b*)

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

3) *Formula parabole* (*Simpsonova formula*); n je paran (sl. 307, *c*)

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad \text{(I)}$$



Sl. 307

Sve tri formule su to točnije što je veće n. Pri jednom te istom n druga formula je točnija od prve, treća još točnija i prema tome najprikladnija. Da bismo ocijenili pogrešku koja se dobiva pri izračunavanju integrala prema Simpsonovoj formuli (ako je n višekratnik broja 4), izračunat ćemo pomoćnu sumu

$$\frac{2h}{3}(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-2} + y_n), \quad \text{(II)}$$

koja predočuje Simpsonovu formulu za prugu širine $2h$ (dobivamo je izostavljanjem ordinata s neparnim indeksima). Možemo približno uzeti da je

$$\int_a^b y\,dx - \text{(I)} = \frac{\text{(I)} - \text{(II)}}{15}.$$

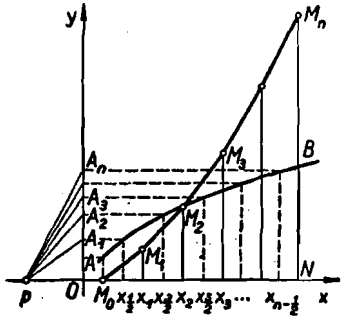
Ako zamijenimo podintegralne funkcije s nekim interpolacionim polinomom, možemo dobiti mnogo drugih formula za približnu integraciju. Najprikladnije su:

$$\int_a^b y\,dx = 2h\left[(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \right.$$
$$+\frac{1}{6}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2}) -$$
$$-\frac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \ldots + \Delta^4 y_{n-3}) +$$
$$\left. +\frac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \ldots + \Delta^6 y_{n-4})\right] \quad (n \text{ je paran}),$$

$$\int_a^b y\,dx = h\left[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) -\right.$$
$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right) +$$
$$+\frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right) -$$
$$\left. -\frac{1}{317}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}\right)\right].$$

Posljednji se sumand u tim formulama obično ne računa i služi samo za približnu ocjenu pogreške izračunavanja prema zadanoj formuli.

Grafička metoda. Ako je integrabilna funkcija $y = f(x)$ prikazana grafom AB (sl. 308), tada $\int_a^b f(x)\,dx$, koji je jednak površini M_0ABN, možemo naći grafički ovako:



Sl. 308

1) M_0N podijelimo na $2n$ jednakih dijelova s točkama

$$x_{1/2},\ x_1,\ x_{3/2},\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_{n-1/2},$$

(što je više djelišta, to je točniji rezultat);

2) U djelištima $x_{1/2}, x_{3/2}, \ldots, x_{n-1/2}$ postavimo ordinate krivulje i nanesemo ih na os Oy (odsječci $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$);

3) Nanesemo odsječak OP po volji odabrane duljine na lijevu stranu osi Ox i spojimo P s točkama $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

4) Kroz točku M_0 nanesemo odsječak M_0M_1 paralelno sa PA_1 do sjecišta s ordinatom točke x_1, kroz M_1 odsječak $M_1M_2 \parallel PA_2$ do sjecišta s ordinatom x_2, zatim $M_2M_3 \parallel PA_3$ itd. dok ne dođemo do posljednje ordinate u točki M_n.

Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ brojčano je jednak produktu duljine odsječaka OP i NM_n; po volji odabranom dužinom OP služimo se za podešavanje dimenzija crteža (što su manje dopuštene dimenzije, to veće moramo odabrati OP). Ako je $OP = 1$, tada je $\int_a^b f(x)\,dx = NM_n$, a lomljena crta (poligonalni potez) $M_0M_1M_2\ldots M_n$ približno predočuje graf primitivne funkcije od $f(x)$ [neodređeni integral $\int f(x)\,dx$].

Računanje pomoću planimetra. Planimetri su naprave kojima možemo odrediti površinu ograđenu zadanom krivuljom i na taj način izračunati određene integrale funkcije $y = f(x)$ koja je zadana svojim grafom. Specijalni planimetri izračunavaju ne samo $\int y\,dx$, nego i $\int y^2\,dx$ i $\int y^3\,dx$.

Integrafi. To su naprave koje crtaju graf integralne funkcije

$$Y = \int_a^x f(t)\,dt$$

prema grafu zadane funkcije $y = f(x)$.

10. PRIMJENA ODREĐENIH INTEGRALA

Opći princip primjene određenog integrala za izračunavanje geometrijskih, fizikalnih i drugih veličina:

1) Veličinu A, koju treba izračunati, podijelimo određenim načinom na mnogo malih veličina: $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

2) Svaku veličinu a_i zamijenimo veličinom $\tilde{a}_i$ (bliskom a_i), koja se izračuna prema poznatoj formuli; pogreška $\alpha_i = a_i - \tilde{a}_i$ mora biti neizmjerno malena veličina višeg reda prema $\tilde{a}_i$, tj. a_i i $\tilde{a}_i$ su ekvivalentne neizmjerno male veličine.

3) Veličinu $\tilde{a}_i$ izrazimo nekom varijablom x, koju izaberemo tako da $\tilde{a}_i$ poprimi oblik $f(x_i)\,\Delta x_i$.

4) Traženu veličinu izračunamo kao limes sume

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

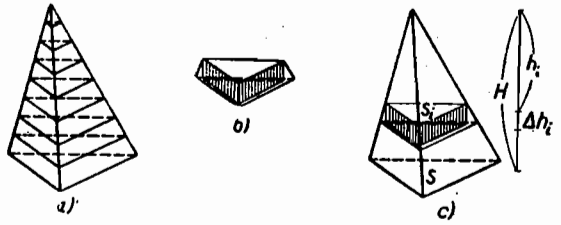
gdje su a i b rubne vrijednosti za x.

Primjer: izračunavanje volumena piramide (S je površina baze, H je visina):

1) Volumen V, koji izračunavamo, razdijelimo ravninskim presjecima na volumene tankih isječenih piramida (sl. 390, *a*)

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n;$$

2) Svaka isječena piramida zamjenjuje se s prizmom $\tilde{v}_i$, iste visine, i s površinom baze koja je jednaka gornjoj površini isječane piramide (sl. 390, *b*). Zanemareni volumen, neizmjerno malen, višeg je reda nego v_i.



Sl. 309

3) Formulu volumena $\tilde{v}_i$ svodimo na oblik $\tilde{v}_i = S_i\,\Delta h_i$, gdje je h_i (sl. 309, *c*) udaljenost gornje plohe do vrha piramide ili (jer je $S_i : S = h_i^2 : H^2$)

$$\tilde{v}_i = \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i;$$

4) Traženi volumen izračunamo kao limes sume

$$V_{\text{pir}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i = \int_0^H \frac{Sh^2}{H^2}\,dh = \frac{SH}{3}.$$

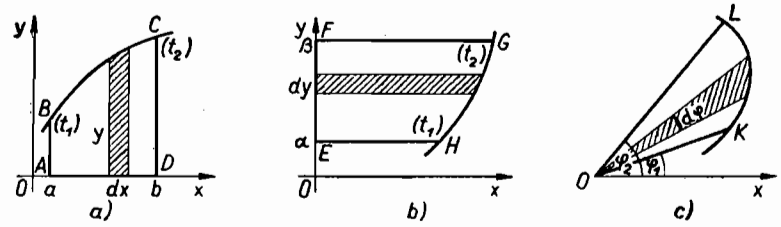
Osnovne primjene u geometriji

Površina. Formula površine *krivocrtnog trapeza* (sl. 310, *a*), ako je jednadžba krivulje zadana eksplicitno [$y = f(x)$ i $a \leqslant x \leqslant b$] ili parametarski [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$], glasi

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

formula površine krivocrtnog trapeza prikazanog na sl. 310, *b* [$x = g(y)$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ ili parametarski $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$] glasi

$$S_{EFGH} = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt;$$



Sl. 310

formula površine *krivocrtnog sektora* (sl. 310, *c*), ako je krivulja zadana jednadžbom u polarnim koordinatama [$\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$], glasi

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi.$$

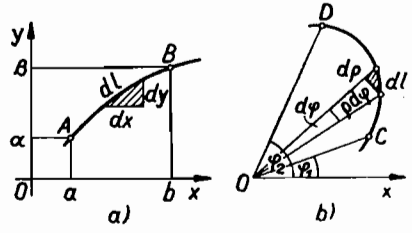
Površine složenijih likova izračunavamo pomoću krivuljnog integrala (vidi str. 504) ili dvostrukog integrala (vidi str. 512).

Duljina luka. Formula za duljinu luka krivulje (sl. 331, *a*), ako je jednadžba krivulje zadana eksplicitno [$y = f(x)$ ili $x = g(y)$] ili parametarski [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$], glasi

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt;$$



Sl. 311

ili $L = \int dl$, gdje je dl diferencijal luka: $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Ako je pak krivulja (sl. 311, *b*) zadana jednadžbom u polarnim koordinatama [$\rho = \rho(\varphi)$], tada je

$$L_{\overset{\frown}{CD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

ili $L = \int dl$, gdje je dl diferencijal luka: $dl^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2$.

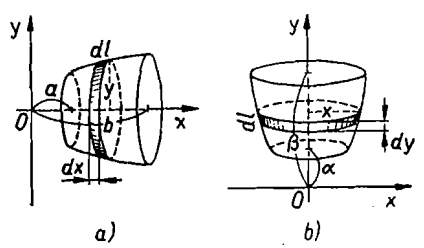
Površina rotacione plohe. Formula za površinu plohe koja je nastala rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi Ox (sl. 312, *a*) glasi:

$$S = 2\pi \int_a^b y\, dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

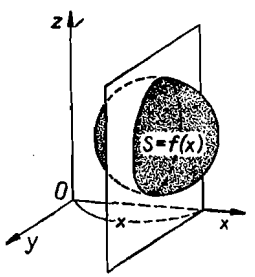
a krivulje $x = f(y)$ oko osi Oy (sl. 312, *b*)

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta x\, dl = 2\pi \int_\alpha^\beta x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Izračunavanje površina koje omeđuju složenija tijela vidi na str. 521 i 527.



Sl. 312



Sl. 313

Volumen. Formula za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje oko osi Ox (sl. 312, *a*), glasi

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx;$$

a pri rotaciji oko osi Oy (sl. 312, *b*)

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2\, dy.$$

Formula za volumen tijela, ako je površina njegova presjeka okomitog na os Ox funkcija varijable x [$S = f(x)$] (sl. 313), glasi

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Volumeni složenijih tijela izračunavaju se pomoću dvostrukih ili trostrukih integrala (vidi str. 513, 521 i 522).

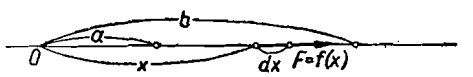
Primjena u mehanici i fizici

Put koji pređe točka od momenta t_0 do momenta T [ako je brzina gibanja varijabla, zavisna o vremenu $v = f(t)$], određujemo po formuli

$$s = \int_{t_0}^{T} v\, dt.$$

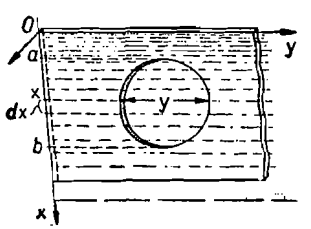
Rad koji vrši sila da pomakne tijelo od $x = a$ do $x = b$ po pravcu Ox, koji se poklapa sa smjerom sile [ako je veličina sile varijabla $F = f(x)$], određuje se prema formuli (sl. 314)

$$A = \int_a^b F\, dx^*.$$

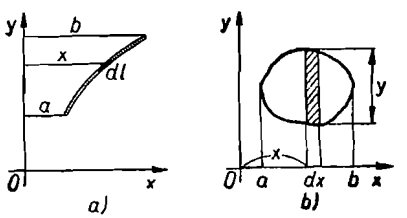


Sl. 314

Tlak tekućine gustoće γ na jednu stranicu ploče koja je vertikalno uronjena u tu tekućinu, kada se razmak (x) točaka plo-



Sl. 315



Sl. 316

če do nivoa tekućine mijenja od a do b, određuje se pomoću formule

$$P = \int_a^b \gamma x y\, dx,$$

gdje je y duljina horizontalnog presjeka ploče [$y = f(x)$].

* Općenito ako se smjer sile ne poklapa sa smjerom kretanja, a isto tako ako se tijelo giba po krivocrtnom putu, rad se izračunava krivuljnim integralom (vidi str. 648).

Moment inercije: 1) luka homogene krivulje $y = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ s obzirom na os Oy (sl. 316, *a*) određuje se po formuli

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 \, dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (\delta \text{ je linearna gustoća});$$

2) homogenog lika (sl. 316, *b*) s obzirom na os Oy određuje se po formuli

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 y \, dx \quad (\delta \text{ je gustoća lika}),$$

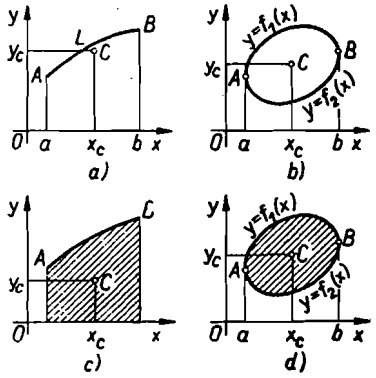
gdje je y duljina presjeka, koji je paralelan s osi Oy. Vidi također str. 521.

Težište C luka (sl. 317, *a*) homogene ravninske krivulje $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L},$$

gdje je L duljina krivulje (vidi str. 485 i 486). *Težište zatvorene krivulje* (sl. 317, *b*)



Sl. 317

$$x_c = \frac{\int_a^b x \left[\sqrt{1 + (y_1')^2} + \sqrt{1 + (y_2')^2}\right] dx}{L},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b \left[y_1 \sqrt{1 + (y_1')^2} + y_2 \sqrt{1 + (y_2')^2}\right] dx}{L},$$

gdje su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ jednadžbe gornjeg i donjeg dijela ruba, a L je duljina cijele petlje.

Prvi Guldinov teorem. Površina tijela opisanog ravninskom krivuljom pri rotaciji oko osi koja leži u ravnini te krivulje i koja krivulju ne siječe, jednaka je produktu duljine krivulje i duljine kružnice koju pri toj rotaciji opisuje težište krivulje

$$S_{vr} = L \cdot 2\pi y_c.$$

Težište C homogenog *krivuljnog trapeza* (sl. 317, *c*) ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b xy \, dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 \, dx}{S};$$

gdje je S površina trapeza, a $y = f(x)$ jednadžba krivulje AB. Težište po volji uzete ravninske figure (sl. 317, *d*) ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b x \, (y_1 - y_2) \, dx}{S}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \, dx}{S},$$

gdje su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ jednadžbe gornjeg i donjeg dijela ruba, a S je površina figure.

Drugi Guldinov teorem. Volumen tijela opisanog likom pri rotaciji oko osi koja leži u ravnini tog lika, i koja taj lik ne siječe, jednak je produktu površine lika i duljine kružnice koju pri vrtnji opisuje težište tog lika

$$V_{vr} = S \cdot 2\pi y_c.$$

O težištu ravninskih likova i tijela vidi na str. 521 i 522 (višestruki integrali).

11. NEPRAVI INTEGRALI

Opći pojmovi. Najjednostavnije poopćenje određenog integrala (str. 473 i 474) su *nepravi integrali.**

Dva su osnovna tipa nepravih integrala:

1) *Integral s neizmjernim granicama.* Područje definicije podintegralne funkcije je zatvorena poluos $[a, \infty)$ ili $(-\infty, b]$ ili također cijeli brojevni pravac $(-\infty, +\infty)$.

2) *Integrali prekinutih funkcija.* Zadana funkcija je neprekinuta u cijelom intervalu od a do b, osim za neki konačni broj njegovih točaka, koje nazivamo *singularnim.*

Mogu nastupiti i složeniji slučajevi, koji su kombinacija obaju tipova.

Integrali s neizmjernim granicama

Definicije. Neka je područje definicije zatvorena poluos $[a, \infty)$. Prema definiciji vrijedi

* Pojam integrala može biti poopćen i na složenije slučajeve, kada je područje definicije funkcije (područje integracije) skup vrijednosti neke druge funkcije (*integral Stieltjesa*).

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx. \tag{1}$$

Ako taj limes postoji, tada i integral (1) *postoji* ili *konvergira* i naziva se *nepravim integralom.* Ako limes ne postoji, tada integral (1) *ne postoji* ili *divergira.* U slučaju ako je $\lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx = \infty$, upotrebljava se oznaka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$; taj integral divergira.

Analogno se definiraju nepravi integrali za funkcije, definirane na poluosi $(-\infty, b)$ ili na cijelom brojevnom pravcu $(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx^*. \tag{3}$$

Geometrijski smisao integrala s neizmjernim granicama (1), (2) i (3) je limes površina likova prikazanih na sl. 318, *a, b, c.*

Primjeri:

$$1)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty \quad \text{(divergira)},$$

$$2)\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \int_2^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{(konvergira)},$$

$$3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} =$$

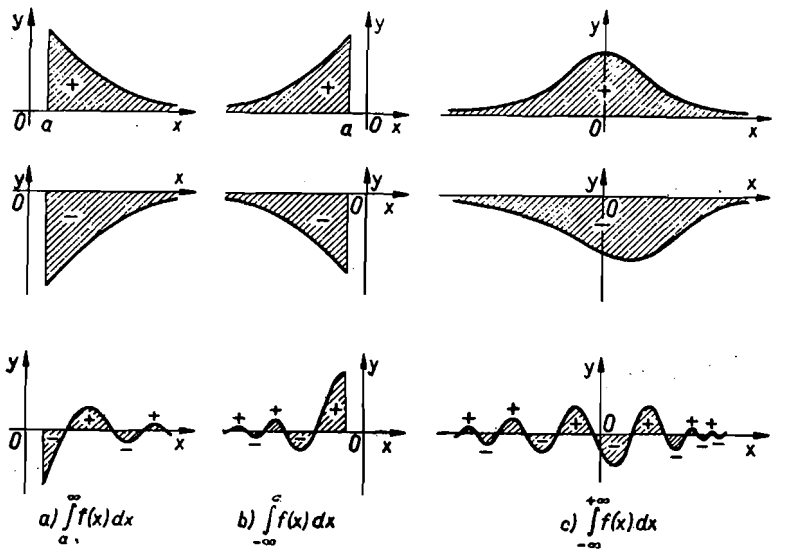
$$= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \text{(konvergira)}.$$

* Brojevi A i B teže prema neizmjerno nezavisno jedan od drugoga. Ako limes (3) ne postoji, ali ako postoji

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx, \tag{4}$$

tada limes (4) nazivamo *glavnom vrijednošću nepravog integrala.*

Ako je limese (1), (2), (3) teško neposredno odrediti ili treba samo ustanoviti da li integrali konvergiraju ili ne, tada se možemo poslužiti bilo kojim od dovoljnih uvjeta za konvergenciju.



Sl. 318

Dovoljni uvjeti konvergencije. Ovdje je razmotren samo integral tipa (1). Za integral tipa (2) možemo načiniti zamjenu varijabli $x = -z$ i svesti integral na tip (1)

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx.$$

Integral tipa (3) razdijelimo na sume dvaju integrala tipa (2) i (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

gdje je c po volji uzet broj.

Uvjet 1: Ako postoji integral $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, tada postoji i integral (1). U tom slučaju integral (1) nazivamo *apsolutno konvergentnim,* a funkciju $f(x)$ *apsolutno integrabilnom* na poluosi $[a, +\infty)$.

Uvjet 2. Ako su $f(x)$ i $\varphi(x)$ pozitivne funkcije i zadovoljavaju uvjet $f(x) \leqslant \varphi(x)$ za $a \leqslant x < \infty$, tada iz konvergencije integrala

$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ izlazi konvergencija integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$, a iz divergencije integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergencija integrala $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$.

Napose, ako uzmemo $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ i uočimo da $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ $\left[\text{on je jednak } \frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}\right]$ i divergira za $\alpha \leqslant 1$, možemo taj uvjet dovesti na ovaj oblik:

Uvjet 3. Ako je funkcija $f(x)$ pozitivna za $a \leqslant x < \infty$ i ako postoji takav broj $\alpha > 1$ da je za dovoljno velik x

$$f(x) \cdot x^\alpha < c,$$

tada integral (1) konvergira; ako je pak $f(x)$ pozitivna funkcija i ako postoji takav broj $\alpha \leqslant 1$ da je

$$f(x) \cdot x^\alpha > c > 0,$$

tada integral (1) divergira.

Primjer: $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{1+x^2}$. Uzmemo li da je $\alpha = \frac{1}{2}$, dobivamo $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \cdot x^{1/2} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1$; taj integral divergira.

Veza nepravih integrala s beskonačnim redovima. Ako je $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ po volji uzet neograđen uzlazan niz, tj.

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{A}$$

i ako je $f(x)$ pozitivna funkcija za $a \leqslant x < \infty$, tada pitanje konvergencije integrala (1) možemo svesti na pitanje konvergencije reda

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \ldots \tag{B}$$

Ako red (B) konvergira, tada i integral (1) konvergira i jednak je sumi tog reda; ako red (B) divergira, tada divergira i integral (1). Ovo nam omogućuje da se koristimo uvjetima konvergencije redova za konvergenciju integrala. [Integralni uvjet konvergencije redova (str. 361) svodi pitanje konvergencije reda na pitanje konvergencije nepravih integrala.]

Integrali prekinutih funkcija

Definicija. Neka je područje definicije funkcije poluotvoreni interval $[a, b)$ ili zatvoreni interval $[a, b]$, ali s time da je u točki b limes $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$. U oba slučaja je prema definiciji

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Ako taj limes postoji, tada integral (1) *postoji* ili *konvergira* i nazivamo ga *nepravim integralom.* Ako pak limes ne postoji, tada integral (1) *ne postoji* ili *divergira.* U slučaju da je $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty$, upotrebljavamo oznaku

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty;$$

taj integral divergira.

Integral (1) uvijek postoji ako je funkcija $f(x)$ po odsječcima neprekinuta i ograđena u području $[a, b)$. U daljnjem ćemo pretpostaviti da funkcija $f(x)$ nije ograđena, tj. da je $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$.

Analogno definiramo nepravi integral za funkciju zadanu u intervalu koji je otvoren slijeva $(a, b]$ ili u intervalu $[a, b]$, ali za $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Na kraju, ako je funkcija definirana na cijelom intervalu $[a, b]$ s isključenjem unutrašnje točke c $(a < c < b)$, tj. u dva poluotvorena intervala $[a, c)$ i $(c, b]$, ili je definirana i u točki c, ali je $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, tada se nepravi integral definira ovako:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx^*. \tag{3}$$

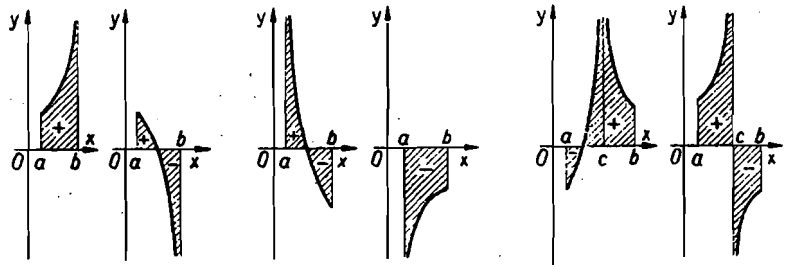
Brojevi ε i δ teže k nuli nezavisno jedan od drugog. Ako limes (3) ne postoji, ali postoji

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\}, \tag{4}$$

tada limes (4) nazivamo *glavnom vrijednošću nepravog integrala.*

* Analogno slučaju (1), za integrale (2) i (3) ćemo pretpostaviti da je $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

Geometrijski smisao integrala prekinutih funkcija (1), (2), (3) je površina beskonačno rastegnutih likova, koja ima oblik prikazan na sl. 319 (krivulje imaju vertikalnu asimptotu).



a) slučaj (1) b) slučaj (2) c) slučaj (3)

Sl. 319

Primjeri: 1) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; slučaj (2), singularna točka $x = 0$;

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{b} \text{ (konvergira):}$$

2) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$; slučaj (1), singularna točka $x = \frac{\pi}{2}$;

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi/2 - \varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \cos 0 - \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] = \infty \quad \text{(divergira).}$$

3) $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx$; slučaj (3), singularna točka $x = 0$;

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2}\left(\varepsilon^{2/3} - 1\right) + \lim_{\delta \to 0} \frac{3}{2}\left(4 - \delta^{2/3}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{(konvergira).}$$

4) $\int_{-2}^{+2} \frac{2x\, dx}{x^2 - 1}$; slučaj (3), singularne točke $x = -1$ i $x = +1$;

$$\int_{-2}^{+2} \frac{2x\, dx}{x^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \nu \to 0}} \int_{-1+\delta}^{1-\nu} + \lim_{\gamma \to 0} \int_{1+\gamma}^{+2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln (x^2 - 1) \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \ldots =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) - \ln 3] + \ldots = \infty \quad \text{(divergira).}$$

O primjeni osnovnog teorema integralnog računa. Pri računanju nepravih integrala sa singularnim točkama tipa (3) ne možemo mehanički primijeniti osnovni teorem (str. 476 i 477)

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b, \text{ gdje je } F'(x) = f(x),$$

a da ne bismo u obzir uzeli singularne točke unutar intervala $[a, b]$: ovo može lako dovesti do pogrešaka. Jer, primjenjujući osnovni teorem na primjer (4), dobivamo

$$\int_{-2}^{+2} \frac{2x\, dx}{x^2 - 1} = \ln (x^2 - 1) \Big|_{-2}^{+2} = \ln 3 - \ln 3 = 0;$$

u isto vrijeme integral divergira.

Opće pravilo: osnovni teorem za slučaj (3) možemo primijeniti samo onda kada je primitivna funkcija od $f(x)$ u singularnoj točki neprekinuta.

U primjeru (4) toga nema: funkcija $\ln (x^2 - 1)$ za $x = \pm 1$ je prekinuta; u primjeru pak (3) funkcija $\frac{3}{2}x^{2/3}$ za $x = 0$ neprekinuta je i prema tome na primjer (3) možemo primijeniti osnovni teorem:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right) = \frac{9}{2}.$$

Dovoljni uvjeti za konvergenciju integrala prekinute funkcije.

1) Ako postoji integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$, tada postoji i integral $\int_a^b f(x)\, dx$, koji u tom slučaju nazivamo *apsolutno konvergentnim*, a funkciju $f(x)$ *apsolutno integrabilnom* u danom intervalu.

2) Ako je $f(x)$ pozitivna funkcija u području $[a, b)$ i ako postoji takav broj $\alpha < 1$ da je za vrijednosti x, koje su dovoljno blizu b

$$f(x)\,(b-x)^{\alpha} < c,$$

tada integral (1) konvergira; ako je pak $f(x)$ pozitivna u području $[a, b)$ i ako postoji takav broj $\alpha > 1$ da je za vrijednosti x, koje su dovoljno blizu b

$$f(x)\,(b-x)^{\alpha} > c > 0,$$

integral (1) divergira.

12. INTEGRALI OVISNI O PARAMETRU

Definicija: Određeni integral

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = F(y) \tag{1}$$

je funkcija s jednom varijablom y, koju u tom slučaju nazivamo *parametrom.*

Funkcija $F(y)$ u mnogim slučajevima nije elementarna funkcija. Integral (1) može biti obični integral ili nepravi [s neizmjernim granicama ili integral prekinute funkcije $f(x, y)$].

Primjer

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(konvergira za } y > 0)$$

je *gama funkcija* ili *Eulerov integral druge vrste.*

Diferenciranje pod integralom. Ako je funkcija (1) definirana u intervalu $c \leqslant y \leqslant e$ i ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u pravokutniku $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$ i ako ima u tom području parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ tada za bilo koji y u intervalu $[c, e]$ vrijedi formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

(*diferenciranje pod znakom integrala*).

Primjer: U bilo kom intervalu vrijedi za $y > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Provjeravanje: $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{1+y^2}$;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{1+y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Za $y = 0$ uvjet neprekinutosti funkcije nije ispunjen: derivacije nema.

Poopćenje formule (2) *za slučaj kada i granice integrala zavise od parametra.* Ako su za iste uvjete funkcije $\alpha(y)$ i $\beta(y)$ definirane u intervalu $[c, e]$ i ako imaju neprekinute derivacije $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ i ako krivulje $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ ne izlaze iz pravokutnika $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$, tada formula (2) dopušta poopćenje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \beta'(y)\cdot f[\beta(y), y] - \alpha'(y)\cdot f[\alpha(y), y]. \tag{2'}$$

Integriranje pod integralom. Ako je funkcija (1) definirana u intervalu $[c, e]$ i ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u pravokutniku $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$, tada vrijedi formula

$$\int_c^e \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^e f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{3}$$

(*integriranje pod integralom*).

Primjeri: 1) $f(x, y) = x^y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y \leqslant b;\ a > 0)$. Za $a > 0$ uvjeti neprekinutosti su ispunjeni; funkcija x^y ima prekinutost za $x = 0,\ y = 0$. Tada je

$$\int_a^b \left[\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Lijevi dio daje $\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a}$; desni dio daje $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$;

neodređeni se integral ne može izraziti s elementarnim funkcijama, ali je određeni integral nađen:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{1+b}{1+a} \quad (a < 0 < b).$$

2. $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$. U točki $(0, 0)$ funkcija ima prekinutost, formulu (3) ne možemo primijeniti. Provjeravanje:

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \left.\frac{x}{x^2 + y^2}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2};$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy = -\left.\frac{y}{x^2 + y^2}\right|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2 + 1};$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = -\operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

13. TABLICA NEKIH ODREĐENIH INTEGRALA

Integrali eksponencijalnih funkcija (u vezi s algebarskim, trigonometrijskim i logaritamskim)

1) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$* za $a > 0$, $n > -1$.

Napose za cijeli $n > 0$ taj je integral jednak $\dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

2) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}$* za $a > 0$, $n > -1$.

Napose za cijeli i parni n $(n = 2k)$ taj je integral jednak $\dfrac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+1/2}}$, a za cijeli i neparni n $(n = 2k+1)$ jednak $\dfrac{k!}{2a^{k+1}}$.

* O funkciji Γ (gama) vidi na str. 208; tablicu $\Gamma(x)$ vidi na str. 90.

3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ za $a > 0$.

4) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ za $a > 0$.

5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2}$ za $a > 0$.

6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$.

7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$.

8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin x}{x}\,dx = \operatorname{arc\,ctg} a = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}$ za $a > 0$.

9) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772$*.

Integrali trigonometrijskih funkcija (u vezi s algebarskim)

10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} =$

$$= \frac{1}{2} B(\alpha+1, \beta+1)^{**} = \frac{\alpha!\,\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$$

(za cijele i pozitivne α i β).

* C je Eulerova konstanta (vidi str. 341).

** $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ je beta-funkcija ili Eulerov integral prve vrste, $\Gamma(x)$ je gama-funkcija ili Eulerov integral druge vrste (vidi str. 208).

Ta formula vrijedi za po volji uzete α i β; upotrebljiva je za izračunavanje integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}} \text{ itd.}$$

11) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za } a < 0. \end{cases}$$

12) $$\int_0^{\alpha} \frac{\cos ax\,dx}{x} = \infty$$ (α je po volji uzet broj)

13) $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za } a < 0. \end{cases}$$

14) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln \frac{b}{a}.$$

15) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } |a| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{za } |a| = 1 \\ 0 & \text{za } |a| > 1 \end{cases}$$

16) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

17) $$\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2}\,dx = \pm \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$$
(predznak se podudara s predznakom broja b)

18) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

19) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|.$$

20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

21) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \quad \text{za } |k| < 1.$$

22) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k} \arcsin k \quad \text{za } |k| < 1.$$

23) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}(K - E)^* \quad \text{za } |k| < 1.$$

24) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}[E - (1 - k^2)K]^* \quad \text{za } |k| < 1.$$

25) $$\int_0^{\pi} \frac{\cos ax\,dx}{1 - 2b \cos x + b^2} = \frac{\pi b^a}{1 - b^2} \quad \text{za cio } a \geqslant 0, |b| < 1.$$

Integrali logaritamskih funkcija (u vezi s algebarskim i trigonometrijskim)

26) $$\int_0^1 \ln|\ln x|\,dx = -C \approx -0{,}5772^{**}$$ (svodi se na br. 9)

27) $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$ (svodi se na br. 6).

---

* E i K su potpuni eliptički integrali:

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$ (vidi str. 422 i tablicu na str. 96).

** C = Eulerova konstanta.

28) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (svodi se na br. 7).

29) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$.

30) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

31) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)^*$ $(-1 < a < \infty)$

32) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

33) $\int_0^{\pi} x \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}$.

34) $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1$.

35) $\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi \ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ za $a \geqslant b$.

36) $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi \ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi \ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

37) $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x\,dx = 0$.

38) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

* $\Gamma(x)$ je **gama-funkcija** (vidi str. 208 i tablicu na str. 90).

Integrali algebarskih funkcija

39) $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\,dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = B(\alpha+1, \beta+1)^*$ (svodi se na br. 10).

40) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\,x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ za $a < 1$.

41) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)\,x^a} = -\pi \operatorname{ctg} a\pi$ za $a < 1$.

42) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}}$ za $0 < a < b$.

43) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)^{**}}{a\,\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}$.

44) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \frac{a}{2\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$.

45) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$.

C. KRIVULJNI, VIŠESTRUKI I PLOŠNI INTEGRALI

Pojam određenog integrala (vidi str. 473 do 477) možemo poopćiti u različitim smjerovima. Područje integriranja jednostrukog određenog integrala je dio (interval) $[a, b]$ brojevnog pravca. Ako za područje integriranja uzmemo dio neke krivulje (ravninske ili prostorne), dobivamo krivuljni integral; ako uzmemo neki dio ravnine, tada dobivamo dvostruki integral; ako uzmemo dio prostora (volumen), dobivamo trostruki integral.

* $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ je beta funkcija ili Eulerov integral prve vrste.

** $\Gamma(x)$ je gama-funkcija ili Eulerov integral druge vrste (vidi str. 208).

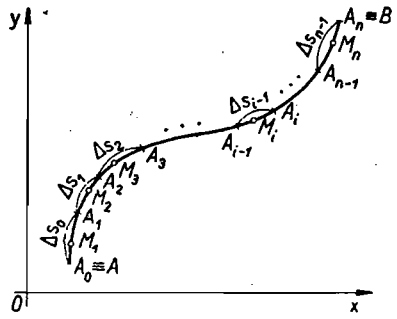
14. KRIVULJNI INTEGRALI PRVOG TIPA

(Integrali po luku krivulje)

Definicija. *Krivuljnim integralom prvog tipa*

$$\int_{(K)} f(x, y)\,\mathrm{d}s$$

funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$ (definirane u nekom suvislom području*), *uzetim na dijelu* $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ *ravninske krivulje* zadane svojom jednadžbom (taj se dio nalazi u istom području i naziva se *put integracije*), naziva se broj koji dobivamo na ovaj način (sl. 320).



Sl. 320

1) Dio AB razdijelimo na n »elementarnih dijelova« sa po volji uzetim točkama $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, počevši od početka dijela $A \equiv A_0$ do njegovog kraja $B \equiv A_n$.

2) Unutar (ili na granici) svakog elementarnog dijela $A_{i-1}A$ izabire se jedna po volji uzeta točka M_i s koordinatama ξ_i, η_i.

3) Vrijednost funkcije $f(\xi_i, \eta_i)$ u tim izabranim točkama pomnožimo s duljinom dijelova $A_{i-1}A_i = \Delta S_{i-1}$ (te duljine smatramo pozivitnim).

4) Svih dobivenih n produkata $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_{i-1}$ zbrojimo.

5) Izračunamo limes dobivene sume

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_{i-1},$$

kada duljina svakog elementarnog dijela ΔS_{i-1} teži k nuli (i kada $n \to \infty$).

* O suvislom području dviju varijabli vidi str. 352.

Ako taj limes postoji i ne zavisi od izbora točaka A_i i M_i, tada se naziva krivuljnim integralom prvog tipa

$$\int_{(K)} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_{i-1}. \qquad \text{(A)}$$

Analogno se određuje *krivuljni integral prvog tipa funkcije sa tri varijable* $u = f(x, y, z)$, *uzet po dijelu* K *prostorne krivulje*:

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_{i-1}. \qquad \text{(B)}$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ ili $f(x, y, z)$ neprekinuta, a krivulja na dijelu K neprekinuta i ima tangentu koja se neprekinuto mijenja, tada krivuljni integral prvog tipa (A) ili (B) postoji (tj. limesi postoje i ne zavise o izboru točaka A_i i M_i).

Izračunavanje krivuljnog integrala prvog tipa svodi se na izračunavanje određenog integrala. Ako su jednadžbe puta integracije zadane u parametarskom obliku (vidi str. 290 i 309) $x = x(t)$, $y = y(t)$ i (za prostornu krivulju) $z = z(t)$, tada je

$$\int_{(K)} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{(za slučaj A)}$$

i

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{T} f[x(t),\ y(t),\ z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

(za slučaj B);

ovdje je t_0 vrijednost parametra t za točku A, a T za točku B, pri čemu se točke A i B izabiru tako, da bude $t_0 < T$.

Ako je jednadžba puta integracije zadana u eksplicitnom obliku: $y = \varphi(x)$ za ravninsku krivulju ili $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ za prostornu krivulju, i ako su a i b apscise točaka A i B $(a < b)$*, tada je

$$\int_{(K)} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_{a}^{b} f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{(za slučaj A)}$$

i

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_{a}^{b} f[x, \varphi(x), \psi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

(za slučaj B).

* Pri tom se pretpostavlja, da odsječak krivulje K ima takav oblik da svakoj točki njegove projekcije na os Ox odgovara jednoznačno određena točka odsječka K (točka krivulje jednoznačeno je određena svojom apscisom). Ako to nije ispunjeno, tada odsječak K dijelimo na nekoliko dijelova, od kojih svaki ima tražena svojstva: krivuljni integral na cijelom odsječku smatramo sumom integrala uzetih po dijelovima odsječka.

Primjena krivuljnog integrala prvog tipa:

1) *Duljina* krivuljnog luka K:

$$L_{(K)} = \int_{(K)} ds.$$

2) *Masa* nehomogenog krivuljnog luka K, ako je δ varijabilna linearna gustoća [$\delta = f(x, y)$ za ravninsku ili $\delta = f(x, y, z)$ za prostornu krivulju]:

$$M_{(K)} = \int_{(K)} \delta \, ds.$$

15. KRIVULJNI INTEGRALI DRUGOG TIPA

(Integrali po projekciji i integrali općeg oblika)

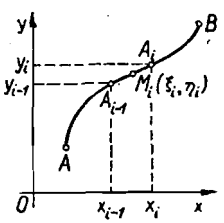
Definicije. *Krivuljnim integralom drugog tipa*

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dx \qquad (A_x)$$

ili

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dx \qquad (B_x)$$

funkcije dviju varijabli $f(x, y)$ *ili triju varijabli* $f(x, y, z)$ (zadane u nekom suvislom području), *na projekciji dijela* $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ *ravninske (ili prostorne) krivulje* (put integracije nalazi se također u tom području) na os Ox nazivamo broj, koji dobivamo isto tako kao i krivuljni integral prvog tipa (vidi str. 504 i 505), s jednom razlikom: u etapi 3) ne množimo vrijednosti funkcija $f(\xi_i, \eta_i)$ [odnosno $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$] s duljinom dijelova $A_{i-1}A_i$, već sa njihovom projekcijom na os Ox (v. sl. 321):



Sl. 321

$$pr_x \overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}.$$

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_{i-1}, \qquad (A_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta x_{i-1}. \qquad (B_x)$$

Analogno definiramo krivuljne integrale drugog tipa, po projekciji dijela K krivulje na os Oy [a za slučaj (B) i na os Oz)]:

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta y_{i-1}, \qquad (A_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta y_{i-1}, \qquad (B_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dz = \lim_{\substack{\Delta z_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta z_{i-1}. \qquad (B_z)$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ ili $f(x, y, z)$ neprekinuta, a krivulja na luku K neprekinuta i ima neprekinuto promjenljivu tangentu, tada krivuljni integrali drugog tipa (A_x), (A_y), (B_x), (B_y) i (B_z) postoje.

Izračunavanje krivuljnih integrala drugog tipa svodimo na izračunavanje određenih integrala. Ako su jednadžbe puta integracije zadane u parametarskom obliku (vidi str. 258 i 274)

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{i} \quad \text{(za prostornu krivulju)} \quad z = z(t),$$

tada se integrali (A_x), (A_y), (B_x), (B_y), (B_z) izračunavaju po ovim formulama:

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dx = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\, x'(t)\, dt, \qquad (A_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\, y'(t)\, dt, \qquad (A_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dx = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t)\, dt, \qquad (B_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dy = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t)\, dt, \qquad (B_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dz = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\, z'(t)\, dt. \qquad (B_z)$$

Ovdje su t_0 i T vrijednosti parametra t s obzirom na početak A i kraj B luka. Za razliku od krivuljnog integrala prvoga tipa ovdje nije potrebno da bude $t_0 < T$; ako zamijenimo točke A i B (promjena smjera puta integracije), integrali mijenjaju predznak.

Ako su jednadžbe puta integracije zadane eksplicitno: $y = \varphi(x)$ za ravninsku krivulju i $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ za prostornu

krivulju, i ako a i b odgovaraju apscisama točaka A i B*, tada je u formulama (A_x) — (B_z) apscisa x parametar.

Krivuljni integral općeg oblika**. Ako su u nekom suvislom području zadane dvije funkcije sa dvije varijable $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ ili tri funkcije sa tri varijable $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ i dio K ravninske [ili prostorne] krivulje, tada *krivuljnim integralom općeg oblika* nazivamo sumu integrala drugog tipa po svim projekcijama:

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(K)} P\,dx + \int_{(K)} Q\,dy \qquad \text{za ravninsku krivulju}$$

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(K)} P\,dx + \int_{(K)} Q\,dy + \int_{(K)} R\,dz$$

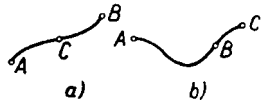
za prostornu krivulju.

Svojstva krivuljnog integrala:

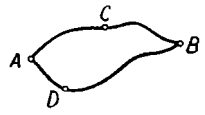
1) Integral se može razdijeliti na dva integrala točkom koja može ležati unutar ili izvan odsječka $\widehat{AB}$:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{AC}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\widehat{CB}} P\,dx + Q\,dy^{***}$$

(sl. 322, *a*, *b*).



Sl. 322



Sl. 323

2) Pri integraciji po istom putu, ali u obratnom smjeru, integral mijenja predznak:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\widehat{BA}} P\,dx + Q\,dy^{***}$$

3) Krivuljni integral općenito zavisi i od početne i konačne točke A i B, i od puta integracije koji ih povezuje:

$$\int_{\widehat{ACB}} P\,dx + Q\,dy \neq \int_{\widehat{ADB}} P\,dx + Q\,dy^{***} \quad \text{(sl. 323)}.$$

* Ovdje zahtjev da je $a < b$ nije obvezatan.

** Vektorsko izlaganje teorije krivuljnog integrala općeg oblika i mehaničko značenje takvog integrala vidi u glavi »Teorija polja« na str. 648.

*** Analogne formule vrijede i za slučaj triju varijabli.

Primjeri izračunavanja krivuljnog integrala:

1) $I = \int_{(K)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, gdje je (K) jedan zavoj zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (vidi str. 314) od $t_0 = 0$ do $T = 2\pi$:

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2 bt \sin t \cos t + ab^2 t \cos t)\,dt = -\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

2) $I = \int_{(K)} y^2\,dx + (xy - x^2)\,dy$, gdje je (K) luk parabole $y^2 = 9x$ od točke $A(0, 0)$ do $B(1, 3)$:

$$I = \int_0^3 \left[\frac{2}{9}y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81}\right)\right] dy = 6\frac{3}{20}.$$

Cirkulacijom nazivamo krivuljni integral po zatvorenoj krivulji (označuje se $\oint_{(C)} P\,dx + Q\,dy$ ili $\oint_{(C)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, gdje je C zatvoren put integracije, kojemu se početak A podudara s krajem B). Cirkulacija općenito nije jednaka nuli.

Površinu lika možemo izračunati kao cirkulaciju

$$S = \frac{1}{2}\oint_{(C)} (x\,dy - y\,dx),$$

gdje je C krivulja koja omeđuje lik (put integracije prolazi se u suprotnom smislu od gibanja kazaljke na satu).

Uvjet nezavisnosti krivuljnog integrala od puta (*integrabilnost totalnog diferencijala*).

Slučaj dviju dimenzija. Da bi krivuljni integral

$$\int P(x, x)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

gdje su P i Q neprekinute funkcije u jednostruko suvislom području, zavisio samo od početne i konačne točke A i B i da ne bi zavisio od puta koji ih spaja i koji leži u tom području, tj. ako za po volji odabrane A i B i po volji odabrane putove ACB i ADB (sl. 323) vrijedi jednadžba $\int_{\widehat{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{ADB}} P\,dx + Q\,dy$, nužno je i dovoljno da postoji takva funkcija dviju varijabli $U(x, y)$, kojoj bi totalni diferencijal bio podintegralni izraz

$$P\,dx + Q\,dy = dU, \tag{1}$$

tj.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

Takva funkcija $U(x, y)$ naziva se primitivnom funkcijom totalnog diferencijala (1).

Nuždan i dovoljan uvjet da primitivna funkcija postoji (uvjet integrabilnosti izraza $P\,dx + Q\,dy$), jest

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

uz uvjet da su te dvije parcijalne derivacije neprekinute.

Slučaj triju dimenzija. Uvjet nezavisnosti krivuljnog integrala

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

od puta integracije je analogan; mora postojati *primitivna* funkcija $U(x, y, z)$ i to takva da je

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU, \tag{1'}$$

tj.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2'}$$

Uvjet integrabilnosti u tom se slučaju sastoji od tri jednadžbe koje moraju biti istovremeno zadovoljene:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3'}$$

uz dodatni uvjet da su te parcijalne derivacije neprekinute.

Izračunavanje primitivne funkcije. Pri ispunjenim uvjetima (3) primitivna funkcija $U(x, y)$ jednaka je krivuljnom integralu

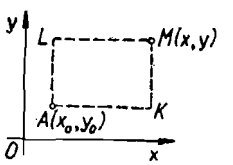
$$U = \int_{\widehat{AM}} P\,dx + Q\,dy$$

za po volji odabrani put [unutar područja gdje su ispunjeni uvjeti (3)], koji spaja po volji odabranu fiksiranu točku A s koordinatama (x_0, y_0), s pomičnom točkom M, kojoj su koordinate (x, y). Praktički je za taj put [ako on ne izlazi iz područja ispunjenih uvjeta (3)] najpodesnije uzeti jednu od dviju lomljenih crta AKM ili ALM sa stranicama koje su paralelne koordinatnim osima (sl. 324). Ovo daje dvije računske formule za primitivnu funkciju $U(x, y)$ totalnog diferencijala $P\,dx + Q\,dy$

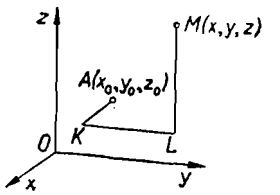
* Primitivna funkcija $U(x, y)$ je potencijal vektorskog polja $Pi + Qj$ (u drugoj terminologiji je ona potencijal sa suprotnim predznakom), vidi str. 649.

$$U = \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KM}} + U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta + C, \tag{4$_1$}$$

$$U = \int_{\overline{AL}} + \int_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi + C'. \tag{4$_2$}$$



Sl. 324



Sl. 325

U trodimenzionalnom slučaju, uz ispunjenje uvjete (3'), analogno računamo primitivnu $U(x, y, z)$ prema ovoj formuli (sl. 325):

$$U = \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KL}} + \int_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta + C \tag{4'}$$

ili prema pet analognih formula koje odgovaraju drugim mogućim lomljenim crtama sa stranicama paralelnim s koordinatnim osima.

Primjeri:

1) $P\,dx + Q\,dy = -\frac{y\,dx}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy}{x^2 + y^2}$; uvjet (3) je zadovoljen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Primjenjujemo formulu (4$_2$), uzimajući u njoj $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ (ne smijemo uzeti $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, jer u točki (0, 0) funkcije P i Q nisu neprekinute!):

$$U = \int_1^y \frac{0 \cdot dy}{0^2 + \eta^2} + \int_0^x \frac{-y\,d\xi}{\xi^2 + y^2} + U(0, 1) =$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C_1.$$

2) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$

$$= z\left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2}\right)dx + \frac{z}{xy^2}\,dy + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz.$$

Uvjeti (3′) su ispunjeni. Primjenjujemo formulu (4′), uzimajući $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$:

$$U = \int_1^x 0 \cdot d\xi + \int_1^y 0 \cdot d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2+\zeta^2} - \frac{1}{xy}\right) d\zeta + C = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

Cirkulacija po ravninskoj zatvorenoj krivulji (krivuljni integral od $P\,dx + Q\,dy$ po zatvorenoj ravninskoj krivulji) *je pri ispunjenim uvjetima* (3) *jednaka nuli* u slučaju ako ta zatvorena ravninska krivulja ne sadrži unutar sebe točaka u kojima je jedna od funkcija P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ili $\frac{\partial Q}{\partial x}$ prekinuta ili nedefinirana.

16. DVOSTRUKI I TROSTRUKI INTEGRALI

Dvostruki integral. Dvostrukim integralom funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$*, koji se odnosi na površinu S

[oznaka: $\int_S f(x, y)\,dS$,

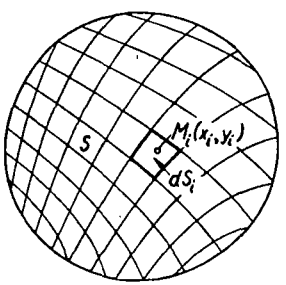
ili $\iint_S f(x, y)\,dS$]

nazivamo broj koji dobivamo ovako:

1) Područje S (sl. 326) razdijelimo na po volji odabran način na n »elementarnih površina«;

2) unutar (ili na rubu) svake elementarne površine odabiremo po volji jednu točku $M_i(x_i, y_i)$;

3) vrijednost funkcije u toj točki $f(x_i, y_i)$ pomnožimo s veličinom površine dS_i pripadne elementarne površine;



Sl. 326

4) sve produkte $f(x_i, x_i)\,dS_i$ koje na taj način dobivamo zbrojimo;

5) izračunamo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,dS_i$, kada se svaka površina steže u točku** i stoga $n \to \infty$.

* Ovdje se u razmatra kao *funkcija točke* (vidi str. 351) koja se ne zadaje samo u Descartesovom koordinatnom sistemu.

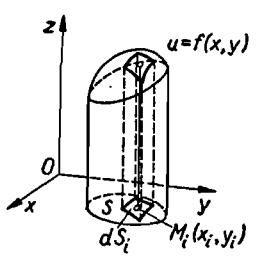
** Nije dovoljno zahtijevati da dS teži k nuli. K nuli mora težiti *dijametar* površine, tj. udaljenost najudaljenijih točaka površine. Površina pravokutnika, na primjer, teži k nuli ako jedna njegova stranica teži k nuli, ali dijametar ostaje konačan.

Ako taj limes postoji i ne zavisi niti od načina razdiobe površine S na elemetarne površine niti od izbora točaka $M_i(x_i, y_i)$, tada se on naziva integralom funkcije u, protegnutim preko površine S (površina S naziva se u tom slučaju *područjem integracije*):

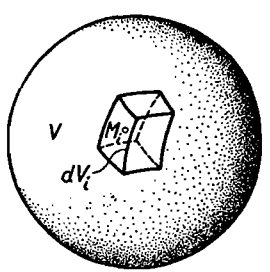
$$\int_S f(x, y)\,dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,dS_i. \qquad (1)$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u čitavom području integracije (zatvorenom, tj. uključujući i točke na rubu površine), tada integral (1) postoji.

Geometrijski smisao dvostrukog integrala je volumen valjkastog tijela (sl. 327) omeđenog: 1) površinom S na ravnini xOy, 2) valjkastom plohom kojoj su izvodnice paralelne s osi O_z a ravnalica je rub površine S i 3) plohom $u = f(x, y)$. Svaki element sume $f(x_i, y_i)\,dS_i$ daje volumen prizmatičnog stupca s bazom dS_i i visinom $f(x_i, y_i)$. Volumen ima predznak »+« ili »—«, ovisno o tome leži li odgovarajući dio plohe $u = f(x, y)$ iznad ili ispod plohe xOy (ako ona siječe tu ravninu, tada se volumen razdijeli na algebarsku sumu pojedinih sumanda).



Sl. 327



Sl. 328

Trostruki integral funkcije triju varijabli $u = f(x, y, z)$ preko volumena V [oznaka $\int_V f(x, y, z)\,dV$ ponekad $\iiint_V f(x, y, z\,dV$], definira se analogno dvostrukom integralu: tijelo V (sl. 328) razdijeli se na »elementarna tijela« i proučavaju se produkti oblika $f(x_i, y_i, z_i)\,dV_i$, gdje je $M_i(x_i, x_i, z_i)$ točka unutar (ili na rubu) elementarnog tijela, a dV_i je njegov volumen. Trostrukim integralom nazivamo limes (ako on postoji i ne ovisi niti o načinu na koji dijelimo V, niti o izboru točaka M_i) sume takvih produkata za sva elementarna tijela na koja je tijelo razdijeljeno, ako se svako

od tih elementarnih tijela steže u točku*, i stoga njihov broj teži prema neizmjerno:

$$\int_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \lim_{\substack{\mathrm{d}V_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{d}V_i \text{ **}.$$

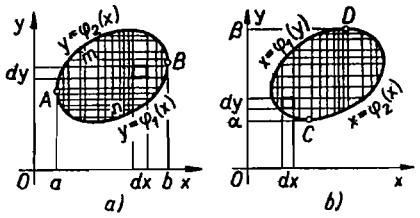
Za trostruki integral neprekinute funkcije vrijedi teorem egzistencije koji je naprijed naveden.

17. IZRAČUNAVANJE VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Izračunavanje dvostrukog i trostrukog integrala svodi se na postupno izračunavanje dvaju (triju) jednostrukih integrala. Ovo se provodi na različite načine, ovisno o izboru koordinatnog sistema.

Dvostruki integral

1) *U Descartesovim koordinatama.* Površinu razdijelimo koordinatnim linijama na pravokutnike (sl. 329, *a*), a zbrajamo



Sl. 329

$f(x, y)\,\mathrm{d}S$ najprije po svim pravokutnicima duž svake vertikalne koordinatne linije, a zatim po svim vertikalnim koordinatnim linijama.

Analitički:

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \text{ ***}$$

gdje su $y = \varphi_2(x)$ i $y = \varphi_1(x)$ jednadžbe gornjeg (*AmB*) i donjeg

* U tom smislu, kao što se to podrazumijevalo i za dvostruki integral: k nuli treba da teži ne veličina volumena, već *dijametar tijela* (udaljenost dviju najviše udaljenih točaka tijela).

** Analogno definiramo *n*-struki integral u *n*-dimenzionalnom prostoru.

*** Dogovorno ne pišemo uglaste zagrade i uzimamo da se integrira »unutarnji« integral (onaj koji stoji na drugom mjestu) po varijabli, koje je diferencijal također »unutarnji« (tj. koji stoji na prvom mjestu).

(*AnB*) dijela krivulje, koja omeđuje S; a i b su apscise lijeve i desne krajnje točke krivulje; $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}S$ (»*element površine u Descartesovim koordinatama*«). Prvu integraciju provodimo tako da se x smatra konstantom.

Izračunavanje u Descartesovim koordinatama možemo izvesti i obrnutim redom (vidi sl. 329, *b*)

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}S = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

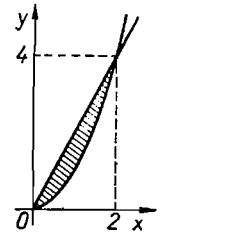
Primjer: $A = \int_S xy^2\,\mathrm{d}S$, gdje je S površina između parabole $y = x^2$ i pravca $y = 2x$ (sl. 330):

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} = \frac{1}{3}\int_0^2 (8x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{5}$$

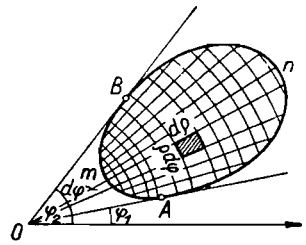
ili

$$A = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 y^2\,\mathrm{d}y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \frac{32}{5}.$$

2) *U polarnim koordinatama.* Površinu razdijelimo koordinatnim krivuljama na elementarne dijelove koji su omeđeni sa dva luka



Sl. 330



Sl. 331

koncentričnih kružnica i sa dvije zrake koje prolaze kroz pol (sl. 331); podintegralna funkcija u polarnim se koordinatama izražava ovako: $w = f(\rho, \varphi)$ i zbraja se u početku duž svakog pojedinog sektora, a zatim po svim sektorima.

Analitički:

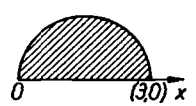
$$\int_S f(\rho, \varphi)\,\mathrm{d}S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (*)$$

gdje su $\rho = \rho_1(\varphi)$ i $\rho = \rho_2(\varphi)$ jednadžbe unutarnjeg ($\widehat{AmB}$) i vanjskog ($\widehat{AnB}$) dijela krivulje koja ograđuje S, a φ_1 i φ_2 polarni kutovi krajnjih radijvektora koji diraju rub površine, $\rho\,d\rho\,d\varphi = dS$ (*element površine u polarnim koordinatama*). Obrnuti red integracije rijetko se primjenjuje.

Primjer: $A = \int_S \rho \sin^2\varphi\,dS$, gdje je S površina polukruga $\rho = 3\cos\varphi$ (sl. 332):

$$A = \int_0^{\pi/2}\int_0^{3\cos\varphi} \rho\sin^2\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{3\cos\varphi} =$$

$$= 9\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = 1\frac{1}{5}.$$



Sl. 332

3) *U bilo kojim krivocrtnim koordinatama* u, v, koje su definirane formulama

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

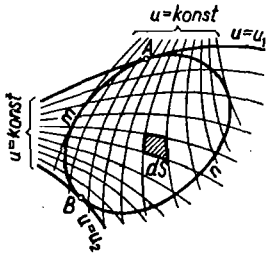
(vidi str. 251). Površinu razdijelimo koordinatnim linijama $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ na elementarne dijelove (sl. 333), podintegralnu funkciju izrazimo u koordinatama u, v, a zbrajamo duž jedne koordinatne pruge (npr. $v = \text{const}$), a zatim po svim koordinatnim prugama. Analitički:

$$\int_S f(u, v)\,dS = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u, v)\,|D|\,dv\,du, \qquad (**)$$

gdje su $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ jednadžbe dijelova $\widehat{AmB}$ i $\widehat{AnB}$ krivulje koja omeđuje S; u_1 i u_2 su koordinate krajnjih krivulja koje omeđuju površinu S, $|D|$ je apsolutna vrijednost Jacobijeve determinante

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$|D|\,dv\,du = dS$ (*element površine u krivocrtnim koordinatama*).



Sl. 333

Formula (*) je poseban slučaj formule (**); za polarne koordinate je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ i Jacobijeva determinanta $D = \rho$.

Izbor krivocrtnih koordinata vršimo tako da granice integrala (**) budu što jednostavnije.

Primjer:

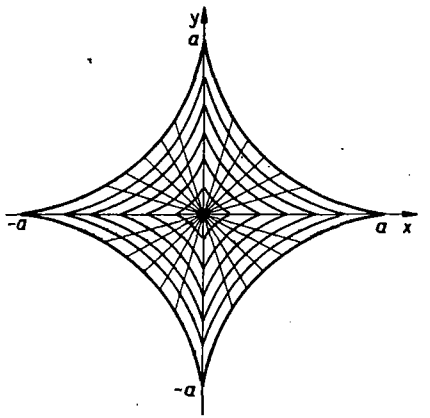
$$A = \int_S f(x, y)\,dS,$$

gdje je S površina astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (sl. 334).

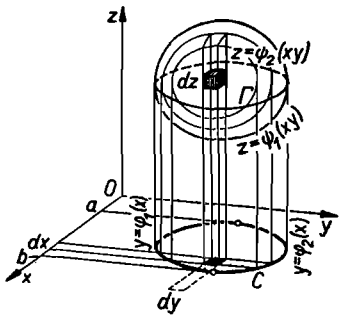
Uvodimo krivocrtne koordinate $x = u\cos^3 v$, $y = u\sin^3 v$. Koordinatne linije: $u = c_1$ je porodica sličnih astroida $x = c_1\cos^3 t$, $y = c_1\sin^3 t$; $v = c_2$ su poluzrake $y = kx$, gdje je $k = \operatorname{tg}^3 c_2$.

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u\cos^2 v\sin v \\ \sin^3 v & 3u\sin^2 v\cos v \end{vmatrix} = 3u\sin^2 v\cos^2 v,$$

$$A = \int_0^a\int_0^{2\pi} f[x(u, v), y(u, v)]\,3u\sin^2 v\cos^2 v\,dv\,du.$$



Sl. 334



Sl. 335

Trostruki integral

1) *U Descartesovim koordinatama.* Volumen razdijelimo koordinatnim plohama (u danom slučaju ravninama) na paralelepipede (sl. 335), a zbrajamo $f(x, y, z)\,dV$ najprije po svim paralelepipedima duž svakog vertikalnog stupca (po z), zatim po stupcima duž svakog »sloja« (po y) i na kraju po svim slojevima (u smjeru x). Analitički:

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx;$$

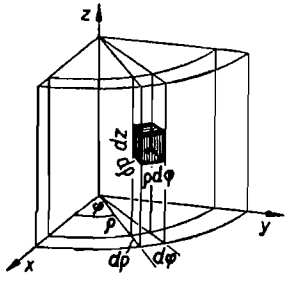
ovdje su $z = \psi_1(x,y)$ i $z = \psi_2(x,y)$ jednadžbe donjeg i gornjeg dijela površine koja omeđuje volumen V, tj. dijelova razdijeljenih krivuljom Γ; $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$ su jednadžbe dijelova krivulje C, koja je projekcija krivulje Γ na ravninu xOy, tj. dijelova omeđenih točkama $x = a$ i $x = b$.

Kao i kod dvostrukog integrala, poredaj integriranja može biti po volji odabran; na taj način izračunavanje trostrukog integrala možemo provesti na šest načina.

Primjer: Treba izračunati integral $I = \int_V (y^2 + z^2)\,dV$, gdje je V volumen piramide omeđene koordinatnim ravninama i ravninom $x + y + z = 1$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,dz \right] dy \right\} dx = \frac{1}{30}.$$



Sl. 336

2) *U cilindričkim koordinatama.* Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim površinama: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. *Element volumena* je $dV = \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$ (sl. 336). Funkciju izrazimo u cilindričkim koordinatama: $f(\rho, \varphi, z)$.

Formula:

$$\int_V f(\rho,\varphi,z)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi. \qquad (*)$$

Primjer (sl. 337): Treba izračunati integral $I = \int_V S\,dV$ na volumenu omeđenom ravninama xOy i xOz, valjkom $x^2 + y^2 = ax$ i kuglom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$*:

* Ako je ovdje $f = 1$, tada je integral numerički jednak volumenu zadanog tijela.

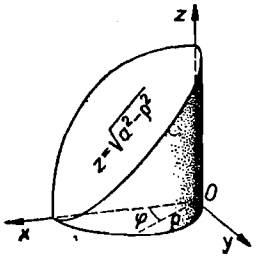
$$z_1 = 0, \qquad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2};$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = a\cos\varphi; \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

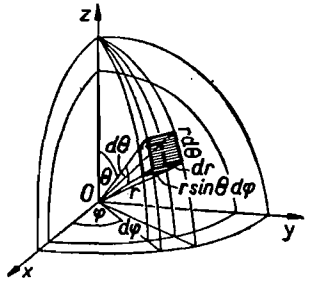
$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\varphi} \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{a\cos\varphi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} dz \right] \rho\,d\rho \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{18}(3\pi - 4).$$

3) *U sfernim koordinatama.* Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim plohama $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\Theta = \text{const}$. *Element volumena:* $dV = r^2 \sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi$ (sl. 338).



Sl. 337



Sl. 338

Funkciju izrazimo u sfernim koordinatama: $f(r, \varphi, \Theta)$:

$$\int_V f(r,\varphi,\Theta)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\Theta_1(\varphi)}^{\Theta_2(\varphi)} \int_{r_1(\Theta,\varphi)}^{r_2(\Theta,\varphi)} f(r,\varphi,\Theta)\,r^2 \sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi. \qquad (**)$$

Primjer: Treba izračunati integral $I = \int_V \frac{\cos\Theta}{r^2}\,dV$ preko volumena stošca, komu je visina jednaka h, a kut pri vrhu 2α i koji je smješten, s obzirom na sistem koordinata, prema slici 339.

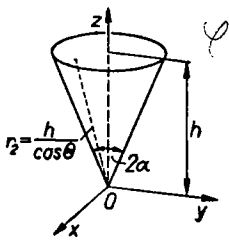
$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{h}{\cos\Theta}, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{h/\cos\Theta} \frac{\cos\Theta}{r^2}\,r^2 \sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \cos\Theta \sin\Theta \left[\int_0^{h/\cos\Theta} dr \right] d\Theta \right\} d\varphi = 2\pi h\,(1 - \cos\alpha).$$

4) *U bilo kojim krivocrtnim koordinatama* u, v, w zadanim formulama

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$



Sl. 339

(vidi str. 271). Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim plohama: $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$.

Element volumena:

$$\mathrm{d}V = |D|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w, \text{ gdje je } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Podintegralnu funkciju izražavamo u koordinatama u, v, w:

$$\int_V f(u, v, w)\,\mathrm{d}V = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} f(u, v, w)\,|D|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \qquad (***)$$

Formule (*) i (**) su posebni slučajevi formule (***); za cilindarske koordinate je $D = \rho$, za sferne $D = r^2 \sin\Theta$. Krivocrtne koordinate izabiremo tako da granice integrala (***) budu po mogućnosti što jednostavnije.

18. PRIMJENA VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Dvostruki integrali

Veličina	Opća formula	U Descartesovim koordinatama	U polarnim koordinatama
Površina plohe	$S = \int_S \mathrm{d}S$	$= \iint \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
		$= \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Površina plohe	$S_{\mathrm{pl}} = \int_S \frac{\mathrm{d}S}{\cos\gamma}$*	$= \iint z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Volumen valjkastog tijela (vidi str. 513)	$V = \int_S z\,\mathrm{d}S$	$= \iint y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \rho^3 \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Moment inercije lika s obzirom na os Ox	$I_x = \int_S y^2\,\mathrm{d}S$	$= \iint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Moment inercije lika s obzirom na pol O	$I_0 = \int_S \rho^2\,\mathrm{d}S$	$= \iint \delta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \delta\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Masa lika s plošnom gustoćom (funkcija točke)	$M = \int_S \delta\,\mathrm{d}S$	$= \iint x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \iint \rho^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$
Koordinate težišta homogenog lika	$x_c = \frac{\int_S x\,\mathrm{d}S}{S}$	$= \frac{\iint x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$	$= \frac{\iint \rho^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\iint \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}$
	$y_c = \frac{\int_S y\,\mathrm{d}S}{S}$	$= \frac{\iint y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$	$= \frac{\iint \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\iint \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}$

* Vidi niže plošni integral. U danom slučaju S je projekcija plohe na ravninu xOy, γ je kut koji zatvara normala elementa plohe sa osi Oz.

Trostruki integrali

Veličina	Opća formula	U Descartesovim koordinatama	U cilindarskim koordinatama	U sfernim koordinatama
Volumen tijela	$V = \int_V \mathrm{d}v$	$= \int\int\int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\int\int \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$	$= \int\int\int r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$
Moment inercije tijela s obzirom na Oz	$I_z = \int_V \rho^2 \mathrm{d}v$	$= \int\int\int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\int\int \rho^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$	$= \int\int\int r^4 \sin^3\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$
Masa tijela gustoće δ kao funkcije točke	$M = \int_V \delta \mathrm{d}v$	$= \int\int\int \delta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\int\int \delta\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$	$= \int\int\int \delta r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$
Koordinate težišta homogenog tijela	$x_c = \dfrac{\int_V x\,\mathrm{d}v}{V}$	$= \dfrac{\int\int\int x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int\int\int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$		
	$y_c = \dfrac{\int_V y\,\mathrm{d}v}{V}$	$= \dfrac{\int\int\int y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int\int\int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$		
	$z_c = \dfrac{\int_V z\,\mathrm{d}v}{V}$	$= \dfrac{\int\int\int z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int\int\int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$		

19. PLOŠNI INTEGRALI PRVOG TIPA

(Integrali po dijelu plohe)*

Definicija. *Plošnim integralom prvog tipa*

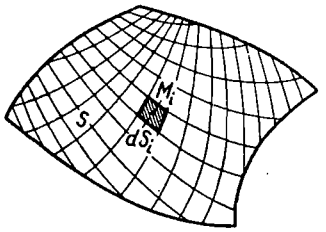
$$\int_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

funkcije triju varijabli $u = f(x, y, z)$ (zadane u nekom suvislom području) *po dijelu* S *zadane plohe* (ovaj se dio nalazi u tom području), nazivamo broj koji dobimo ovako:

1) površinu S (sl. 340) razdijelimo na po volji odabran način na n »elementarnih površina«;

2) unutar (ili na rubu) svake elementarne površine odabiremo po volji jednu točku $M_i(x_i, y_i, z_i)$;

3) vrijednost funkcije $f(x_i, y_i, z_i)$ u toj točki pomnožimo s veličinom pripadnog dijela površine $\mathrm{d}S_i$;



Sl. 340

4) svih n dobijenih produkata $f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{d}S_i$ zbrojimo;

5) potražimo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{d}S_i$, kada se svaka površina steže u točku** i stoga njihov broj $n \to \infty$.

Ako taj limes postoji i ne ovisi niti o načinu na koji smo razdijelili površinu S na elementarne površine niti o izboru točaka $M_i(x_i, y_i, z_i)$, nazivamo ga plošnim integralom prvog tipa

$$\int_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\substack{\mathrm{d}S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{d}S_i.$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y, z)$ neprekinuta u razmatranom području, i ako su funkcije koje izražavaju jednadžbu plohe neprekinute i imaju neprekinute derivacije, tada plošni integral prvog tipa postoji.

Izračunavanje plošnog integrala prvog tipa svodimo na izračunavanje dvostrukog integrala na ravninskom području (vidi str. 514 do 517).

Ako je jednadžba plohe S zadana eksplicitno

$$z = \varphi(x, y),$$

* Ovi su integrali poopćenje dvostrukih integrala (str. 512), kao što je krivuljni integral prvog tipa (str. 504) poopćenje jednostrukog određenog integrala (str. 473).

** U istom smislu kao što je navedeno u opasci** na str. 512.

tada je

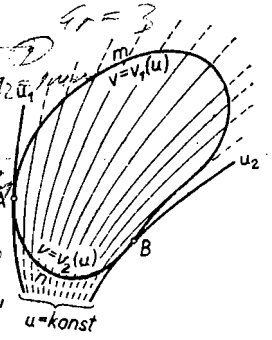
$$\int_S f(x, y, z)\,dS = \iint f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy, \qquad (1)$$

gdje je S' projekcija od S na ravninu xOy, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$*.

Budući da jednadžba normale na plohu $z = \varphi(x, y)$ ima oblik $\dfrac{X - x}{p} = \dfrac{Y - y}{q} = \dfrac{Z - z}{-1}$ (vidi str. 318), to je $\dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \cos\gamma$, gdje je γ kut između smjera normale i osi Oz**. Prema tome jednadžbu (1) možemo pisati u ovom obliku:

$$\int_S f(x, y, z)\,dS = \iint_{S_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\frac{dS_{xy}}{\cos\gamma}, \qquad (2)$$

gdje je $S_{xy} = Pr_{xy}S$.



Sl. 341

Ako je jednadžba plohe zadana u *parametarskom* obliku $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (sl. 365), tada je

$$\int_S f(x, y, z)\,dS = \iint_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad (3)$$

gdje E, F i G imaju vrijednosti navedene na str. 320, $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = dS$ (*element plohe*), a Δ je područje varijabilnosti argumenata u, v, koje odgovara zadanoj površini S. Integral (3) izračunavamo pomoću ponovljene integracije prema formuli

$$\int_S \Phi(u, v)\,dS = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,dv\,du, \qquad (4)$$

* Pri tome se pretpostavlja da je površinica S takva da svakoj točki njene projekcije S' na ravninu xOy jednoznačno pripada jedna točka površine S (točka plohe jednoznačno je određena zadavanjem x i y). Ako to nije, tada se površina S razdijeli na nekoliko dijelova, od kojih svaki ima ta svojstva, a plošni integral po cijeloj površini S smatramo zbrojem integrala po njezinim dijelovima.

Navedenih ograda nema ako je ploha izražena jednadžbama u parametarskom obliku.

** Ovaj kut γ pri izračunavanju plošnog integrala uzimamo da je uvijek šiljast; $\cos\gamma > 0$.

gdje su u_1, u_2 koordinate krajnjih koordinatnih linija $u = \text{const}$, između kojih je obuhvaćena površina S (vidi sl. 341), a $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ jednadžbe rubova, koji omeđuju površinu S (na sl. 341 su to linije AmB i AnB).

Formula (1) je poseban slučaj formule (3) za $u = x$, $v = y$, $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$.

Primjene plošnog integrala prvog tipa:

1) *Površina* zakrivljene plohe S:

$$S = \int_S dS.$$

2) *Masa* nehomogene zakrivljene plohe S, ako je δ varijabilna plošna gustoća [$\delta = f(x, y, z)$]:

$$M_S = \int_S \delta\,dS.$$

20. PLOŠNI INTEGRALI DRUGOG TIPA

(Integrali po projekciji)

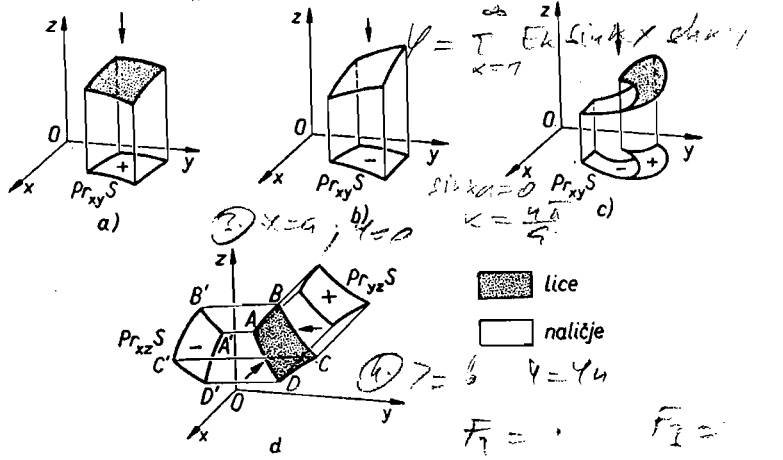
Pojam orijentirane plohe. Obično ploha ima dvije strane, od kojih možemo po volji jednu nazvati licem, a drugu naličjem.* Ploha koje je jedna strana izabrana za lice naziva se orijentiranom. U zatvorenoj plohi, bez samoprodiranja, koja zatvara neki volumen (kugla, elipsoid, itd.) licem obično nazivamo vanjsku stranu, a naličjem unutarnju.

Projekcija orijentirane plohe na koordinatnu ravninu. Ako projiciramo omeđen dio S orijentirane plohe na koordinatnu ravninu, na primjer na ravninu xOy, možemo toj projekciji $Pr_{xy}S$ pripisati predznak »+« ili »—« na ovaj način (sl. 342): Ako na ravninu xOy gledamo s pozitivne strane treće koordinatne osi (u danom slučaju sa strane osi Oz, tj. odozgo), pa vidimo *lice* površine S, tada projekciju $Pr_{xy}S$ smatramo pozitivnom (sl. 342, *a*), ako pak vidimo *naličje*, tada je smatramo negativnom (sl. 342, *b*). Ako pak ploha leži tako da joj vidimo dio lica i dio naličja, tada $Pr_{xy}S$ dobivamo kao algebarsku sumu njenih dijelova koji se vide kao lice

* Postoje plohe kod kojih ne možemo razlikovati dvije strane (npr. Möbiusova vrpca). U matematičkoj analizi takve se plohe ne razmatraju.

i kao naličje (sl. 342, *c*). Na sl. 342, *d* prikazane su projekcije S_{xz} i S_{yz} površine S (jedna je od njih pozitivna, a druga negativna).

Projekcija zatvorene orijentirane plohe na koordinatnu plohu jednaka je nuli.



342

Definicija plošnog integrala drugog tipa po projekciji na koordinatnu ravninu. Plošnim integralom drugog tipa

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy$$

funkcije triju varijabli $f(x, y, z)$ (zadane u nekom suvislom području) protegnutim po projekciji orijentirane površine S (koja leži u tom istom području) na ravninu xOy, nazivamo broj koji dobivamo isto tako kao i plošni integral prvog tipa (vidi str. 523), s jednom razlikom: u etapi 3) vrijednost funkcije $f(x_i, y_i, z_i)$ ne množimo s površinom dS_i, već s veličinom projekcije $\mathrm{Pr}_{xy}dS_1$ te površine (orijentirane) na ravninu xOy (ovu projekciju uzimamo s predznakom »+« ili »—«, vidi naprijed)

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{xy}\,dS_i. \qquad (1_{xy})$$

Analogno definiramo plošne integrale drugog tipa, protegnute po projekciji orijentirane površine S na ravninu yOz i na ravninu zOx:

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{yz}\,dS_i, \qquad (1_{yz})$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{zx}\,dS_i. \qquad (1_{zx})$$

Teorem egzistencije. Plošni integrali drugog tipa (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) postoje, ako su funkcija $f(x, y, z)$ i funkcije koje izražavaju jednadžbu plohe neprekinute i ako imaju neprekinute derivacije.

Izračunavanje plošnih integrala drugog tipa svodi se na izračunavanje dvostrukih integrala. Ako je jednadžba plohe dana *eksplicitno* $z = \varphi(x, y)$, tada integral (1_{xy}) izračunavamo prema formuli

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_{\mathrm{Pr}_{xy}S} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dS_{xy}, \qquad (2_{xy})$$

gdje je $S_{xy} = \mathrm{Pr}_{xy}S$.

Analogno se izračunavaju plošni integrali funkcije $f(x, y, z)$ po projekcijama orijentirane površine S na druge koordinatne ravnine:

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int_{\mathrm{Pr}_{yz}S} f[\psi(y, z), y, z]\,dS_{yz}, \qquad (2_{yz})$$

gdje je $x = \psi(y, z)$ jednadžba plohe S riješena s obzirom na x, $S_{yz} = \mathrm{Pr}_{yz}S$, $S_{zx} = \mathrm{Pr}_{zx}S$;

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int_{\mathrm{Pr}_{zx}S} f[x, \chi(z, x), z]\,dS_{zx}, \qquad (2_{zx})$$

gdje je $y = \chi(z, x)$ jednadžba plohe S rješena s obzirom na os y.

Ako promijenimo orijentaciju plohe (zamjenom lica s naličjem i obrnuto) integral po projekciji mijenja predznak.

Ako je jednadžba plohe zadana u parametarskom obliku

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

tada integrale (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) izračunavamo po formulama:

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv, \tag{3_{xy}}$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\,du\,dv, \tag{3_{yz}}$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\,du\,dv. \tag{3_{zx}}$$

Ovdje su $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ Jacobijeve determinante parova funkcija x, y, z od u, v; Δ je područje varijabilnosti argumenata u, v, koje odgovara danoj površini S.

Plošni integral općeg tipa. Ako su u nekom suvislom području zadane tri funkcije sa tri varijable $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ i orijentirana površina S, tada se *plošnim integralom općeg tipa* naziva zbroj integrala drugog tipa po svim projekcijama:

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_S P\,dy\,dz + \int_S Q\,dz\,dx + \int_S R\,dx\,dy^*.$$

Opća formula kojom se plošni integral općeg tipa svodi na obični dvostruki integral je

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_\Delta \left[P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(x, z)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\,dv,$$

gdje $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ itd. i Δ imaju naprijed navedena značenja.

Svojstva plošnih integrala

1) Ako područje integracije, tj. površinu S, na bilo koji način razdijelimo na dijelove S_1, S_2, tada je

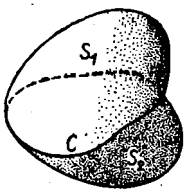
$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy + \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

* Vektorsko tumačenje teorije plošnog integrala općeg tipa vidi u glavi »Teorija polja« (str. 651).

2) Pri promjeni orijentacije plohe (zamjena lica s naličjem i obratno) integral mijenja predznak:

$$\int_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = -\int_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

(ovdje je sa S^+ i S^- označena ista ploha, ali sa dvije suprotne orijentacije).



Sl. 343

3) Plošni integral u *općem slučaju* ovisi kako od krivulje koja površinu S obrubljuje tako i od same plohe: integrali po površinama S_1 i S_2 s istom rubnom krivuljom C (sl. 343) općenito nisu međusobno jednaki:

$$\int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \neq \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Volumen V tijela omeđenog zatvorenom plohom S možemo izračunati kao plošni integral

$$V = \frac{1}{3}\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

gdje je S tako orijentirana da je lice v a n j s k a strana.

21. FORMULE STOKESA, GREENA I OSTROGRADSKOG-GAUSSA*

Formula Stokesa (izražavanje krivuljnog integrala plošnim). Ako je S orijentirana ploha koja leži unutar nekog područja i ako je omeđena zatvorenom krivuljom (K), te ako su P, Q i R funkcije triju varijabli x, y, z zadane u istom području, tada vrijedi relacija

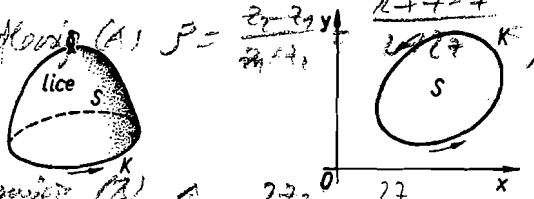
$$\int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx^{**}, \tag{1}$$

* Vektorsko tumačenje ovih teorema vidi u glavi »Teorija polja«, str. 658 i 659.

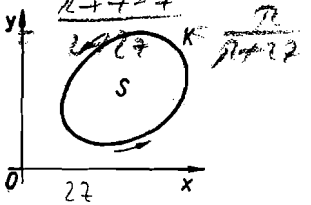
** Formula vrijedi uz uvjet da postoji i neprekinutost funkcija P, Q i R i njihovih derivacija prvog reda.

gdje krivuljni integral na lijevoj strani treba uzeti po rubnoj krivulji K u smislu koji vidi promatrač s pozitivne strane plohe S kao *suprotan gibanju kazaljke na satu* (sl. 344).

Formula Greena je poseban slučaj formule Stokesa za funkcije P, Q dviju varijabli u ravninskom području (izražavanje krivuljnog integrala po ravninskoj krivulji pomoću dvostrukog). Ako je S



Sl. 344



Sl. 345

ravninska površina koja leži unutar nekog područja i ako je omeđena zatvorenom krivuljom K, i ako su P, Q funkcije sa dvije varijable x, y zadane u tom istom području, vrijedi relacija

$$\int_K P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy^*, \qquad (2)$$

gdje krivuljni integral na lijevoj strani uzimamo po rubnoj krivulji u suprotnom smislu gibanja kazaljke na satu (sl. 345).

Formula Ostrogradskog-Gaussa (izražavanje trostrukog integrala plošnim). Ako je S zatvorena orijentirana ploha (lice je pozitivna strana) koja omeđuje volumen V, i ako su P, Q i R funkcije sa tri varijable zadane u jednostruko suvislom području koje uključuje tu plohu, tada vrijedi veza

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy^*. \qquad (3)$$

* Vidi opasku na prednjoj stranici.

IV. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. OPĆI POJMOVI

Diferencijalna jednadžba jest jednadžba s nepoznatim funkcijama, nezavisnim varijablama i derivacijama nepoznatih funkcija (ili njihovim diferencijalima).

Primjeri: 1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$;

2) $x\,d^2y\,dx - dy\,(dx)^2 = e^y(dy)^3$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ako nepoznate funkcije ovise o jednoj nezavisnoj varijabli, onda diferencijalnu jednadžbu nazivamo *običnom* (primjeri 1, 2). Ako nepoznate funkcije ovise o nekoliko nezavisnih varijabli, diferencijalnu jednadžbu nazivamo *parcijalnom diferencijalnom jednadžbom* (primjer 3). *Redom diferencijalne jednadžbe* nazivamo red najviše derivacije ili diferencijala u jednadžbi [jednadžba 1) je prvog reda, jednadžbe 2) i 3) su drugog reda].

Integral diferencijalne jednadžbe je jedna ili više jednadžbi koje povezuju nepoznate funkcije i nezavisne varijable, takve, da dana diferencijalna jednadžba prelazi u identitet, ako u nju uvrstimo nepoznate funkcije i njihove derivacije, dobivene iz tih jednadžbi.

Određivanje integrala diferencijalne jednadžbe nazivamo njenim *integriranjem*. Integral koji eksplicitno izražava nepoznatu funkciju s nezavisnim varijablama nazivamo *rješenjem* diferencijalne jednadžbe.

Integrali diferencijalnih jednadžbi mogu imati konstante ili funkcije koje po volji izabiremo (*po volji odaberive konstante i funkcije*). Na taj način integrali diferencijalne jednadžbe nisu jednoznačno određeni. Nepoznatim funkcijama obično propisujemo dodatne, tzv. *početne* ili *granične* uvjete, koji se sastoje u tome da nepoznate funkcije, a također i neke njihove derivacije, moraju primiti zadane vrijednosti za neke određene vrijednosti nezavisnih varijabli. Uz te dodatne uvjete rješenje može biti jednoznačno. Npr. obična diferencijalna jednadžba $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ima (uz neka ograničenja) jednoznačno rješenje, ako zahtijevamo da $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ primaju zadane vrijednosti za $x = a$ (točnije vidi na str. 545).

Integral diferencijalne jednadžbe jest *opći* ako iz njega možemo dobiti odgovarajućim izborom po volji odaberivih konstanti ili funkcija određeni *partikularni* integral, koji zadovoljava bilo koje početne ili rubne uvjete, kojima je rješenje jednoznačno određeno. Diferencijalna jednadžba može imati tzv. *singularne* integrale, koje ne možemo dobiti iz općeg integrala ni uz kakve posebne vrijednosti po volji odaberivih konstanti ili funkcija (vidi na str. 538).

A. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

2. JEDNADŽBE PRVOG REDA

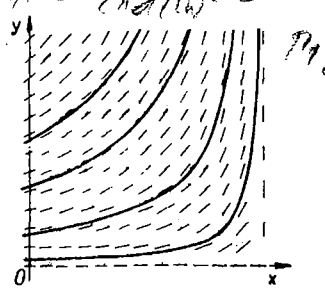
Teoretska objašnjenja. *Teorem o egzistenciji* (Cauchy). Ako je $f(x, y)$ neprekinuta u nekom području u okolini točke (x_0, y_0), tj. za $|x - x_0| < a$ i $|y - y_0| < b$, onda postoji barem jedno rješenje jednadžbe

$$y' = f(x, y), \tag{a}$$

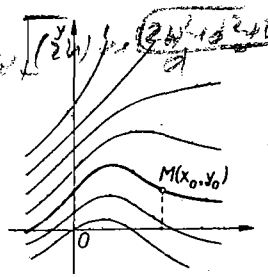
koje za $x = x_0$ dobiva vrijednost y_0 definiranu i neprekinutu u nekom intervalu oko točke x_0. Ako je, povrh toga, u tom području ispunjen *Lipschitzov uvjet*, tj.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N(y_1 - y_2),$$

pri čemu N ne ovisi o x, y_1 i y_2, onda je to rješenje jednoznačno i neprekinuta je funkcija od y_0.



Sl. 346



Sl. 347

Lipschitzov uvjet svakako je ispunjen ako $f(x, y)$ ima u promatranom području ograđenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$. (Primjere u kojima uvjeti Cauchyjeva teorema nisu ispunjeni vidi na str. 539 i 540).

Polje smjerova. Ako kroz točku $M(x, y)$ prolazi graf rješenja $y = \varphi(x)$ diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$, onda koeficijent smjera tangente na graf u zadanoj točki $\left(\text{jednak } \frac{dy}{dx}\right)$ možemo odrediti neposredno iz diferencijalne jednadžbe; na taj način diferencijalna jednadžba određuje u svakoj točki smjer tangente na graf rješenja. Skup tih smjerova tvori *polje smjerova* (sl. 346). Točku, zajedno sa njenim smjerom, nazivamo *elementom* polja smjerova. Integriranje diferencijalne jednadžbe prvog reda svodimo na geometrijsko spajanje elemenata u integralne krivulje, kojima se smjer tangenata u svakoj točki poklapa sa smjerom polja.

U mnogim zadacima imamo polje u kojem susrećemo i vertikalne smjerove, što odgovara tome da $f(x, y)$ postaje neizmjerno. U tim slučajevima zamjenjujemo uloge zavisnoj i nezavisnoj varijabli, smatrajući da je jednadžba

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{b}$$

ekvivalentna zadanoj jednadžbi. U području u kojem su ispunjeni uvjeti Cauchyja za jednadžbu (a) ili (b), kroz svaku točku $M(x_0, y_0)$ prolazi samo jedna integralna krivulja (sl. 347).

Skup svih integralnih krivulja ovisit će o jednom parametru i jednadžba te porodice — opći integral jednadžbe prvog reda — ima jednu po volji odaberivu konstantu. Da iz općeg integrala $F(x, y, C) = 0$ dobijemo partikularan integral $y = \varphi(x)$ koji zadovoljava uvjet $y_0 = \varphi(x_0)$ moramo odrediti C iz jednadžbe

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

Osnovne metode integriranja. *Separacija varijabli.* Ako jednadžbu možemo dovesti u oblik

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0,$$

onda je možemo izraziti u obliku

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0,$$

gdje su varijable x i y separirane; u tu svrhu treba jednadžbu podijeliti sa $P(x) \cdot N(y)$. Nakon toga se opći integral dobiva u obliku

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Ako $P(x)$ ili $N(y)$ postanu jednaki nuli za bilo koje vrijednosti $\bar{x}$ ili $\bar{y}$, onda će $x = \bar{x}$ i $y = \bar{y}$ također biti integrali zadane jednadžbe.

Primjer: $x\,dy + y\,dx = 0$;

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln y + \ln x = C = \ln c; \quad yx = c.$$

Homogene jednadžbe. Ako su $M(x, y)$ i $N(x, y)$ homogene funkcije svojih argumenata jednakog stupnja (vidi na str. 355), onda se u jednadžbama $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ varijable daju separirati (vidi ranije) nakon uvođenja nove varijable $u = \frac{y}{x}$ umjesto y.

Primjer: $y^2\,dx + x(x - y)\,dy = 0$; $y = ux$;

$dy = u\,dx + x\,du$; $\quad u^2x^2\,dx + x^2(1 - u)(x\,du + u\,dx) = 0$;

$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - u)\,du}{u} = 0$; $\quad \ln x + \ln u - u = C = \ln c$, $\quad ux = ce^u$;

$y = ce^{y/x}$. Pravac $x = 0$ bit će također integralna krivulja (vidi ranije, separacija varijabli).

Egzaktnom diferencijalnom jednadžbom nazivamo jednadžbu oblika

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \qquad (*)$$

ako postoji takva funkcija $\Phi(x, y)$ da je

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y)$$

(vidi na str. 374). Ako su u nekom jednostruko suvislom području $M(x, y)$ i $N(x, y)$ neprekinute sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda, onda je uvjet $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nuždan i dovoljan da bi jednadžba (*) bila egzaktna. U tome će slučaju $\Phi(x, y) = C$ biti opći integral jednadžbe (*). Funkciju $\Phi(x, y)$ možemo naći po formuli [vidi na str. 511, formula (4_2)]

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta$$

(x_0 i y_0 su vrijednosti po volji).

Primjer: vidi dalje.

Eulerov multiplikator je funkcija $\mu(x, y)$ sa svojstvom da jednadžba $M\,dx + N\,dy = 0$ pomnožena s njom postaje egzaktna jednadžba. Eulerov multiplikator zadovoljava jednadžbu

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

pri čemu je svako partikularno rješenje te jednadžbe multiplikator.

Ako nam je poznat Eulerov multiplikator μ jednadžbe (*), koja nakon množenja s tim multiplikatorom dobiva oblik $d\Phi(x, y) = 0$, onda će opći oblik Eulerova multiplikatora te jednadžbe biti $\tilde{\mu} = \mu f(\Phi)$, gdje f označava funkciju po volji.

Primjeri: Treba naći rješenje jednadžbe: $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

Jednadžba za Eulerov multiplikator je: $-x\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (x^2 + y)\frac{\partial \ln \mu}{y} = 2$.

Tražimo multiplikator koji ne ovisi o y; tada je $x\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2$ ili $\mu = \frac{1}{x^2}$. Pomnožimo zadanu diferencijalnu jednadžbu sa μ:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

Opći integral ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$) je

$$\Phi(x, y) \equiv \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right)d\xi - \int_0^y d\eta = C \quad \text{ili} \quad x - \frac{y}{x} = C_1.$$

Linearna jednadžba. Jednadžbu oblika

$$y' + P(x)\,y = Q(x),$$

u koju nepoznata funkcija i njena derivacija ulaze kao linearne (tj. u prvoj potenciji) nazivamo *linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.* Ona ima Eulerov multiplikator $\mu = e^{\int P\,dx}$. Opći integral dobivamo po formuli

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C\right]. \qquad (**)$$

Ako svuda u toj formuli zamijenimo neodređeno integriranje s integracijom u granicama od x_0 do x^*, dobivamo rješenje koje ima vrijednost C za $x = x_0$. Ako je poznato ma koje partikularno rješenje $y_1(x)$ linearne jednadžbe, onda njezino opće rješenje dobivamo po formuli $y = y_1 + Ce^{-\int P\,dx}$. Ako poznamo dva linearno nezavisna (vidi na str. 548) partikularna rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ onda opće rješenje linearne jednadžbe dobivamo bez integriranja: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

Primjer: Treba naći rješenje jednadžbe $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$, koje zadovoljava početne uvjete $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Računamo

$$e^{-\int_0^x \mathrm{tg}\,x\,dx} = \cos x$$

* Vidi na str. 408.

i po formuli (**) dobivamo:

$$y = \frac{1}{\cos x}\int_0^x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\sin x\cos x + x}{2}\right] = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2\cos x}.$$

Bernoullijeva jednadžba

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

svodi se na linearnu dijeljenjem sa y^n i supstitucijom nove varijable $z = y^{-n+1}$.

Primjer: $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Ovdje je $n = 1/2$. Dijeljenjem sa $\sqrt{y}$ i supstitucijom nove varijable $z = \sqrt{y}$ dobivamo $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. Po formuli za rješenje linearne jednadžbe izlazi: $e^{\int P\,dx} = \frac{1}{x^2}$ i

$$z = x^2\left[\int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}dx + C\right] = x^2\left[\frac{1}{2}\ln x + C\right];$$

iz toga se dobiva $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$.

Riccatijeva jednadžba

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$$

općenito se ne može integrirati kvadraturama (tj. traženje rješenja ne može se svesti na konačan broj postupnih integracija). Ako je poznato jedno partikularno rješenje y_1 Riccatijeve jednadžbe, onda supstitucijom nove varijable z: $y = y_1 + \frac{1}{z}$ Riccatijevu jednadžbu možemo svesti na linearnu jednadžbu. Ako je poznato još jedno rješenje y_2 Riccatijeve jednadžbe, onda će $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ biti partikularno rješenje linearne jednadžbe za varijablu z, što omogućuje pojednostavnjenje njenog integriranja. Ako su za Riccatijevu jednadžbu poznata tri partikularna rješenja: y_1, y_2 i y_3, onda će njen opći integral biti $\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$.

Zamjenom varijabli $y = \frac{u}{P(x)} + \beta(x)$ Riccatijevu jednadžbu možemo uvijek svesti na normalni oblik

$$\frac{du}{dx} = u^2 + R(x).$$

Supstitucijom $y = -\frac{v'}{P(x)\,v}$ možemo Riccatijevu jednadžbu svesti na linearnu jednadžbu drugog reda (vidi na str. 563):

$$P\,v'' - (P' + PQ)\,v' + P^2Rv = 0.$$

Primjer: $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$. Zamijenimo $y = z + \beta(x)$. Nakon zamjene koeficijent od z u prvoj potenciji je $2\beta + \frac{1}{x}$, i prema tome iščezava ako uzmemo $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$. Dobivamo: $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Prirodno je tražiti partikularno rješenje $z_1 = \frac{a}{x}$. Supstituiranjem dobivamo $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ (dva partikularna rješenja $z_1 = -\frac{3}{2x}, z_2 = \frac{5}{2x}$). Napravimo novu zamjenu: $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$. Dobivamo $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Ako se poslužimo partikularnim rješenjem jednadžbe $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$ nalazimo njeno opće rješenje: $u = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$; odatle je

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^5 + C_1x}.$$

Jednadžbe koje nisu rješive s obzirom na y': $F(x, y, y') = 0$. Ako je u nekoj točki $M(x_0, y_0)$ jednadžba $F(x_0, y_0, p) = 0$, u kojoj je $p = \frac{dy}{dx}$, ima n realnih korijena $p_1, \ldots, p_n$, pri čemu je za $x = x_0$, $y = y_0$, $p = p_i$ funkcija $F(x, y, p)$ sa svojim prvim derivacijama neprekinuta i $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, onda kroz točku M prolazi n integralnih krivulja.

Ako zadanu jednadžbu možemo riješiti s obzirom na y', onda se ona raspada na n jednadžbi prije promatranih oblika; ako ih riješimo, dobivamo jednadžbe n porodica integralnih krivulja. Ako jednadžbe možemo predočiti u obliku $x = \varphi(y, y')$ ili $y = \psi(x, y')$ onda, označivši $y' = p$ i smatrajući p pomoćnom varijablom, nakon diferenciranja po y, odnosno po x dobivamo jednadžbu za $\frac{dp}{dy}$ ili $\frac{dp}{dx}$, koja je riješena po derivaciji. Njeno rješenje zajedno s početnom jednadžbom određuje u parametarskom obliku traženo rješenje.

Primjer: $x = yy' + y'^2$; $y' = p$; $x = py + p^2$. Diferenciramo po y, postavimo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dp} + \frac{py}{1-p^2} = \frac{2p^2}{1-p^2}.$$

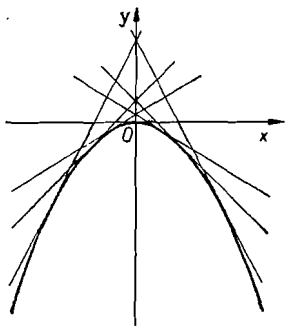
Ta jednadžba je linearna s obzirom na y; ako je riješimo, dobivamo $y = -p + \frac{c + \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}$; ako tom rješenju pridružimo ishodnu jednadžbu $x = py + p^2$, dobivamo traženo rješenje u parametarskom obliku.

Lagrangeova jednadžba $a(y')x + b(y')y + c(y') = 0$ uvijek se može integrirati kvadraturama na prije navedeni način. Ako je $a(p) + b(p)p = 0$ za $p = p_0$, onda je $a(p_0)x + b(p_0)y + c(p_0) = 0$ singularni integral (vidi dalje) Lagrangeove jednadžbe. Ako je $a(p) + b(p)p \equiv 0$, onda imademo *Clairautovu jednadžbu*, koju uvijek možemo svesti na oblik $y = y'x + f(y')$. Njeno opće rješenje je: $y = Cx + f(C)$. Pored općeg rješenja (koje geometrijski daje porodicu pravaca ovisnih o jednom parametru), Clairautova jednadžba ima opći integral koji dobivamo tako da eliminiramo C iz jednadžbe $y = Cx + f(C)$ i $0 = x + f'(C)$ (drugu jednadžbu dobivamo diferenciranjem prve po C; geometrijski je singularni integral ovojnica zadane porodice pravaca, sl. 348 (vidi na str. 307).

Primjer: $y = xy' + y'^2$; opći integral je: $y = Cx + C^2$; singularni integral (pomoću jednadžbe $x + 2C = 0$ eliminiramo C)

$$x^2 + 4y = 0.$$

Integralne krivulje razmatrane diferencijalne jednadžbe prikazane su na sl. 348.



Sl. 348

Singularni integrali: Element (x_0, y_0, y'_0) nazivamo *singularnim* ako on pored jednadžbe $F(x, y, y') = 0$ zadovoljava također jednadžbu $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Integralnu krivulju koju tvore singularni elementi nazivamo *singularnom.* Za sve njene točke narušeno je svojstvo jednoznačnosti rješenja (vidi Cauchyjev teorem na str. 532). Ovojnice (vidi na str. 307) integralnih krivulja (vidi na sl. 348) bit će singularne integralne krivulje. Jednadžba singularne integralne krivulje $\varphi(x, y) = 0$ je *singularni integral.* U pravilu ga ne možemo dobiti iz općeg integrala ni za kakve vrijednosti po volji odaberive konstante. Za traženje singularnog integrala diferencijalne jednadžbe $F(x, y, p) = 0$, gdje je $p = y'$, zadanoj jednadžbi pridružimo jednadžbu $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ i eliminiramo p. Ako je dobivena jednadžba integral zadane diferencijalne jednadžbe, onda će to biti singularni integral (pri tome moramo jednadžbu prethodno svesti na oblik gdje nema višeznačnih funkcija*, posebno radikala). Ako je poznata jednadžba porodice integralnih krivulja, tj. opći integral zadane diferencijalne jednadžbe, onda za traženje ovojnica te porodice, koje daju singularna rješenja, možemo primijeniti metode diferencijalne geometrije (vidi na str. 307).

Primjeri:

1) $x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0.$

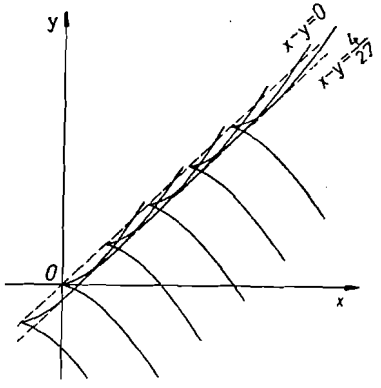
Dopunska jednadžba $\left(\text{tj. } \frac{\partial F}{\partial p} = 0\right)$:

$$-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0.$$

Kada eliminiramo p, dobivamo

a) $x - y = 0$, b) $x - y = \frac{4}{27}$;

a) nije rješenje, b) je singularno rješenje [opće rješenje te jednadžbe: $(y - C)^2 = x - C)^3$]. Integralne krivulje i krivulje a) i b) nacrtane su na sl. 349.



Sl. 349

2) $y' - \ln|x| = 0$. Pišemo jednadžbu u obliku $e^p - |x| = 0$, jer $\ln x$ je višeznačna funkcija (vidi na str. 607). $\frac{\partial F}{\partial p} \equiv e^p = 0$. Kada eliminiramo p, dobivamo singularni integral $x = 0$.

Singularne točke diferencijalne jednadžbe. Za diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey} \qquad (ae - bc \neq 0)$$

točka (0, 0) je *izolirana singularna točka*, jer su u njoj narušeni uvjeti Cauchyjeva teorema (vidi na str. 532), ali su ispunjeni u ma

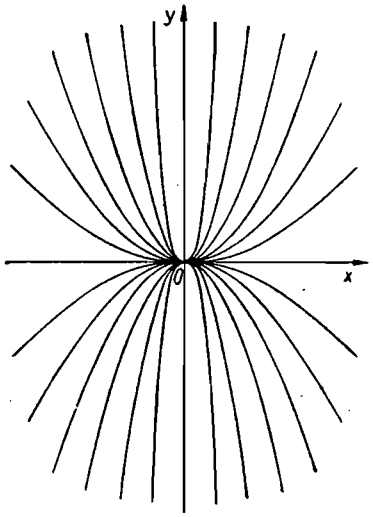
* Uzimaju se u obzir i kompleksne vrijednosti funkcija.

kojoj drugoj po volji bliskoj točki*. Ponašanje integralnih krivulja u blizini te singularne točke ovisi o korijenima *karakteristične jednadžbe*

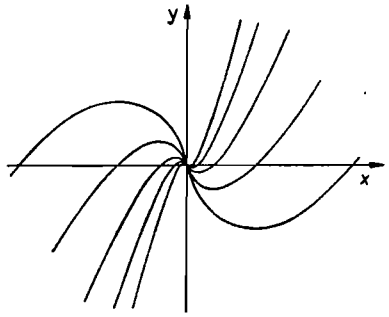
$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ae = 0,$$

i to:

1) Ako su korijeni realni i istog predznaka, onda je singularna točka *čvorna točka.* Sve integralne krivulje u okolini singularne točke prolaze kroz nju i u njoj imaju (ako se korijeni ne poklapaju) zajedničku tangentu, s izuzetkom jedne integralne krivulje. Ako se korijeni poklapaju, onda ili sve krivulje imaju zajedničku tangentu, ili u svakom smjeru kroz singularnu točku prolazi jedna krivulja.



Sl. 350



Sl. 351

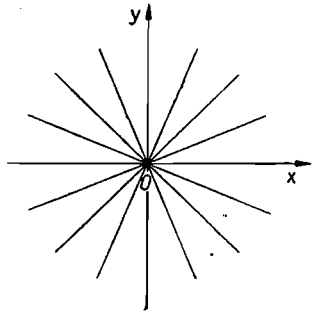
Primjeri: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; integralne krivulje: $y = Cx^2$** (sl. 350); b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; integralne krivulje: $y = x \ln |x| + Cx$ (sl. 351);

* U strogom smislu uvjeti Cauchyjeva teorema narušeni su i za sve one točke za koje je $cx + ey = 0$, ali će oni biti ispunjeni ako zamijenimo uloge zavisne i nezavisne varijable i razmatramo jednadžbu $\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ey}{ax + by}$.

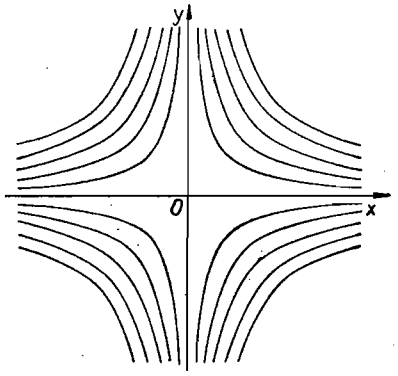
** Pravac $x = 0$ također je sadržan u općem rješenju, što se vidi ako rješenje napišemo u obliku $x^2 = C_1 y$.

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; integralne krivulje $y = Cx$ (sl. 352).

2) Ako su korijeni realni i suprotnog predznaka, onda je singularna točka *sedlasta točka.* Kroz singularnu točku prolaze dvije integralne krivulje.



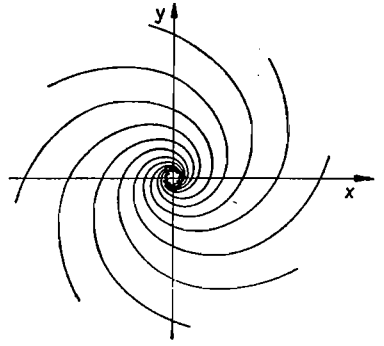
Sl. 352



Sl. 353

Primjer: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$; integralne krivulje: $xy = C$ (sl. 353), za $C = 0$ partikularni integrali su: $x = 0$, $y = 0$.

3) Ako su korijeni konjugirano kompleksni, onda je singularna točka *žarište.* Integralne krivulje se »namataju« na singularnu točku, ovijajući se oko nje bezbroj puta.



Sl. 354

Primjer: $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$; karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i;$$

integralne krivulje (u polarnim koordinatama): $\rho = Ce^{\varphi}$ (sl. 345).

4) Ako su korijeni čisto imaginarni, onda je singularna točka *središte*. Ono je okruženo porodicom zatvorenih integralnih krivulja.

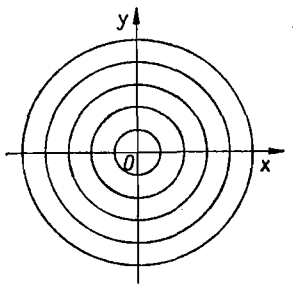
Primjer: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; karakteristična jednadžba:

$\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$

Integralne krivulje: $x^2 + y^2 = C$ (sl. 355). Za jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

singularne točke su one u kojima je $P(x, y) = 0$ i ujedno $Q(x, y) = 0$.



Sl. 355

Uz pretpostavku da su P i Q funkcije s neprekinutim parcijalnim derivacijama, možemo zadanu jednadžbu predočiti u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + P_1(x, y)}{c(x - x_0) + e(y - y_0) + Q_1(x, y)},$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate singularne točke, a $P_1(x, y)$ i $Q_1(x, y)$ su infinitezimalne veličine višeg reda u usporedbi s udaljenošću točke (x, y) od singularne točke. Pokazat će se da će karakter singularne točke zadane diferencijalne jednadžbe biti isti kao i u singularnoj točki *jednadžbe prvog približenja*, koju dobivamo ako odbacimo P_1 i Q_1. *Izuzeci:* a) ako je singularna točka prvog približenja središte, onda singularna točka osnovne jednadžbe može biti središte ili žarište; b) ako je $ae - bc = 0$ (tj. $a/c = b/e$ ili $a = c = 0$, ili $a = b = 0$ itd.), onda pri određivanju karaktera singularne točke treba da razmatramo članove višeg reda.

Aproksimativne metode integriranja. *Metoda postupnog približavanja* (Picard). Jednadžbu $y' = f(x, y)$ s početnim uvjetom $y = y_0$ za $x = x_0$ možemo napisati u obliku

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \qquad (1)$$

Ako na desnoj strani umjesto y uvrstimo bilo koju funkciju $y_1(x)$ dobit ćemo na lijevoj strani novu funkciju y_2, koja se ne poklapa sa y_1, ako y_1 nije već rješenje zadane jednadžbe. Uvrštavanjem y_2 umjesto y u desnu stranu jednadžbe (1) dobivamo funkciju y_3 itd.

Dobiveni niz funkcija $y_1, y_2, y_3, \ldots$ konvergira na nekom intervalu koji sadrži točku x_0 prema traženom rješenju ako su ispunjeni uvjeti za Cauchyjev teorem (vidi na str. 532). Metodu postupnih približenja naziva se ponekad i metodom *iteracije* (vidi na str. 188).

Primjer: $y' = e^x - y^2$; početni uvjeti: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. U integralnom obliku jednadžbu pišemo ovako

$$y = \int_0^x (e^x - y^2)\,dx.$$

Primjenom metode Picarda, počevši s $y_0 = 0$, dobivamo postupno:

$$y_1 = \int_0^x e^x dx = e^x - 1;$$

$$y_2 = \int_0^x [e^x - (e^x - 1)^2]\,dx = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2} \text{ itd.}$$

Primjena redova: Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe u Taylorov red (vidi na str. 395)

$$y = y_0 + (x - x_0)\,y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y_0'' + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}y_0^{(n)} + \ldots$$

možemo napisati ako znamo vrijednosti $y_0', y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n)}, \ldots$ svih njenih derivacija za početnu vrijednost x_0 argumenta. Te vrijednosti možemo naći iz diferencijalne jednadžbe postupnim diferenciranjem i uvrštavanjem početnih uvjeta. Ako je dopušteno neograničeno diferenciranje jednadžbe, dobiveni red uvijek konvergira u okolini početne vrijednosti argumenata. Ta metoda primjenljiva je očigledno i na jednadžbe n-tog reda.

U praksi je često prikladnije tražiti rješenje u obliku reda s neodređenim koeficijentima, koje možemo odrediti iz uvjeta da jednadžba mora biti zadovoljena, kada u nju uvrstimo red.

Primjer: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Uvrstimo

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo*:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + [a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)\,x^4 + \ldots] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots,$$

odakle je $a_1 = 1$, $2a_2 = 1$, $3a_3 + a_1^2 = \frac{1}{2}$, $4a_4 + 2a_1a_2 = \frac{1}{6}$ itd.

* Formulu za kvadrat reda vidi na str. 369.

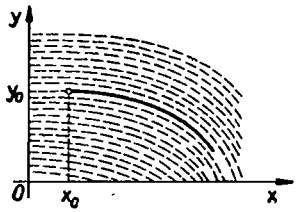
Postupnim rješavanjem tih jednadžbi i uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u red dobivamo:

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

Drugi način; $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Ako uvrstimo u jednadžbu $x = 0$, dobivamo $y_0' = 1$. Dalje $y'' = e^x - 2yy'$; $y_0'' = 1$; $y''' = e^x - 2y'^2 - 2yy''$; $y_0''' = -1$; $y^{IV} = e^x - 6y'y'' - 2yy'''$, $y_0^{IV} = -5$ itd. Po Taylorovoj formuli dobivamo

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

Grafičko integriranje jednadžbi osniva se na pojmu polja smjerova (vidi na str. 533). Integralnu krivulju približno nacrtamo lomljenom crtom koja izlazi iz zadane početne točke (sl. 356), a sastavljena je od malih odsječaka; smjer svakog odsječka podudara se sa smjerom polja u početnoj točki odsječka, koja je ujedno konačna točka prethodnog odsječka.



Sl. 356

Numerično integriranje. Pri numeričkom integriranju jednadžbe $y' = f(x, y)$ postupno sastavljamo tablicu tražene funkcije za vrijednosti argumenta $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$. U tu se svrhu za računanje $y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f[x, y(x)]\,dx$ obično koristimo bilo kojom formulom aproksimativnog integriranja. Za računanje razlike najčešće upotrebljavamo ove formule

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3}\right], \qquad (A)$$

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2}\right]. \qquad (B)$$

Formulom (A) nalazimo prvo približenje y_{k+1} izračunavamo f_{k+1} i dobivamo drugo približenje y_{k+1} po formuli (B). Na isti način možemo naći i treće približenje, ali obično nastojimo da izaberemo korak tako, da nam to ne bude potrebno.

Primjer: Prije dobiveni članovi reda za rješenje jednadžbe $y' = e^x - y^2$, uz početne uvjete $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, omogućavaju nam da izračunamo na četiri decimalne vrijednosti y za $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ i $x_3 = 0{,}3$. Za računanje postupnih vrijednosti y načinimo tablicu po ovoj shemi (po stepeničastoj crti)

x	y	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0,0000	1,0000	942	—147	—35
0,1	0,1048	1,0942	795	—182	—21
0,2	0,2183	1,1737	613	—203	
0,3	0,3389	1,2350	410		
0,4	0,4646	1,2760			

Vrijednost y_3 korisno je provjeriti po formuli (B):

$y_3 = 0{,}2183 + 0{,}1\,(1{,}2350 - 0{,}0306 + 0{,}0015 + 0{,}0001) = 0{,}3389.$

Dalje, za $x_4 = 0{,}4$ po formuli (A) dobivamo

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2350 + 0{,}0306 - 0{,}0076 - 0{,}0013) = 0{,}1257.$$

Iz $y_4 = 0{,}4646$ izračunamo vrijednost f_4 i produžujemo tablicu, a po formuli (B) nalazimo:

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2760 - 0{,}0205 + 0{,}0017 + 0{,}0001) = 0{,}1257.$$

Kako se vrijednost y^4 nije promijenila, činimo naredni korak itd.

Umjesto formula razlike (A) i (B) možemo također upotrijebiti i formule

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h\,[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}], \qquad (A_1)$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\,[f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}]. \qquad (B_1)$$

Opisane metode lako ćemo primijeniti na sisteme diferencijalnih jednadžbi.

3. JEDNADŽBE VIŠEGA REDA I SISTEMI JEDNADŽBI

Teoretska objašnjenja. *Teorem egzistencije.* Svaku jednadžbu n-tog reda

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

uvođenjem novih varijabli $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, $\dots$, $y_{n-1} = y^{(n-1)}$ možemo svesti na sistem n jednadžbi

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Općenitiji sistem jednadžbi

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

ima jednoznačno određen sistem rješenja $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, definiran i neprekinut u nekom području $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, koji za $x = x_0$ poprima zadane početne vrijednosti: $y_i(x_0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ako su funkcije $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ neprekinute za sve varijable i zadovoljavaju *Lipschitzov uvjet*

$$|f_i(x, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \ldots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \ldots + |\Delta y_n|)$$

za vrijednosti x, y_i i $y_i + \Delta y_i$, koje leže u nekom području blizu zadanih početnih vrijednosti. Suglasno s time jednadžba $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ima jednoznačno rješenje koje zadovoljava početne uvjete: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ za $x = x_0$ neprekinuto je sa svojim derivacijama do zaključno $(n-1)$-vog reda, ako je funkcija $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ neprekinuta i zadovoljava gore navedeni Lipschitzov uvjet za funkciju $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Opće rješenje. Za jednadžbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

opće rješenje ima n nezavisnih konstanti

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Geometrijski ta jednadžba definira n-parametarsku porodicu integralnih krivulja; pojedinu integralnu krivulju (graf odgovarajućeg partikularnog rješenja) dobivamo iz te porodice određenim izborom vrijednosti po volji odaberivih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ako partikularni integral mora zadovoljavati gore zadane početne uvjete, onda vrijednosti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ određujemo iz jednadžbi

$$y(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Ako te jednadžbe za po volji odabrane početne vrijednosti u nekom području nisu snošljive, onda rješenje u tom području nije opće — po volji odaberive konstante nisu nezavisne.

Za sistem (*) *opće rješenje* ima također n po volji odaberivih konstanti i može biti dano ili u obliku riješenom po nepoznatim funkcijama

$$y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n), \quad y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, \quad y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n)$$

ili u obliku riješenom po konstantama:

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \quad \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \ldots, \quad \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n.$$

U posljednjem slučaju svaka jednadžba $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i$ je *prvi integral* sistema (*). Prvi integral možemo odrediti neovisno o općem kao relaciju toga oblika između $x, y_1, \ldots, y_n$, u kojoj lijeva strana postaje konstanta ako umjesto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uvrstimo bilo koje rješenje zadanog sistema. Svaki prvi integral sistema (*) zadovoljava linearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0,$$

i obrnuto, svako rješenje $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ te jednadžbe jest prvi integral sistema (*). Skup n nezavisnih (vidi na str. 355) prvih integrala sistema (*) tvori njegov opći integral.

Sniženje reda jednadžbe. Jedna od osnovnih metoda integracije jednadžbi n-tog reda je zamjena varijabli, čime dobivamo jednostavnije jednadžbe, napose, jednadžbe nižeg reda.

Jednadžbu koja ne sadržava eksplicitno x: $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ svodimo na jednadžbu $(n-1)$-vog reda nakon zamjene:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \quad \text{itd.}$$

Primjer: $yy'' - y'^2 = 0$, $p = y'$, $p\frac{dp}{dy} = y''$, $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $y\frac{dp}{dy} - p = 0$, $p = Cy = \frac{dy}{dx}$; $y = C_1e^{Cx}$ (kada skratimo sa p ne gubimo nijedno rješenje jer $p = 0$ daje $y = C_1$, što je sadržano u općem rješenju za $C = 0$).

Jednadžba koja ne sadržava eksplicitno y: $f(x, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, dopušta sniženje reda pri zamjeni $y' = p$. Ako jednadžba nema k prvih derivacija, moramo načiniti zamjenu $y^{(k+1)} = p$.

Primjer: $y'' - xy''' + (y'')^3 = 0$. Zamjena $y'' = p$ vodi nas na Clairautovu jednadžbu: $p - x\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3 = 0$. Njeno opće rje-

šenje je $p = C_1x + C_1^3$. Odatle je $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_1^3x^2}{2} + C_2x + C_3$.

Singularno rješenje Clairautove jednačbe $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}$ daje singularno rješenje početne jednadžbe

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2} + C_1x + C_2.$$

Jednadžbi $f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, u kojoj je funkcija f *homogena* (vidi na str. 355) *s obzirom na* $y, y', \ldots, y^{(n)}$, možemo sniziti red uvođenjem nove funkcije $z = \frac{y'}{y}$ $\left(\text{tj. } y = e^{\int z\,dx}\right)$.

Primjer: $yy'' - y'^2 = 0$; $z = \frac{y'}{y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y^2}$, stoga je $z = C_1$, odakle je $\ln y = C_1x + C_2$ ili Ce^{C_1x}, gdje je $\ln C = C_2$.

Jednadžba $y^{(n)} = f(x)$. Opće rješenje dobivamo postupnim integriranjem u obliku

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1} + \psi(x),$$

gdje je

$$\psi(x) = \int\int \ldots \int f(x)\,(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Ovdje x_0 nije dodatna konstanta po volji. S promjenom x_0 mijenja se i C_k, jer je $C_k = \frac{1}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0)$.

Linearne jednadžbe. Linearnim jednadžbama n-tog reda nazivamo jednadžbe oblika

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = F, \qquad \text{(L)}$$

gdje su a_i i F (*desna strana*) funkcije od x, koje ćemo pretpostaviti neprekinutim u nekom intervalu. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstante, onda jednadžbu nazivamo *jednadžbom s konstantnim koeficijentima.* Linearnu jednadžbu nazivamo *homogenom* ako je $F = 0$, a *nehomogenom* u protivnom slučaju.

Sistem rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene linearne jednadžbe nazivamo *fundamentalnim*, ako su te funkcije *linearno nezavisne* u promatranom intervalu, tj. ako linearna kombinacija $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ ni za kakve vrijednosti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ osim za $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ nije identički nula (za sve vrijednosti x u danom intervalu). Rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene linearne jednadžbe tvore fundamentalni sistem onda i samo onda, ako je *determinanta Wronskoga*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

različita od nule. Za svaki sistem rješenja homogene linearne jednadžbe vrijedi *Liouvilleova formula*

$$W(x) = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}$$

zbog čega determinanta W može biti jednaka nuli samo identički [tj. samo ako je $W(x_0) = 0$]. Ako $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tvore fundamentalni sistem rješenja, onda je $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ opće rješenje linearne homogene jednadžbe.

Ako je poznato jedno partikularno rješenje y_1 homogene jednadžbe, onda red jednadžbe možemo sniziti i sačuvati linearnost uvođenjem nove nepoznate funkcije $u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$.

Teorem superpozicije. Ako su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe (L) za različite desne strane F_1 i F_2, onda će njihova suma $y = y_1 + y_2$ biti rješenje takve iste jednadžbe s desnom stranom $F = F_1 + F_2$. Odatle izlazi da je za dobivanje općeg rješenja nehomogene jednadžbe dovoljno da nekom njenom partikularnom rješenju dodamo opće rješenje homogene jednadžbe.

Teorem rastavljanja. Ako jednadžba (L) ima realne koeficijente i $F = F_1 + iF_2$, gdje su F_1 i F_2 također realni, njeno rješenje je kompleksno $y = y_1 + iy_2$, pri čemu su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe (L) s desnom stranom jednakom F_1 odnosno F_2.

Rješenje nehomogene jednadžbe (L) možemo dobiti pomoću kvadratura, ako je poznat fundamentalni sistem rješenja pripadne homogene jednadžbe, na jedan od ovih načina:

Metoda varijacije konstanti. Napisat ćemo traženo rješenje u obliku $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, smatrajući da $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nisu konstante nego funkcije od x. Ako zahtijevamo da su zadovoljene relacije

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0, \end{aligned}$$

dobivamo uvrštenjem y u jednadžbu (L):

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = F.$$

Kada riješimo linearni sistem jednadžbi, nađemo C_1', C_2', ..., C_n' i dalje kvadraturama C_1, C_2, ..., C_n.

Cauchyjeva metoda. U općem rješenju homogene jednadžbe $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ odredit ćemo konstante tako da za $x = \alpha$ bude $y = 0$, $y' = 0$, ..., $y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n-1)} = F(\alpha)$, gdje je α parametar po volji. Ako sada tako dobiveno rješenje homogene jednadžbe označimo sa $\varphi(x, \alpha)$, onda će $\int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$ biti partikularno rješenje jednadžbe (L), koje za $x = x_0$ iščezava zajedno sa svojim derivacijama do zaključno $(n-1)$-tog reda.

4. RJEŠAVANJE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Operatorska oznaka. Jednadžbu (L) (vidi na str. 548) možemo napisati simbolički u obliku

$$P_n(D)\, y \equiv (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\, y = F,$$

gdje je D operator diferenciranja

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Ako su koeficijenti a_i konstantni, onda je $P_n(D)$ polinom n-tog stupnja u operatoru D (s numeričkim koeficijentima).

Rješavanje homogene jednadžbe $P_n(D)y = 0$. Da nađemo opće rješenje, najprije moramo naći korijene r_1, r_2, ..., r_n algebarske jednadžbe (vidi na str. 178 do 184) $P_n(r) = 0$ (*karakteristična jednadžba*). Svakom korijenu r_i odgovara rješenje e^{r_ix} jednadžbe $P_n(D)y = 0$. Ako je r_i k-struki korijen, onda su $xe^{r_ix}, x^2e^{r_ix}, \ldots, x^{k-1}e^{r_ix}$ također rješenja. Linearna kombinacija tih rješenja za sve korijene r_i

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + e^{r_ix}(C_i + C_{i+1}x + \ldots + C_{i+k-1}x^{k-1}) + \ldots$$

opće je rješenje homogene jednadžbe.

Ako među korijenima ima i kompleksnih (oni mogu biti samo konjugirano kompleksni*) npr. ako je $r_1 = \alpha + i\beta$,

* Pretpostavljamo da su koeficijenti a_k realni.

$r_2 = \alpha - i\beta$, onda u pripadnim članovima općeg rješenja moramo funkcije e^{r_1x} i e^{r_2x} zamijeniti sa $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Pri tom dobiveni izraz oblika $C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ možemo predočiti također u obliku $A\cos(\beta x + \varphi)$, gdje su A i φ konstante po volji.

Primjer: Za jednadžbu $y^{VI} + y^{IV} - y'' - y = 0$ karakteristična jednadžba $r^6 + r^4 + r^2 - 1 = 0$ ima korijene: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_{3,4} = i$, $r_{5,6} = -i$. Opće rješenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$$

ili

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + A_1\cos(x + \varphi_1) + x\,A_2\cos(x + \varphi_2).$$

Hurwitzov teorem. U teoriji titranja i drugim primjenama često je važno ustanoviti da neko rješenje dane linearne homogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima teži k nuli kada $x \to +\infty$. To nastupa onda kada su realne komponente svih korijena karakteristične jednadžbe negativne. Svi korijeni jednadžbe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

imat će negativne realne komponente onda i samo onda, ako su sve determinante

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix}, \quad \text{(gdje je } a_m = 0, \text{ za } m > n\text{)}$$

pozitivne (*Hurwitzov teorem*).

Rješenje nehomogene jednadžbe s konstantnim koeficijentima možemo uvijek naći metodom varijacije konstanti ili Cauchyjevom metodom (vidi na str. 549 i 550). Druga metoda je operatorska (vidi na str. 557). Najjednostavnije dobivamo partikularno rješenje takove jednadžbe onda, kada desna strana ima specijalan oblik (vidi dalje).

Specijalna desna strana. U nekim slučajevima partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $P_n(D)y = F(x)$ možemo naći jednostavnim algebarskim postupkom.

Ako su $F(x) = Ae^{kx}$ i $P_n(k) \neq 0$, onda je partikularno rješenje $y = \frac{Ae^{kx}}{P_n(k)}$. Ako je k m-struki korijen karakteristične jednadžbe,

tj. $P_n(k) = P_n'(k) = \ldots = P_n^{(m-1)}(k) = 0$, onda je partikularno rješenje $y = \dfrac{Ax^m e^{kx}}{P_n^{(m)}(k)}$. Pomoću teorema rastavljanja (str. 549) možemo se koristiti tim formulama i u slučaju kada je $F(x) = Ae^{kx}\cos\omega x$ ili $Ae^{kx}\sin\omega x$. Pripadno partikularno rješenje dobivamo kao realni ili imaginarni dio rješenja iste jednadžbe za desnu stranu: $F(x) = Ae^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}$.

Primjeri: 1) Za jednadžbu $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ partikularno rješenje je $y = -\dfrac{xe^{2x}}{2}$, gdje je $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ i $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2\cdot 2 - 6 = -2$. 2) Za jednadžbu $y'' + y' + y = e^x \sin x$ partikularno rješenje $y_1 = \dfrac{e^x}{13}(2\sin x - 3\cos x)$, dobijemo kao imaginarni dio rješenja

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x(\cos x + i\sin x)}{2 + 3i}$$

jednadžbe $(D^2 + D + 1)y = e^{(1+i)x}$.

Ako $F(x)$ ima oblik $Q_p(x)e^{kx}$, gdje je $Q_p(x)$ polinom p-tog stupnja, uvijek možemo naći partikularno rješenje istog oblika, tj. $y = R(x)e^{kx}$. Ovdje je $R(x)$ polinom p-tog stupnja pomnožen sa x^m, ako je k m-struki korijen karakteristične jednadžbe. Ako to rješenje napišemo s neodređenim koeficijentima u $R(x)$ i zahtijevamo da zadovoljava danu jednadžbu, dobivamo linearnu algebarsku jednadžbu za određivanje nepoznatih koeficijenata*.

Primjer: $y^{IV} + 2y''' + y'' = 6x + 2x\sin x$; korijeni karakteristične jednadžbe su $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = -1$. Na osnovu teorema superpozicije (vidi na str. 549) možemo tražiti odvojeno partikularna rješenja koja odgovaraju pojedinim sumandima desne strane. Postavimo $y_1 = x^2(ax + b)$ i uvrstimo u jednadžbu, dobivamo $12a + 2b + 6ax = 6x$, odakle je $a = 1$, $b = -6$. Isto tako za drugi sumand postavimo $y_2 = (cx + d)\sin x + (fx + g)\cos x$, što daje $(2g + 2f - 6c + 2fx)\sin x - (2c + 2d + 6f + 2cx)\cos x = 2x\sin x$, odakle je $c = 0$, $d = -3$, $f = 1$, $g = -1$. Konačno će opće rješenje biti

$$y = c_1 + c_2x - 6x^2 + x^3 + (c_3x + c_4)e^{-x} - 3\sin x + (x - 1)\cos x.$$

* Ovu metodu napose primjenjujemo ako je $F(x) = Q_p(x)$ (tj. $k = 0$) i ako je $F(x) = Q_p(x)e^{rx}\cos\omega x$ ili $F(x) = Q_p(x)e^{rx}\sin\omega x$, što odgovara $k = r \pm i\omega$. U posljednjem slučaju rješenje treba postaviti u obliku

$$y = x^m e^{rx}[M_p(x)\cos\omega x + N_p(x)\sin\omega x].$$

Eulerovu jednadžbu oblika $\sum_{k=0}^{n} a_k(cx + d)^k y^{(k)} = F(x)$ svodimo na linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima uvrštenjem $cx + d = e^t$.

Primjer: Jednadžba $x^2y'' - 5xy' + 8y = x^2$ nakon uvrštenja $x = e^t$ prelazi u jednadžbu $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = e^{2t}$, koju smo promatrali na str. 552. Prema tome je

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - \frac{t}{2}e^{2t} = C_1x^2 + C_2x^4 - \frac{x^2}{2}\ln x.$$

5. SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Normalni sistemi prvog reda. Najjednostavniji slučaj sistema linearnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima su tzv. *normalni* sistemi

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,\\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad (N)$$

Da nađemo opće rješenje takvog sistema moramo prije svega riješiti algebarsku *karakterističnu jednadžbu**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Svakom jednostrukom korijenu r_i karakteristične jednadžbe odgovara sistem partikularnih rješenja

$$y_1 = A_1e^{r_ix},\ y_2 = A_2e^{r_ix},\ \ldots,\ y_n = A_ne^{r_ix}, \qquad (*)$$

gdje koeficijente A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo iz sistema linearnih homogenih jednadžbi

$$\begin{aligned} (a_{11} - r_i)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn} - r_i)A_n &= 0. \end{aligned}$$

* O determinantama vidi na str. 189.

Ukoliko iz tog sistema možemo odrediti samo međusobne omjere veličina A_k (vidi na str. 197), sistem partikularnih rješenja za svaki r_i dobiven navedenom metodom ima po jednu po volji odaberivu konstantu. Ako su svi korijeni karakteristične jednadžbe različiti, onda će suma svih takvih partikularnih rješenja sadržavati n nezavisnih po volji odaberivih konstanti i dat će opće rješenje sistema. Ako bilo koji korijen r_i karakteristične jednadžbe ima višestrukost m, onda će tom korijenu odgovarati sistem partikularnih rješenja oblika

$$y_1 = A_1(x)\,e^{r_i x}, \quad y_2 = A_2(x)\,e^{r_i x}, \ldots, y_n = A_n(x)\,e^{r_i x},$$

gdje su $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ polinomi stupnja ne višeg od $m-1$. Kada izraze s neodređenim koeficijentima uvrstimo u zadani sistem, a koeficijente uz jednake potencije x na lijevoj i desnoj strani skratimo sa $e^{r_i(x)}$, dobivamo jednadžbe kojima možemo izraziti sve nepoznate koeficijente pomoću bilo kojih m između njih. U nekim slučajevima stupanj polinoma može biti niži od $m-1$. Napose u slučaju kada je sistem (N) simetričan (tj. $a_{ik} = a_{ki}$), dovoljno je da uzmemo $A_i(x) = \text{const}$. Ako među korijenima karakteristične jednadžbe ima kompleksnih, onda pripadne članove općeg rješenja svodimo na realan oblik, isto kao i u slučaju jedne jednadžbe s konstantnim koeficijentima (vidi na str. 551).

Primjer: Za sistem

$$y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3; \quad y_2' = -2y_1 + 4y_2 + y_3;$$
$$y_3' = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3$$

karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0.$$

Za jednostruki korijen $r_1 = 6$ dobivamo

$$-4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0, \quad -2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0,$$
$$-3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0,$$

odakle je

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = C_1, \quad \text{tj. } y_1 = 0, \quad y_2 = C_1 e^{6x}, \quad y_3 = 2C_1 e^{6x}.$$

Za višestruki korijen $r_2 = 1$ stavimo

$$y_1 = (P_1 x + Q_1)\,e^x, \quad y_2 = (P_2 x + Q_2)\,e^x, \quad y_3 = (P_3 x + Q_3)\,e^x.$$

Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo

$$P_1 x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)\,x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3);$$
$$P_2 x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)\,x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3);$$
$$P_3 x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)\,x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3),$$

odakle je

$$P_1 = 5C_2, \quad P_2 = C_2, \quad P_3 = 7C_2; \quad Q_1 = 5C_3 - 6C_2, \quad Q_2 = C_3,$$
$$Q_3 = 7C_3 - 11C_2.$$

Opće rješenje sistema je

$$y_1 = (5C_2 x + 5C_3 - 6C_2)\,e^x, \quad y_2 = C_1 e^{6x} + (C_2 x + C_3)\,e^x,$$
$$y_3 = 2C_1 e^{6x} + (7C_2 x + 7C_3 - 11C_2)\,e^x.$$

Homogeni sistemi prvog reda. Opći oblik sistema linearnih homogenih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako determinanta $|\,a_{ik}\,|$* nije nula, onda taj sistem možemo dovesti na normalni oblik. Isto rješenje možemo dobiti neposredno iz danog sistema istom metodom kao i u slučaju normalnog sistema. Karakteristična jednadžba dobiva oblik $|\,a_{ik}r + b_{ik}\,| = 0$, a koeficijente A_i rješenja (*), koji pripadaju jednostrukom korijenu r_i, u tom slučaju određujemo iz jednadžbe

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} r_i + b_{ik})\,A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

U ostalom je metodika traženja rješenja ista kao i u slučaju normalnog sistema.

Slučaj $|\,a_{ik}\,| = 0$ zahtijeva dopunska razmatranja.

Primjer: $5y_1' + 4y_1 - 2y_2' - y_2 = 0; \quad y_1' = 8y_1 - 3y_2 = 0.$

Karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 5r+4 & -2r-1 \\ r+8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0; \quad r_1 = 1; \quad r_2 = -2.$$

* Skraćena oznaka determinante s elementima a_{ik}.

Naći ćemo A_1 i A_2 za $r_1 = 1$: $9A_1 - 3A_2 = 0$, $9C_1 - 3A_2 = 0$, ili $A_2 = 3A_1 = 3C_1$; točno kao i za $r_2 = -2$ dobivamo $A_2 = 2A_1 = 2C_2$. Odatle je opće rješenje:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x}, \qquad y_2 = 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}.$$

Nehomogeni sistemi linearnih jednadžbi prvog reda. *Opći oblik*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Teorem superpozicije. Ako su $y_j^{(1)}$ i $y_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ rješenja nehomogenih sistema kojima se razlikuju samo desne strane jednake $F_i^{(1)}$ odnosno $F_i^{(2)}$, onda je $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ rješenje istog sistema jednadžbi kojima su desne strane $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$. Odatle slijedi da je za opće rješenje nehomogenog sistema dovoljno da njenom partikularnom rješenju dodamo opće rješenje pripadnog homogenog sistema. Pri računanju partikularnog rješenja nehomogenog sistema možemo primijeniti *metodu varijacije konstanti*: opće rješenje homogenog sistema uvrstimo u nehomogeni sistem i konstante $C_1, \ldots, C_n$ zamijenimo nepoznatim funkcijama $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$. Pri tom se u izrazima za derivaciju y_k' javljaju članovi sa derivacijama novih nepoznatih funkcija $C_k(x)$. Uvrštenjem u zadani sistem, na lijevim stranama ostaju samo ti dodatni članovi, a ostali se međusobno krate, jer je $y_1, \ldots, y_n$ po pretpostavci rješenje homogenog sistema. Na taj način za $C_k'(x)$ dobivamo nehomogeni sistem linearnih algebarskih jednadžbi. Kada ih riješimo sa n integracija, dobivamo funkcije $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Uvrštenjem tih funkcija umjesto konstanti u rješenje homogenog sistema dobivamo traženo partikularno rješenje.

Primjer: $5y_1' + 4y_1 - 2y_2' - y_2 = e^{-x}$; $y_1' + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$.

Opće rješenje homogenog sistema (v. str. 555) je $y_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}$; uvrstivši ga u zadane jednadžbe i smatrajući da su C_1 i C_2 funkcije od x, dobivamo:

$$5C_1'e^x + 5C_2'e^{-2x} - 6C_1'e^x - 4C_2'e^{-2x} = e^{-x};$$

$C_1'e^x + C_2'e^{-2x} = 5e^{-x}$ ili $C_2'e^{-2x} - C_1'e^x = e^{-x}$, $C_1'e^x + C_2'e^{-2x} = 5e^{-x}$.

Odatle $2C_1'e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{const}$; $2C_2'e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + \text{const}$. Uzmimo da su sve const. $= 0$ (jer tražimo samo partikularno rješenje). Dobivamo $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$; opće rješenje je: $y_1 = 2e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}$.

U slučaju specijalnih desnih strana oblika $Q_p(x)e^{kx}$, možemo uspješno primijeniti metodu neodređenih koeficijenata, analognu metodi opisanoj na str. 552 za jednu jednadžbu n-tog reda.

Sistemi drugog reda. Ranije opisane metode možemo prenijeti na sisteme linearnih jednadžbi višeg reda. Napose je i za sisteme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k'' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

moguće tražiti partikularno rješenje oblika $y_i = A_ie^{r_ix}$, gdje se r_i određuje iz karakteristične jednadžbe $|a_{ik}r^2 + b_{ik}r + c_{ik}| = 0$, a A_i iz odgovarajućih linearnih homogenih algebarskih jednadžbi.

6. OPERATORSKA METODA RJEŠAVANJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Transformacija funkcija. *Transformatom* zadane funkcije (*originala*) $\varphi(t)$ po Carsonu-Heavisideu nazivamo funkciju kompleksne varijable p, koja je definirana jednadžbom

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt. \qquad (*)$$

Pri tome smatramo da je za $t < 0$, $\varphi(t) = 0$, za $t > 0$ zadovoljena je nejednadžba $|\varphi(t)| < Me^{at}$, u kojoj su M i a neke pozitivne konstante.

Metodom teorije funkcija kompleksne varijable možemo dobiti *formulu obrata* kojom jednoznačno određujemo original $\varphi(t)$, ako znamo njen transformat $f(p)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{s-ir}^{s+ir} e^{pt}\frac{f(p)}{p}\,dp,$$

gdje s izabiremo tako da sve singularne točke podintegralne funkcije leže lijevo od pravca $\mathrm{Re}\,p = s$ (o integriranju funkcija kompleksne varijable vidi na str. 620). Relaciju (*) ćemo pisati u obliku $f(p) \div\!\!\rightarrow \varphi(t)$*. U tablici na str. 562 navedene su neke jednostavnije funkcije i njihovi transformati.

Osnovna svojstva transformiranih funkcija. Iz formule (*) možemo dobiti

---

* Funkciju $\frac{f(p)}{p}$ $f(p)$ nazivamo *transformatom* $\varphi(t)$ *po Laplaceu* ili kratko *L-transformatom*.

$$\frac{d\varphi}{dt} \div\!\!\rightarrow pf(p) - \varphi(0)p; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} \div\!\!\rightarrow p^2 f(p) - p^2\varphi(0) - p\varphi'(0); \ldots$$

$$\ldots; \frac{d^n\varphi}{dt^n} \div\!\!\rightarrow p^n f(p) - p^n\varphi(0) - p^{n-1}\varphi'(0) - \ldots - p\varphi^{(n-1)}(0)^*;$$

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt \div\!\!\rightarrow \frac{1}{p} f(p); \quad \varphi(at) \div\!\!\rightarrow f\left(\frac{p}{a}\right), \quad (a = \text{const} > 0).$$

Ako je $\varphi_1(t) \div\!\!\rightarrow f_1(p)$ i $\varphi_2(t) \div\!\!\rightarrow f_2(p)$, onda je
$a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \div\!\!\rightarrow a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)$.

Teorem pomaka. Ako je $\varphi(t) \div\!\!\rightarrow f(p)$, onda je

$$e^{-at}\varphi(t) \div\!\!\rightarrow \frac{p}{p+a} f(p+a).$$

Teorem retardacije. Ako je $\varphi(t) \div\!\!\rightarrow f(p)$ i $\lambda > 0$, onda je

$$e^{-\lambda p} f(p) \leftarrow\!\!\div \begin{cases} \varphi(t-\lambda) & \text{za } t > \lambda, \\ 0 & \text{za } t < \lambda. \end{cases}$$

Borelov teorem. Ako je $\varphi_1(t) \div\!\!\rightarrow f_1(p), \varphi_2(t) \div\!\!\rightarrow f_2(p)$, onda je

$$\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau \div\!\!\rightarrow \frac{1}{p} f_1(p) f_2(p).$$

Impulsna funkcija. Original za $f(p) = p$ je tzv. *delta-funkcija* $\delta(t)$, koja postaje jednaka nuli za $t \neq 0$, a neizmjerna za $t = 0$, tako da je pri tome $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$. Tu funkciju možemo definirati i drukčije, npr. $\delta(t) = \lim_{h\to 0} f(t,h)$, gde je $f(t,h) = \frac{1}{h}$ za $0 < t < h$ i $f(t,h) = 0$ izvan tog intervala. Delta-funkcija služi za predočivanje trenutnih impulsa (mehaničkih, električkih itd., vidi primjer 3 na str. 561).

* Pri tom pretpostavljamo da $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ zadovoljava gore uvedenu nejednadžbu za funkcije koje imaju transformat.

Operatorska metoda. Ta metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi sastoji se u biti u tome da od jednadžbe za nepoznatu funkciju pređemo na jednadžbu za njen transformat (tzv. *pomoćnu jednadžbu*). Ta jednadžba nije diferencijalna nego obična algebarska. Kada dobijemo transformat, pomoću njega izračunamo traženu funkciju. Na taj način osnovna teškoća operatorske metode nije rješavanje jednadžbe, nego prijelaz od funkcije na njen transformat i obrnuto.

Linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

$$L_n(D)\,y \equiv (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = F(t),$$

(D je operator diferenciranja po nezavisnoj varijabli t).

Neka je $y(t) \div\!\!\rightarrow \bar{y}(p)$, $F(t) \div\!\!\rightarrow \bar{F}(p)$. Tada će na osnovu formula sa str. 558 pomoćna jednadžba glasiti

$$L_n(p)\,\bar{y} = \bar{F}(p) + (p^n y_0 + p^{n-1}y_0' + \ldots + py_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + \ldots + py_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-2}(p^2 y_0 + py_0') + a_{n-1}p\bar{y}_0 \equiv F(p) + M(p), \quad (**)$$

gdje su $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ vrijednosti funkcija y i njenih derivacija za $t = 0$. U jednostavnijem slučaju, kada je $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$, vrijedi $M(p) \equiv 0$. Rješenje koje pripada tim početnim uvjetima nazivamo *normalnim*. Iz $(**)$ izlazi da je $\bar{y} = \frac{\bar{F}(p) + M(p)}{L_n(p)}$.

Da nađemo y, često primjenjujemo metodu rastavljanja na parcijalne razlomke (vidi na str. 169) i formule (2) do (9) iz tablice na str. 562. Kako te formule u brojniku imaju p, obično rastavljamo razlomke s nazivnikom $pL_n(p)$ i rezultat pomnožimo sa p. U jednostavnijem slučaju, kada su svi korijeni p_k nazivnika $L_n(p)$ različiti, a brojnik $P_m(p)$ je polinom stupnja ne većeg od n, to dovodi do *formule Heavisideovog razvoja*

$$\frac{P_m(p)}{L_n(p)} \leftarrow\!\!\div \frac{P_m(0)}{L_n(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{P_m(p)}{pL_n'(p)}\right]_{p=p_k} \cdot e^{p_k t}.$$

Ako $\frac{\bar{F}(p)}{L_n(p)}$ nije racionalna funkcija, onda rastavljamo na elementarne razlomke $\frac{1}{pL_k(p)}$ i služimo se formulama

$$\frac{\bar{F}(p)}{p-a} \leftarrow\div e^{at}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\mathrm{d}x$$

ili

$$\frac{\bar{F}(p)}{(p-a)^m} \leftarrow\div \frac{e^{at}}{(m-1)!}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\,(t-x)^{m-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ako među korijenima jednadžbe $L_n(p)=0$ ima kompleksnih, upotreba posljednih formula u međuračunima može dovesti do kompleksnih veličina, ali konačni rezultat uvijek se može predočiti u realnom obliku.

Primjeri: 1) Nađimo normalno rješenje jednadžbe

$$y'''-y''-y'+y=t.$$

$$L(p)=(p+1)(p-1)^2,\quad M(p)=0,\quad \bar{F}(p)=\frac{1}{p};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{p(p+1)(p-1)^2}=\frac{p}{p^2(p+1)(p-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{p}+1+\frac{1}{4}\frac{p}{p+1}-\frac{5}{4}\frac{p}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}.$$

Odatle, na osnovu formula (1), (2) i (9) na str. 562, dobivamo

$$y=t+1+\frac{1}{4}e^{-t}+\left(\frac{1}{2}t-\frac{5}{4}\right)e^{t}.$$

2) Nađimo opće rješenje jednadžbe $y''+m^2y=a\sin mt$;

$$L(p)=p^2+m^2;\qquad \bar{F}(p)=\frac{amp}{m^2+p^2}.$$

$$M(p)=p^2y_0+py_0';\qquad \bar{y}=\frac{amp}{(p^2+m^2)^2}+\frac{p^2y_0+py_0'}{p^2+m^2}.$$

Da bismo mogli upotrijebiti formule iz tablice na str. 562, pretvorimo prvi sumand u oblik $A\frac{p(p^2-m^2)}{(p^2+m^2)^2}+B\frac{pm}{p^2+m^2}$. Metodom neodređenih koeficijenata nalazimo A i B, a pomoću formula (3), (4) i (8) sa str. 562, dobivamo

$$y=\left(y_0-\frac{a}{2m}t\right)\cos mt+\frac{a+2my_0'}{2m^2}\sin mt.$$

3) Nađimo zakon gibanja materijalne točke mase m pod djelovanjem trenutnog impulsa A, koji djeluje u momentu $t=0$. Početna koordinata je $x_0=0$, a početna brzina je $x_0'=0$.

Jednadžba gibanja je $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=A\,\delta(t)$. Pomoćna jednadžba je $mp^2\bar{x}=Ap$, odakle je $\bar{x}=\frac{A}{mp}$, tj. $x=\frac{At}{m}$.

Sistemi linearnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Zamijenimo svaku jednadžbu sistema pripadnom pomoćnom jednadžbom, analogno onome što je bilo pokazano ranije za jednu jednadžbu, te riješimo dobiveni *algebarski* sistem linearnih jednadžbi za transformate nepoznatih funkcija. Pri tome pretpostavljamo da je determinanta sistema različita od nule*. Za prijelaz od transformata na original obično se, kao i za jednu jednadžbu, koristimo metodom rastavljanja na parcijalne razlomke.

Primjer: $(5D+4)y_1-(2D+1)y_2=e^{-x}$; $(D+8)y_1-3y_2=5e^{-x}$. Za $x=0$ je $y_1=y_{10}$, $y_2=y_{20}$. Pomoćne jednadžbe glase

$$(5p+4)\bar{y}_1-(2p+1)\bar{y}_2=\frac{p}{p+1}+5py_{10}-2py_{20};$$

$$(p+8)\bar{y}_1-3\bar{y}_2=\frac{5p}{p+1}+py_{10}.$$

Riješimo ih po $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$, pa nakon rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo

$$\bar{y}_1=\frac{2p}{p+1}+(3y_{10}-y_{20}-3)\frac{p}{p+2}+(-2y_{10}+y_{20}+1)\frac{p}{p-1};$$

$$\bar{y}_2=\frac{3p}{p+1}+(6y_{10}-2y_{20}-6)\frac{p}{p+2}+(-6y_{10}+3y_{20}+3)\frac{p}{p-1},$$

odakle je

$$y_1=2e^{-x}+(3y_{10}-y_{20}-3)e^{-2x}+(1-2y_{10}+y_{20})e^{x},$$
$$y_2=3e^{-x}+(6y_{10}-2y_{20}-6)e^{-2x}+(3-6y_{10}+3y_{20})e^{x}.$$

Primjenu operatorskih metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi vidi na str. 596.

* Slučaj da determinanta postane jednaka nuli veoma je rijedak, i zahtijeva dopunska ispitivanja.

Tablica transformiranih funkcija po Carsonu-Heavisideu

	$\varphi(t)\quad (t>0)$*	$f(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(p)\,dt$
1.	$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$	$\frac{1}{p^n}$
2.	e^{-at}	$\frac{p}{p+a}$
3.	$\sin kt$	$\frac{pk}{p^2+k^2}$
4.	$\cos kt$	$\frac{p^2}{p^2+k^2}$
5.	$e^{-at}\sin kt$	$\frac{pk}{(p+a)^2+k^2}$
6.	$e^{-at}\cos kt$	$\frac{p(p+a)}{(p+a)^2+k^2}$
7.	$t\sin kt$	$\frac{2kp^2}{(p^2+k^2)^2}$
8.	$t\cos kt$	$\frac{p(p^2-k^2)}{(p^2+k^2)^2}$
9.	$e^{-at}\frac{t^n}{n!}$	$\frac{p}{(p+a)^{n+1}}$
10.	$\frac{(2t)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\sqrt{p}}{p^n}$ (n je cio broj, >0)
11.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\sqrt{p}e^{-a\sqrt{p}}\quad (a>0)$
12.	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$pe^{-a\sqrt{p}}$
13.	$1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right)\quad (a>0)$**	$e^{-a\sqrt{p}}$
14.	$J_0(t)$***	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
15.	$I_0(t)$***	$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}$
16.	$\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$	$\ln(1+p)$

* Za $t<0$ uvijek je $\varphi(t)=0$.
** Definiciju $\Phi(x)$ vidi na str. 798.
*** O Besselovim funkcijama $J(x)$ i $I(x)$ vidi na str. 564 do 566.

7. LINEARNE JEDNAŽDBE DRUGOG REDA

Opće metode. *Jednadžba* $y''+p(x)y'+q(x)y=F(x)$. Opće rješenje homogene jednadžbe $[F(x)=0]$ glasi

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

gdje su y_1 i y_2 njena dva nezavisna partikularna rješenja (vidi na str. 549). Ako poznamo jedno partikularno rješenje y_1, drugo možemo odrediti po formuli

$$y_2=Ay_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}dx,\quad \text{gdje je } A \text{ po volji,} \qquad (*)$$

što je posljedica Liouvilleove formule (vidi na str. 549). Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe u ovom slučaju možemo dobiti po formuli

$$y=\frac{1}{A}\int_{x_0}^{x}F(\xi)e^{\int p(\xi)\,d\xi}[y_2(x)\,y_1(\xi)-y_1(x)\,y_2(\xi)]\,d\xi,$$

gdje su y_1 i y_2 ranije naznačena partikularna rješenja homogene jednadžbe s istom lijevom stranom.

Da nađemo partikularno rješenje nehomogene jednadžbe, možemo također primijeniti metodu varijacija konstanti (vidi na str. 549).

Ako su u jednadžbi $s(x)y''+p(x)y'+q(x)y=F(x)$ funkcije $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ i $F(x)$ polinomi ili se mogu razviti u konvergentan red po potencijama $x-x_0$ u nekom području, i $s(x_0)\neq 0$, onda se i rješenja te jednadžbe također razvijaju u konvergentan red po potencijama $x-x_0$ u istom području. Ta rješenja možemo naći metodom neodređenih koeficijenata: traženo rješenje u obliku reda $y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$ uvrstimo u zadanu jednadžbu; izjednačimo koeficijente s jednakim potencijama $x-x_0$, pa dobivamo jednadžbe za računanje a_0, a_1, a_2.

Primjer: $y''+xy=0$. Kada postavimo
$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^3+\ldots$,
$y''=2a_2+6a_3x+\ldots$, dobivamo:

$$2a_2=0,\quad 6a_3+a_0=0,\quad \ldots,\quad n(n-1)a_n+a_{n-3}=0,\quad \ldots$$

Riješimo te jednadžbe, pa dobivamo $a_2=0$, $a_3=-\frac{a_0}{2\cdot 3}$, $a_4=-\frac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5=0$, $\ldots$, odakle je

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \ldots\right).$$

Jednadžba $x^2y'' + xp(x)\,y' + q(x)\,y = 0$. Ako se funkcije $p(x)$ i $q(x)$ mogu razviti u konvergentan red po potencijama x, onda metodom neodređenih koeficijenata možemo naći rješenja oblika

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots).$$

Vrijednosti eksponenta r dobivamo iz *odredbene jednadžbe*

$$r(r-1) + p(0)\,r + q(0) = 0.$$

Ako su korijeni te jednadžbe različiti i njihova razlika nije cio broj, dobivamo dva nezavisna rješenja naše jednadžbe. U protivnom slučaju metoda neodređenih koeficijenata daje samo jedno rješenje.

Jednadžba (*) sa str. 563 može poslužiti ili za neposredno određivanje drugog rješenja, ili za određivanje oblika u kome možemo naći to rješenje metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer: Za Besselovu jednadžbu (vidi dalje), za n cio broj, metodom neodređenih koeficijenata možemo dobiti samo jedno rješenje oblika $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k}$ $(a_0 \neq 0)$, koje se podudara sa $J_n(x)$ s tačnošću do konstantnog faktora. Kako je ovdje $e^{-\int p\,dx} = \frac{1}{x}$, drugo rješenje po formuli (*) bit će

$$y_2 = Ay_1\int \frac{dx}{x\cdot x^{2n}(\sum a_kx^{2k})^2} = Ay_1\int \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^{2k}}{x^{2n+1}}dx = By_1\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} d_kx^{2k}.$$

Postupno računanje koeficijenata c_k i d_k iz a_k dosta je složeno, ali se posljednjim izrazom možemo koristiti za računanje rješenja metodom neodređenih koeficijenata (očigledno je da takav oblik ima razvoj u red funkcija $Y_n(x)$, vidi dalje).

Besselova jednadžba $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$. Odredbena jednadžba je $r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0$, odakle $r = \pm n$. Uvrštenjem $y = x^n(a_0 + a_1x + \ldots)$, u jednadžbu dobivamo, ako koeficijent od x^{n+k} izjednačimo s nulom: $k(2n+k)\,a_k + a_{k-2} = 0$; za $k = 1$ izlazi $(2n+1)\,a_1 = 0$. Ako k prima vrijednosti $2, 3, \ldots$, dobivamo $a_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$;

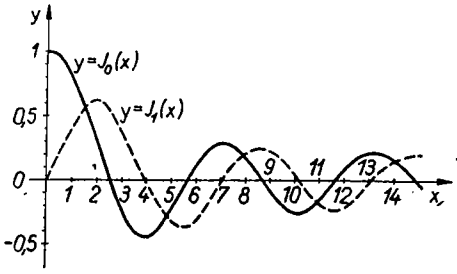
$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}; \qquad a_4 = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)}, \quad \ldots;$$

a_0 je po volji odaberiv.

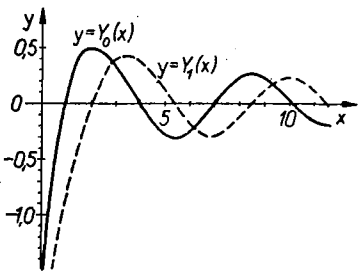
Besselove funkcije. Dobiveni red za $a_0 = \frac{1}{2^n\,\Gamma(n+1)}$* definira *Besselovu* (ili cilindarsku) funkciju n-tog reda prve vrste.

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}.$$

Grafovi funkcija J_0 i J_1 nacrtani su na sl. 357.



Sl. 357



Sl. 358

Opće rješenje Besselove jednadžbe za n koji nije cio broj ima oblik: $y = C_1J_n(x) + C_2J_{-n}(x)$, gdje je funkcija $J_{-n}(x)$ određena redom koji dobivamo iz prije navedenog reda za $J_n(x)$, ako n zamijenimo sa $-n$. Kada je n cio broj, vrijedi $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. U općem rješenju u tom slučaju $J_{-n}(x)$ moramo zamijeniti Besselovom funkcijom druge vrste $Y_s(x)$ (*Weberova funkcija*) koja je definirana jednadžbom

$$Y_n(x) = \lim_{m\to n}\frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}**.$$

Grafovi funkcija Y_0 i Y_1 nacrtani su na sl. 358.

U nekim primjenama susrećemo Besselove funkcije čisto imaginarnog argumenta: pri tome obično promatramo produkte $i^{-n}J_n(ix)$, koje označavamo sa $I_n(x)$:

* O funkciji Γ vidi na str. 208.

** Ponekad se ta funkcija označava sa $N_n(x)$.

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,\Gamma(n+3)} + \cdots$$

Te funkcije su rješenja diferencijalne jednadžbe

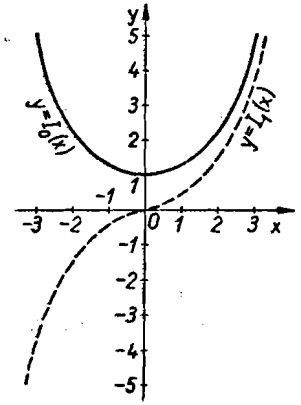
$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)\,y = 0.$$

Kao drugo rješenje te jednadžbe obično izabiremo *Macdonaldovu funkciju*

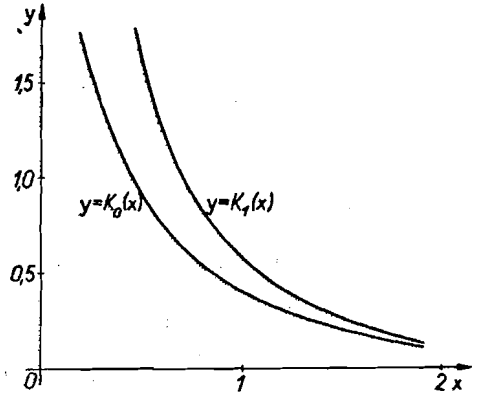
$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}.$$

Taj izraz teži k određenom limesu, kada n teži k cijelom broju.

Grafovi funkcija I_0 i I_1 prikazani su na sl. 359, a funkcija K_0 i K_1 na sl. 360. Tablice funkcija $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ vidi na str. 91 i 92.



Sl. 359



Sl. 360

Osnovne formule za Besselove funkcije

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x); \qquad \frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x}J_n(x) + J_{n-1}(x);$$

[te formule vrijede i za funkcije $Y_n(x)$];

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x}; \qquad \frac{dI_n(x)}{dx} = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x}I_n(x);$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n\,K_n(x)}{x}; \qquad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x}K_n(x).$$

Za n cio broj je: $J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi;$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\,d\varphi$$

ili u kompleksnom obliku

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi.$$

$J_{n+1/2}(x)$ možemo izraziti elementarnim funkcijama, a napose je

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Odatle možemo izraze $J_{n+1/2}(x)$ za bilo koji cijeli n dobiti postupnom primjenom ranije navedenih formula za rekurziju.

Za velike vrijednosti x imamo ove asimptotske formule

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

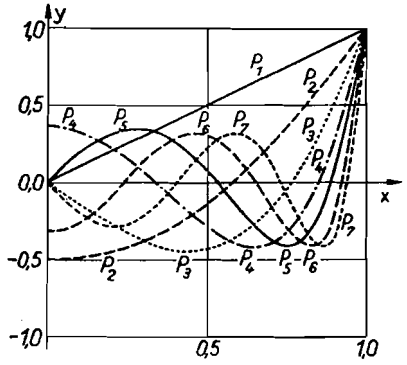
$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

gdje $O\left(\frac{1}{x}\right)$ označava neizmjerno malu veličinu istog reda kao i $\frac{1}{x}$ (vidi na str. 345).

Legendreova jednadžba $(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0$. Za n cio broj jedno od rješenja su *Legendreovi polinomi* (*kugline funkcije*)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

Grafove funkcija $P_n(x)$ od $n=1$ do $n=7$ vidi sl. 361. Tablice tih funkcija vidi na str. 93.



Sl. 361

$$P_0(x)=1;\qquad P_1(x)=x;$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x);$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

Osnovna svojstva Legendreovih polinoma:

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pm\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(x\pm\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

(predznak je u obje formule po volji);

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x);$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx}=n[xP_n(x)-P_{n-1}(x)];$$

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0\text{ za }m\neq n,\qquad\int_{-1}^{+1}[P_m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2m+1}.$$

Legendreove polinome možemo dobiti razvojem u red po potencijama z funkcije

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=P_0(x)+P_1(x)\,z+P_2(x)\,z^2+\ldots\quad(|z|<1).$$

Hipergeometrijska jednadžba

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

gdje su α, β i γ parametri, obuhvaća veći broj važnih posebnih slučajeva. Na primjer, za $\alpha=n+1$, $\beta=-n$, $\gamma=1$ i $x=\frac{1-z}{2}$ ona se pretvara u Legendreovu diferencijalnu jednadžbu.

Ako je γ različit od nule i nije cio negativan broj, onda je partikularno rješenje hipergeometrijske jednadžbe *hipergeometrijski red*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot2\ldots(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1}+\ldots,\qquad(1)$$

koji za $|x|<1$* apsolutno konvergira. Ako je $2-\gamma$ različito od nule i nije cio negativan broj, onda je partikularno rješenje hipergeometrijske jednadžbe

$$y=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x).$$

U nizu slučajeva hipergeometrijski red se svodi na jednostavne elementarne funkcije, npr.

$$F(1,\beta,\beta,x)=F(\alpha,1,\alpha,x)=\frac{1}{1-x},\quad F(-n,\beta,\beta,-x)=(1+x)^n,$$

$$F(1,1,2,-x)=\frac{\ln(1+x)}{x},\quad F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)=\frac{\arcsin x}{x}.$$

8. RUBNI PROBLEMI

Postavljanje problema. U mnogo slučajeva, naročito u vezi s rješavanjem jednadžbi matematičke fizike (vidi na str. 582), moramo, za razliku od ranije razmatranih zadataka s početnim uvjetima, rješavati tzv. *rubne probleme*, u kojima traženo rješenje diferencijalne jednadžbe mora zadovoljavati neke uvjete na krajevima zadanog intervala u kojem se mijenja nezavisna varijabla. Ograničit ćemo se ovdje na proučavanje ovih najvažnijih rubnih problema:

* Konvergencija hipergeometrijskog reda (1) za $x=1$ i $x=-1$ ovisi o broju $\delta=\gamma-\alpha-\beta$. Za $x=1$ red (1) apsolutno konvergira ako je $\delta>0$, a divergira ako je $\delta\leqslant0$. Za $x=-1$ red (1) apsolutno konvergira ako je $\delta>0$, uvjetno konvergira ako je $-1<\delta\leqslant0$, a divergira ako je $\delta\leqslant-1$.

Treba potražiti rješenje $y(x)$ *samoadjungirane jednadžbe*

$$[py']' - qy + \lambda\rho y = f, \qquad (*)$$

koja zadovoljava homogene uvjete

$$A_0y(a) + B_0y'(a) = 0, \quad A_1y(b) + B_1y'(b) = 0,$$

pri čemu se pretpostavlja da su funkcije $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, $f(x)$ neprekinute u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$* i da je $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$. Veličina λ je konstanta (parametar jednadžbe). Uzmemo li $f = 0$, dobivamo *homogeni* rubni problem, koji odgovara zadanom *nehomogenom.*

Jednadžbu drugog reda $Ay'' + By' + Cy + \lambda Ry = F$ možemo svesti na oblik (*) množenjem sa $\frac{p}{A}$, gdje je $p = e^{\int \frac{B}{A}\,dx}$, ako je u promatranom intervalu $A \neq 0$. Pri tome je $q = -\frac{pC}{A}$, $\rho = \frac{pR}{A}$.

Zadatak traženja rješenja koja zadovoljavaju nehomogene uvjete $A_0y(a) + B_0y'(a) = C_0$, $A_1y(b) + B_1y'(b) = C_1$, svodimo na zadatak s homogenim uvjetima, ali s drugačijom desnom stranom $f(x)$, jednostavnom zamjenom nepoznate funkcije $y = z + u$ gdje je u bilo koja dvaput neprekinuto derivabilna funkcija koja zadovoljava nehomogene rubne uvjete, a z je nova nepoznata funkcija koja očigledno zadovoljava odgovarajuće homogene rubne uvjete.

Sturm-Liouvilleov problem. Za fiksiranu vrijednost parametra λ vrijedi ovo: ili nehomogeni problem ima rješenje za bilo koji $f(x)$ i tada je to rješenje jedno i samo jedno, a pripadni homogeni problem ima samo *trivijalno* rješenje (identično jednako nuli); ili pripadni homogeni problem ima netrivijalno rješenje (različito od nule) i tada nehomogeni problem nije rješiv za sve desne strane, a ako rješenje egzistira, ono nije jednoznačno određeno. Te vrijednosti parametra λ, za koje nastupa drugi slučaj (homogeni problem ima netrivijalno rješenje), nazivamo *svojstvenim* ili *vlastitim vrijednostima* zadanog rubnog problema, a pripadna netrivijalna rješenja nazivamo *svojstvenim funkcijama* koje odgovaraju zadanoj svojstvenoj vrijednosti. Problem traženja svojstvene vrijednosti i svojstvenih funkcija za jednadžbe (*) *nazivamo Sturm-Liouvilleovim problemom.*

Osnovna svojstva svojstvenih funkcija i svojstvenih vrijednosti.

1) Svojstvene vrijednosti rubnih problema tvore niz realnih brojeva

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

* U daljnjem ćemo pretpostaviti da je interval (a, b) konačan. Za slučaj neizmjernog intervala rezultati se bitno mijenjaju.

koji teži prema neizmjerno. Svojstvena funkcija, koja odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_n ima u intervalu $a < x < b$ točno n nultočaka.

2) Ako su $y(x)$ i $z(x)$ svojstvene funkcije koje odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, onda je $y(x) = cz(x)$ gdje je c konstanta.

3) Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 onda je

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0$$

[svojstvo *ortogonalnosti s težinom* $\rho(x)$].

4) Ako u jednadžbi (*) koeficijente $p(x)$ i $q(x)$ zamijenimo sa $\tilde{p}(x) \geqslant p(x)$ i $\tilde{q}(x) \geqslant q(x)$, onda se svojstvene vrijednosti ne umanjuju, tj. $\tilde{\lambda}_n \geqslant \lambda_n$, gdje su $\tilde{\lambda}_n, \lambda_n$ n-te svojstvene vrijednosti izmijenjene i početne jednadžbe. Ako koeficijent $\rho(x)$ zamijenimo sa $\tilde{\rho}(x) \geqslant \rho(x)$, onda svojstvene vrijednosti ne rastu, tj. $\tilde{\lambda}_n \leqslant \lambda_n$. Pri tome n-te svojstvene vrijednosti neprekinuto ovise o koeficijentima jednadžbe, tj. dovoljno malim promjenama koeficijenata odgovaraju po volji male promjene n-te svojstvene vrijednosti.

5) Ako smanjimo odsječak $[a, b]$, svojstvene vrijednosti se ne smanjuju.

Razvoj po svojstvenim funkcijama. Izabiremo za svaki λ_n takvu svojstvenu funkciju $\varphi_n(x)$ da bude $\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\, dx = 1$ (takvu svojstvenu funkciju nazivamo *normiranom*).

Svakoj funkciji $g(x)$ koja je zadana u intervalu $[a, b]$ možemo pridružiti njen »*Fourierov red*« po svojstvenim funkcijama danog rubnog problema

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \qquad c_n = \int_a^b g(x)\, \varphi_n(x)\, \rho(x)\, dx,$$

ako samo napisani integrali imaju smisla.

Ako funkcija $g(x)$ ima neprekinutu derivaciju i zadovoljava rubne uvjete razmatranog rubnog problema, onda Fourierov red funkcije $g(x)$ po svojstvenim funkcijama rubnog problema apsolutno i jednoliko konvergira prema $g(x)$ (*teorem o razvoju*).

Primjere svojstvenih funkcija i razvoj po njima vidi na str. 586 do 591.

Parsevalova jednadžba

$$\int_a^b [g(x)]^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

vrijedi uvijek, ako integral na lijevoj strani ima smisla. U tom slučaju Fourierov red funkcije $g(x)$ po svojstvenim funkcijama rubnog problema konvergira prema $g(x)$ u smislu sredine, tj.

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left[g(x)-\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_n(x)\right]^2\rho(x)\,dx=0$$

Singularni slučaj. U primjeni Fourierove metode za rješavanje zadataka matematičke fizike često se pojavljuju rubni problemi ranije promatranog tipa, s tom razlikom da u krajnjim točkama intervala $[a, b]$ postoje singulariteti diferencijalne jednadžbe, npr. da funkcija $p(x)$ postaje jednaka nuli. U takvim singularnim točkama propisuju se rješenjima neka ograničenja, kao npr. da budu neprekinuta ili konačna, ili da ne postaju neizmjerna više nego zadanog reda. Ti uvjeti igraju ulogu homogenog rubnog uvjeta (vidi na str. 585 primjer 2). Pored toga u nekim rubnim problemima razmatramo homogene rubne uvjete koji povezuju vrijednosti funkcije i njene derivacije na suprotnim krajevima intervala. Najvažniji od tih uvjeta jest uvjet

$$y(a)=y(b),\qquad p(a)\,y'(a)=p(b)\,y'(b),$$

koji u slučaju $p(a)=p(b)$ možemo shvatiti kao uvjet periodičnosti. Za rubni problem s takvim uvjetima vrijedi sve ranije spomenuto, osim tvrdnje 2 (vidi na str. 571).

B. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

9. JEDNADŽBE PRVOG REDA

Linearne jednadžbe. *Linearnom* parcijalnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda nazivamo jednadžbu

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Y, \tag{1}$$

gdje je z nepoznata funkcija nezavisnih varijabli $x_1,\ldots,x_n$, a $X_1,\ldots,X_n$, Y su zadane funkcije od $x_1,\ldots,x_n$. Ako u (1) funkcije $X_1,\ldots,X_n$, Y ovise također i o z, onda jednadžbu nazivamo *kvazilinearnom*. Ako je $Y=0$:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \tag{1a}$$

jednadžbu nazivamo *homogenom*.

Zadatak integracije linearne homogene jednadžbe ekvivalentan je zadatku integracije tzv. *karakterističnog sistema*

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}*. \tag{2}$$

Vidimo da je svaki prvi integral sistema (2) rješenje homogene linearne jednadžbe (1a), i obrnuto, svako rješenje jednadžbe (1a) prvi je integral sistema (2) (vidi na str. 547). Ako je pri tome $n-1$ prvih integrala

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=0,\quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

nezavisno (vidi na str. 548), onda je

$$z=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$$

gdje je Φ po volji odaberiva funkcija od $(n-1)$ argumenata φ_i, opće rješenje linearne homogene jednadžbe (1a).

Rješenje z linearne nehomogene i kvazilinearne jednadžbe (1) tražimo u implicitnom obliku $V(x_1,\ldots,x_n,z)=C$. Pri tome je funkcija V rješenje homogene linearne jednadžbe sa $n+1$ nezavisnih varijabli

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+Y\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

s karakterističnim sistemom

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Y}, \tag{2'}$$

koji nazivamo *karakterističnim sistemom prvotne jednadžbe* (1).

Geometrijsko značenje. U slučaju jednadžbe sa dvije nezavisne varijable $x_1=x$ i $x_2=y$,

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{dy}=R(x,y,z) \tag{1$_1$}$$

rješenje $z=f(x,y)$ predočuje plohu u prostoru xyz, koju na-

* Pri rješavanju takvog sistema za nezavisnu varijablu možemo izabrati bilo koju od x_k za koje je $X_k\neq 0$ (sistem dobiva oblik $\frac{dx_j}{dx_k}=\frac{X_j}{X_k}$. $j=1,2,\ldots,n$), Zgodnije je ako sačuvamo simetriju i uvedemo novu nezavisnu varijablu, parametar t, stavivši $\frac{dx_j}{X}=dt$ ili $\frac{dx_j}{dt}=X_j$.

zivamo *integralnom plohom* te jednadžbe. Jednadžba (1_1) znači da je u svakoj točki integralne plohe $z = f(x, y)$ vektor normale $\left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$ okomit na zadanom vektoru $\{P, Q, R\}$ u toj točki. Sistem (2') dobiva pri tome oblik

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}; \qquad (2_1)$$

odakle izlazi (vidi na str. 645) da su integralne krivulje tog sistema, tzv. *karakteristike*, tangente na vektore $\{P, Q, R\}$. Zato karakteristika, koja s integralnom plohom $z = f(x, y)$ ima zajedničku točku, sva leži na toj plohi. Kroz svaku točku prostora prolazi integralna krivulja karakterističnog sistema (ako je ispunjen uvjet teorema na str. 545), a integralne plohe sastoje se iz karakteristika.

Cauchyjev problem. Neka je zadano n funkcija od $(n-1)$ nezavisnih varijabli $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),\quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Cauchyjevim problemom za jednadžbu (1) nazivamo zadatak traženja takvog njezinog rješenja

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

koje pri uvrštenju u (*) prelazi u zadanu funkciju $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$:

$$\varphi[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})] = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

Za slučaj dviju nezavisnih varijabli taj zadatak svodimo na traženje integralne plohe koja prolazi zadanom krivuljom. Ako zadana krivulja ima neprekinutu tangentu, a ni u kojoj točki ne dira karakteristiku, onda u nekoj okolini te krivulje Cauchyjev problem uvijek ima jednoznačno rješenje. Integralnu plohu tvore sve karakteristike koje sijeku zadanu krivulju.

Primjeri:

1) $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ (l, m, n su konstante). Jednadžba karakteristika: $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$. Integrali tog sistema: $lx + my + nz = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Karakteristike su kružnice sa središtem na pravcu koji prolazi kroz ishodište koordinata i kome su koeficijenti smjera proporcionalni sa l, m, n. Integralne plohe su rotacione plohe kojima je taj pravac os rotacije.

2) Naći integralnu plohu jednadžbe $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$, koji prolazi krivuljom $x = 0$, $z = \varphi(y)$. Jednadžbe karakteristika su: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$. Karakteristike kroz točku (x_0, y_0, z_0): $y = x - x_0 + y_0$, $z = z_0 e^{x - x_0}$. Uz pretpostavku $x_0 = 0$, $z_0 = \varphi_0(y_0)$ naći ćemo $y = x + y_0$, $z = e^x \varphi(y_0)$, a to je parametarski izraz tražene integralne plohe. Ako eliminiramo y_0, dobivamo $z = e^x \varphi(y - x)$.

Nelinearne jednadžbe. Opći oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda je

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (3)$$

Rješenje jednadžbe (3)

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

ovisne o n parametara $a_1, \ldots, a_n$ za koje je Jakobijana (vidi na str. 355) $\frac{\partial(\varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)}$ različita od nule za razmatrane vrijednosti $x_1, \ldots, x_n, z$, nazivamo *potpunim integralom* jednadžbe (3).

Integriranje jednadžbe (3) svodimo na integriranje tzv. *karakterističnog sistema* diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \ldots + p_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}, \qquad (4)$$

gdje su

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z},\quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i},\quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Rješenja karakterističnog sistema (4) koja zadovoljavaju dopunski uvjet $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ nazivamo *karakterističnim prugama*.

Kanonski sistemi. Često je prikladnije razmatrati jednadžbu koja nepoznatu funkciju z ne sadržava eksplicitno. Prelaz na takvu jednadžbu postizavamo uvođenjem dodatne nezavisne varijable

$x_{n+1} = z$ i takve nepoznate funkcije $V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, za koju jednadžba $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$ određuje z kao eksplicitnu funkciju od $x_1, \ldots, x_n$. Pri tom umjesto $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ u (3) uvrstimo $-\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ako smo, pored toga, riješili diferencijalnu jednadžbu po parcijalnoj derivaciji funkcije V s obzirom na bilo koju nezavisnu varijablu koju smo označili sa x, dok smo ostalim nezavisnim varijablama promijenili numeraciju, onda jednadžba (3) dobiva oblik

$$\left.\begin{aligned} &p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ &p = \frac{\partial V}{\partial x},\ p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Sistem karakterističnih diferencijalnih jednadžbi prelazi u ovaj sistem:

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

i

$$\frac{dV}{dx} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Jednadžbe (5) same po sebi tvore određeni sistem od $2n$ običnih diferencijalnih jednadžbi. Takav sistem, koji odgovara bilo kojoj funkciji $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ od $(2n+1)$ varijabli, nazivamo *kanonskim sistemom* diferencijalnih jednadžbi. Na sisteme takvog tipa svodimo mnoge zadatke mehanike i teoretske fizike. Kada znamo potpuni integral

$$V = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_n) + a,$$

onda pomoću jednadžbe (3) možemo naći opće rješenje kanonskog sistema (5), jer jednadžbe $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = b_i$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sa $2n$ po volji uzetih parametara a_i i b_i određuju $2n$-parametarsko rješenje kanonskog sistema (5).

Clairautova jednadžba. Određivanje potpunog integrala naročito je jednostavno u slučaju kad jednadžba ima oblik

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{(Clairautova jednadžba).}$$

Potpuni integral takve jednadžbe je

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po volji uzeti parametri.

Primjer: **Problem dvaju tijela.** Dvije materijalne točke, koje se uzajamno privlače po Newtonovu zakonu, gibaju se stalno u jednoj ravnini. Stoga, ako položaj jedne od točaka izaberemo za ishodište koordinata, možemo jednadžbe gibanja napisati ovako:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{dy}; \qquad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Taj sistem nakon uvođenja *Hamiltonove funkcije*

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

prelazi u sistem kanonskih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{*}$$

za veličine

$$x, y, \quad p = \frac{dx}{dt}, \qquad q = \frac{dy}{dt}.$$

Pripadna parcijalna diferencijalna jednadžba glasi

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Nakon prelaza na polarne koordinate ρ, φ nije teško zapaziti da ta jednadžba ima potpuni integral

$$z = -at - b\varphi + c - \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}}\, dr,$$

ovisan o parametrima a, b, c. Prema tome iz jednadžbi $\frac{\partial z}{\partial a} = -t_0$, $\frac{\partial z}{\partial b} = -\varphi_0$ dobivamo opće rješenje sistema (*).

Slučaj dviju nezavisnih varijabli ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = p$, $p_2 = q$). U tome slučaju karakterističnu prugu možemo geometrijski shvatiti kao krivulju za koju je u svakoj točki (x, y, z) zadana tangencijalna ravnina $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$. Traženje integralne plohe jednadžbe

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

kroz zadanu krivulju (Cauchyjev problem) svodimo na polaganje takvih karakterističnih pruga kroz točke prvotne krivulje, kojima pripadne ravnine diraju tu krivulju. Vrijednosti p i q u točkama prvotne krivulje određujemo pri tome iz relacija $F(x, y, z, p, q) = 0$ i $p\,dx + q\,dy = dz$, koje u slučaju nelinearne jednadžbe imaju općenito nekoliko rješenja. Zato, prilikom postavljanja Cauchyjeva problema za traženje određenog rješenja moramo na prvotnoj krivulji propisati par neprekinutih funkcija p i q koje zadovoljavaju dvije navedene relacije.

Primjer: Za jednadžbu $pq = 1$ i početnu krivulju $y = x^3$, $z = 2x^2$ možemo duž krivulje zadati $p = x$, $q = \frac{1}{x}$. Karakteristični sistem ima oblik

$$\frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Karakteristična pruga s početnim uvjetima x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 pri $t = 0$ je: $x = x_0 + q_0 t$, $y = y_0 + p_0 t$, $z = 2p_0 q_0 t + z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. U slučaju $p_0 = x_0$, $q_0 = \frac{1}{x_0}$ krivulja, koja pripada karakterističnoj pruzi i prolazi kroz točku (x_0, y_0, z_0) prvotne krivulje, bit će

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}, \qquad y = x_0^3 + t x_0, \qquad z = 2t + 2x_0^2.$$

Eliminacijom parametara x_0, t, dobivamo $z^2 = 4xy$. Zadamo li duž prvotne krivulje druge dopustive vrijednosti za p i q, npr. $p = 3x$, $q = \frac{1}{3x}$, dobivamo drugo rješenje.

Ploha koja je ovojnica jednoparametarske porodice integralnih ploha također je integralna ploha. Poslužimo li se tom činjenicom, možemo pomoću potpunog integrala riješiti Cauchyjev problem tako da odredimo neku jednoparametarsku porodicu rješenja, koja u točkama početne krivulje dira zadane ravnine, i nađemo ovojnicu te porodice.

Primjer: Za jednadžbu $z - px - qy + pq = 0$ (Clairautova jednadžba) treba naći integralnu plohu koja prolazi kroz krivulju $y = x$, $z = x^2$. Razmatrana jednadžba ima potpuni integral $z = ax + by - ab$. Kako treba pretpostaviti da je duž početne krivulje $p = q = x$, to uvjet $a = b$ odvaja potrebnu jednoparametarsku porodicu. Tražimo ovojnicu i dobivamo $z = \frac{1}{4}(x + y)^2$.

Jednadžbe s totalnim diferencijalima. Jednadžba u totalnim diferencijalima ima oblik

$$dz = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \ldots + f_n\,dx_n, \tag{7}$$

gdje su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zadane funkcije varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Jednadžbu (7) nazivamo *potpuno integrabilnom*, ako postoji jednoznačna relacija između $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ s po volji odaberivom konstantom koja relacija povlači jednadžbu (7). U tome slučaju postoji jednoznačno rješenje $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ jednadžbe (7) koje poprima vrijednost z^0 za početne vrijednosti $x_1^0, \ldots, x_n^0$ nezavisnih varijabli. Za $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ to znači da kroz svaku točku prostora prolazi jedna i samo jedna integralna ploha. Jednadžba (7) potpuno je integrabilna onda i samo onda, ako je za sve parametre $x_1, x_2, \ldots x_n$ identično ispunjeno ovih $\frac{n(n-1)}{2}$ relacija:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z} \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Ako je jednadžba (7) zadana u simetričnom obliku

$$f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n = 0,$$

onda su uvjeti potpune integrabilnosti identiteti

$$f_i\left(\frac{\partial f_k}{dx_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right) + f_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) + f_k\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 0$$

za sve kombinacije indeksa i, j, k.

U slučaju potpune integrabilnosti rješenje jednadžbe (7) svodi se na integraciju obične jednadžbe sa $(n-1)$ parametrom.

10. LINEARNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA

Opći oblik linearne jednadžbe drugog reda sa dvije nezavisne varijable x, y i nepoznatom funkcijom u jest

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \tag{1}$$

gdje su koeficijenti A, B, C, a, b i c te slobodni član f, zadane funkcije od x i y.

Klasifikacija. Karakter rješenja te jednadžbe ovisi o predznaku diskriminante $\delta = AC - B^2$. Jednadžbu (1) nazivamo jednadžbom *hiperbolnog tipa* u nekom području ako je u njemu $\delta < 0$, jednadž-

bom *parabolnog* tipa ako je u promatranom području identično $\delta = 0$, jednadžbom *eliptičkog* tipa ako je u promatranom području $\delta > 0$. Ako se promijeni predznak u promatranom području, onda jednadžbu (1) nazivamo jednadžbom *mješovitog* tipa. Predznak diskriminante δ invarijantan je s obzirom na bilo koju transformaciju nezavisnih varijabli (uvođenje novog sistema koordinata u ravnini Oxy). Zato je tip jednadžbe invarijantan s obzirom na izbor nezavisnih varijabli.

Karakteristikama jednadžbe (1) nazivamo integralne krivulje diferencijalne jednadžbe

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A}.$$

Jednadžba hiperbolnog tipa ima dvije porodice realnih karakteristika, jednadžba parabolnog tipa ima jednu porodicu realnih karakteristika, jednadžba eliptičnog tipa nema realnih karakteristika. Jednadžba koju dobivamo iz jednadžbe (1), kada u nju uvrstimo nove nezavisne varijable, ima iste karakteristike kao i jednadžba (1). Ako se porodica karakteristika podudara s jednom od porodica koordinatnih krivulja, onda u jednadžbi (1) nema člana s drugom derivacijom po pripadnoj nezavisnoj varijabli. U parabolnom slučaju također nema člana s mješovitom derivacijom.

Normalni oblik. Uvođenjem novih nezavisnih varijabli $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ možemo jednadžbu (1) svesti na jedan od tri *normalna* oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta < 0, \text{ hiperbolni tip}), \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta = 0, \text{ parabolni tip}), \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta > 0, \text{ eliptički tip}), \tag{c}$$

gdje točke označavaju članove bez parcijalnih derivacija drugog reda nepoznate funkcije.

Ako u hiperbolnom slučaju izaberemo dvije porodice karakteristika kao porodice koordinatnih krivulja novog koordinatnog sistema, tj. uvrstimo $\xi_1 = \varphi(x, y)$, $\eta_1 = \psi(x, y)$, gdje su $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ jednadžbe porodica karakteristika, onda jednadžba (1) dobiva oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \ldots = 0.$$

Taj oblik također nazivamo normalnim oblikom jednadžbe hiperbolnog tipa. Od nje zamjenom $\xi = \xi_1 + \eta_1$, $\eta = \xi_1 - \eta_1$ možemo preći na normalni oblik (a). Da jednadžbu parabolnog tipa svedemo na normalni oblik (b) dovoljno je da za porodicu $\xi = \text{const}$ izaberemo porodicu karakteristika koja je u tom slučaju jedina, i da za η uzmemo bilo koju funkciju varijabli x i y koja mora biti nezavisna od ξ. Ako su koeficijenti $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ analitičke funkcije (vidi na str. 614), onda jednadžba karakteristika u eliptičkom slučaju određuje dvije konjugirano kompleksne porodice krivulja $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$. Jednadžbu svodimo na normalni oblik (c) ako uvrstimo $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = i(\varphi - \psi)$.

Sve ranije rečeno za klasifikaciju i svođenje na normalni oblik može se primijeniti i na jednadžbe općenitijeg oblika

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Broj nezavisnih varijabli veći od dva. Linearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda s brojem nezavisnih varijabli većim od dva ima oblik

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \ldots = 0, \tag{2}$$

gdje su a_{ik} zadane funkcije nezavisnih varijabli, a točke označuju članove bez derivacija drugog reda nepoznate funkcije.

Jednadžbu (2) općenito nije moguće svesti na normalni oblik transformacijom nezavisnih varijabli, ali i za nju postoji vrlo važna klasifikacija koja je slična ranije spomenutoj.

Jednadžba s konstantnim koeficijentima. Ako su koeficijenti a_{ik} u jednadžbi (2) konstantni, onda pomoću linearne homogene transformacije nezavisnih varijabli možemo svesti jednadžbu na normalni oblik

$$\sum_i \varkappa_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \ldots = 0, \tag{2'}$$

gdje su svi koeficijenti $\varkappa_i$ jednaki ± 1 ili 0.

Ako su svi koeficijenti $\varkappa_i$ različiti od nule i imaju iste predznake, onda jednadžbu nazivamo *eliptičkom*. Ako su svi koeficijenti $\varkappa_i$ različiti od nule, a predznak jednog od njih različit je od predznaka ostalih, jednadžba je *hiperbolna**. Ako je jedan koeficijent $\varkappa_i$ jednak

* Ako imamo bar dva koeficijenta svakog predznaka, onda jednadžbu nazivamo *ultrahiperbolnom*.

nuli, a ostali su različiti od nule sa jednakim predznacima, onda jednadžbu nazivamo *parabolnom.*

Ako u linearnoj jednadžbi nisu konstantni samo koeficijenti najviših derivacija, nego i koeficijenti prvih derivacija nepoznate funkcije, onda se zamjenom nepoznate funkcije u jednadžbama možemo osloboditi članova s prvim derivacijama, za koje je $\varkappa_i \neq 0$. Za to je dovoljno uvrstiti $u = ve^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_k}{\varkappa_k} x_k}$ gdje je b_k koeficijent od $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ u (2'), a sumiranje se proteže na sve $\varkappa_k \neq 0$. Na taj način sve diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima u eliptičkom slučaju svodimo na oblik $\Delta v + kv = g$, a u hiperbolnom slučaju na oblik $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + kv = g$, gdje je Δ Laplaceov operator

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

Postavljanje problema. Razmatranje različitih fizikalnih pojava u neprekinutim sredinama (mehaničkih, električkih, toplinskih i sl.) svodimo na parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje po tome i nazivamo *jednadžbama matematičke fizike.* Pri tome su najvažnije i najčešće linearne jednadžbe drugog reda. Za rješavanje problema fizike, koje svodimo na parcijalne diferencijalne jednadžbe, obično treba naći takvo rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava neke dodatne, tzv. *rubne* i *početne uvjete.* Skup tih uvjeta mora jednoznačno određivati rješenje jednadžbe. Povrh toga, a to nije manje važno, rješenje mora biti stabilno s obzirom na male izmjene početnih i rubnih uvjeta, tj. mora se mijenjati po volji malo, ako se dovoljno malo mijenjaju uvjeti. U tom slučaju kažemo da je problem *korektno* postavljen. Samo ako je taj uvjet ispunjen, matematički problem rješenja diferencijalne jednadžbe primjenljiv je za opisivanje realnih pojava. Pri tome se pokazuje da je za jednadžbe hiperbolnog tipa, na koje napose svodimo izučavanje titranja neprekinutih sredina, korektan »Cauchyjev problem«, tj. da su na početnoj »mnogostrukosti« (krivulji, plohi) zadane vrijednosti tražene funkcije i njenih derivacija u netangencijalnom smjeru (napose u smjeru normale). Za jednadžbe pak eliptičkog tipa, na koje se svodi proučavanje stacionarnih procesa i ravnoteže neprekinutih sredina, korektan je »rubni problem«, da su zadane vrijednosti nepoznate funkcije (ili njenih derivacija u smjeru normale) na rubu razmatranog područja nezavisnih varijabli. Ako je razmatrano područje neograđeno, obično se dodaju neki zahtijevi na ponašanje

tražene funkcije »u neizmjernosti«, tj. na ponašanje funkcije kada argument neograničeno raste.

Nehomogeni uvjeti i nehomogene jednadžbe. Rješavanje linearne jednadžbe (homogene ili nehomogene) za nehomogene početne ili rubne uvjete (vidi na str. 569) možemo svesti na rješavanje jednadžbe koja se od zadane razlikuje samo slobodnim (od nepoznate funkcije) članom, a rješava se uz homogene uvjete. Za to je dovoljno da traženu funkciju zamijenimo razlikom između nje i bilo koje (dvaput neprekinuto derivabilne) funkcije koja zadovoljava zadane uvjete.

Rješenje linearne nehomogene jednadžbe za dane nehomogene početne ili rubne uvjete jest suma rješenja te jednadžbe za nul-uvjete i pripadnog rješenja homogene jednadžbe uz dane uvjete.

Najzad, rješenje linearne nehomogene jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = g(x, t)^*$$

za homogene početne uvjete $u\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ svodimo na rješenje Cauchyjevog problema za pripadnu homogenu jednadžbu, na ovaj način:

$$u = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau,$$

gdje je $\varphi(x, t; \tau)$ rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0$$

uz uvjete $u\Big|_{t=\tau} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = g(x, \tau)$.

Najčešće jednadžbe

1) *Valna jednadžba* jest jednadžba širenja titranja u homogenoj sredini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(x, t),$$

* Ovdje je x simbol za n prostornih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $L[u]$ je linearni diferencijalni izraz, koji može sadržavati derivaciju $\frac{\partial u}{\partial t}$ ali ne sadrži viših derivacija po t.

gdje je $Q(x, t)$ desna strana (x je simbol prostornih varijabli $x_1, \ldots, x_n$), koja je jednaka nuli kada nema sila smetnje (perturbacije). Za homogenu jednadžbu ($Q(x, t) = 0$) dobiva se rješenje koje zadovoljava početne uvjete $u\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ prema formulama:

za $n = 3$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\,d\sigma\right],$$

gdje je integracija protegnuta preko površine kugle $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = a^2t^2$ (*Kirchhoffova formula*);

za $n = 2$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint\limits_{k_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{k_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\right],$$

gdje je područje integracije krug $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leqslant a^2t^2$ (*Poissonova formula*)

za $n = 1$

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(\alpha)\,d\alpha$$

(*D'Alembertova formula*).

Ako je početna jednadžba homogena, onda desnim stranama tih formula treba dodati:

za $n = 3$ tzv. *retardirani potencijal*

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r \leqslant at} \frac{Q\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \dfrac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3,$$

gdje je $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$;

za $n = 2$

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_{K} \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}},$$

gdje je K dio prostora ξ_1, ξ_2, τ, određen nejednadžbama

$$0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2(t - \tau)^2;$$

za $n = 1$

$$\frac{1}{2a}\iint\limits_{T} Q(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

gdje je T trokut $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $|\xi - x_1| \leqslant a|t - \tau|$.

Iz navedenih formula izlazi da je a brzina širenja poremećaja.

2) *Jednadžba širenja topline* u homogenoj sredini

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\,\Delta u = Q(x, t)^*.$$

Ovdje je $Q(x, t)$ desna strana, koja je jednaka nuli kada nema izvora ni ponora topline. Za tu jednadžbu obično postavljamo ovaj *Cauchyjev problem:* naći rješenje ograđeno za $t > 0$, ako je $u|_{t=0} = f(x)$. Uvjeti ograđenosti osiguravaju jednoznačnost rješenja. Za homogenu jednadžbu imamo

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}{4a^2t}}\,d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Za $Q(x, t) \not\equiv 0$ treba desnoj strani te jednadžbe dodati

$$\int\limits_0^t \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{[2a\sqrt{\pi(t - \tau)}]^n}\, e^{-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}{4a^2t}}\,d\alpha_1 \ldots d\alpha_n\right] d\tau.$$

Pokazuje se da je zadatak traženja $u(x, t)$ za $t < 0$, ako su zadane vrijednosti $u(x, 0)$, nekorektno postavljen.

3) *Jednadžba teorije potencijala*

$$\Delta u = -4\pi\rho^*,$$

* Δ je Laplaceov operator za n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vidi na str. 582).

gdje je ρ zadana funkcija točke (*Poissonova jednadžba*). Ako je $\rho \equiv 0$, dobivamo *Laplaceovu jednadžbu* $\Delta u = 0$ (vidi na str. 661).

Metode integriranja. *Separacija varijabli.* Za mnoge diferencijalne jednadžbe matematičke fizike možemo pomoću specijalnih supstitucija dobiti ako ne sav skup rješenja, a ono porodicu rješenja ovisnih o po volji odaberivim parametrima. U linearnim diferencijalnim jednadžbama, napose drugog reda, često možemo primijeniti supstituciju $u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$. Za određivanje svake od tih funkcija $\varphi_k(x_k)$ ako se nakon supstitucije takvog produkta u ishodnu jednadžbu varijable daju separirati (vidi primjere), dobivamo običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu. Da bi pri tome rješenje ishodne jednadžbe zadovoljavalo potrebne homogene rubne uvjete, može biti dovoljno da dio funkcija $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)$ zadovoljava neke rubne uvjete.

Iz dobivenih rješenja pomoću sumiranja, diferenciranja i integriranja možemo dobiti nova rješenja. Pri tome moramo parametre odabrati tako da budu ispunjeni i preostali rubni i početni uvjeti (vidi primjere). Treba uočiti da je tako dobiveno rješenje u obliku reda ili nepravog integrala samo »formalno rješenje«, pa nakon što dobijemo takvo rješenje treba da provjerimo ima li ono smisla (tj. konvergira li red i sl.) i zadovoljava li zadanu jednadžbu i rubne uvjete (tj. možemo li član po član diferencirati, je li moguć granični prelaz pri približavanju rubu i sl.).

U svim dolje navedenim primjerima redovi i nepravi integrali konvergiraju ako funkcijama, kojima zadamo početne uvjete, nametnemo prikladna ograničenja (npr. neprekinutost druge derivacije u primjerima 1 i 2).

Primjeri: 1) Treba naći rješenje jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, koje zadovoljava početne uvjete $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ i rubne uvjete $u\,|_{x=0} = 0$, $u\,|_{x=l} = 0$ (*titranje napete žice*).

Tražimo rješenje u obliku $u = X(x)\,T(t)$. Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ (varijable su separirane). Kako lijeva strana ne ovisi o x, a desna o t, svaka od njih je konstantna veličina. Ako tu konstantu označimo sa $-\lambda^2$*, dobivamo $X'' + \lambda^2 X = 0$, $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$. Povrh toga iz rubnih uvjeta imamo $X(0) = X(l) = 0$. Na taj način je $X(x)$ svojstvena funkcija rubnog

* Iz daljnjeg vidimo da za pozitivne vrijednosti te konstante ne možemo zadovoljiti rubne uvjete.

Sturm-Liouvilleova problema, a λ^2 je svojstvena vrijednost tog zadatka (vidi na str. 570). Iz jednadžbe za X i rubnih uvjeta naći ćemo $X(x) = C \sin \lambda x$, pri čemu je $\sin \lambda l = 0$, tj. $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ako sada integriramo jednadžbu $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$, dobivamo partikularno rješenje prvotne jednadžbe u obliku

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{na\pi}{l}\, t + b_n \sin \frac{na\pi}{l}\, t\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l}\, x.$$

Na temelju zahtjeva da $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ za $t = 0$ bude jednako $f(x)$, a $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ da bude $\varphi(x)$, onda pomoću formula za razvoj Fourierovog reda po sinusima dobivamo (vidi na str. 739):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad b_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

2) Promatranje uzdužnog *titranja šipke* kojoj je jedan kraj slobodan, a na drugom kraju u početnom trenutku djeluje konstantna sila p, svodimo na diferencijalnu jednadžbu iz primjera 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

s početnim uvjetima $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, ali s nehomogenim rubnim uvjetima: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ (slobodni kraj), $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = kp$. Te uvjete možemo zamijeniti homogenim $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0\right)$, tako da umjesto u supstituiramo novu nepoznatu funkciju $z = u - \frac{kpx^2}{2l}$. Diferencijalna jednadžba time postaje nehomogena: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}$. Njeno ćemo rješenje tražiti u obliku $z = v + w$, gdje v zadovoljava homogenu diferencijalnu jednadžbu, rubne i početne uvjete za z, tj.

$$z\Big|_{t=0} = f(x) - \frac{kpx^2}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

a w zadovoljava nehomogenu diferencijalnu jednadžbu i početne i rubne nuluvjete. Lako se vidi da je $w = \frac{ka^2pt^2}{2l}$. Pretpostavimo li da je $v = X(x)\,T(t)$ i uvrstimo li to u jednadžbu, dobivamo kao i prije $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2$. Ako jednadžbu za X integriramo s rubnim uvjetima $X'(0) = X'(l) = 0$, naći ćemo svojstvene funkcije zadanog problema $X_n = \cos\frac{n\pi x}{l}$ i pripadne svojstvene vrijednosti $\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ako računamo dalje kao u prethodnom primjeru, dobivamo konačno

$$u = \frac{ka^2pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l}b_0t + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n}\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

gdje su a_n i b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ koeficijenti razvoja u Fourierov red po kosinusima u intervalu $(0, l)$ funkcija $f(x) - \frac{kpx^2}{2}$ i $\frac{l}{a\pi}\varphi(x)$ (vidi na str. 739).

3) *Titranje kružne na rubu učvršćene membrane.* Jednadžba glasi

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

ili u polarnim koordinatama (vidi na str. 387)

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

uz uvjete

$$u\Big|_{t=0} = f(r,\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r,\varphi), \quad u\Big|_{r=R} = 0.$$

Neka je $u = U(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$. Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo $\frac{U''}{U} + \frac{U'}{rU} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$. Odatle, kao i prije, izlazi $T'' + a^2\lambda^2T = 0$ i $\frac{r^2U'' + rU'}{U} + \lambda^2r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu^2$ ili $\Phi'' + \nu^2\Phi = 0$.

Iz uvjeta $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ dobivamo

$$\Phi(\varphi) = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \quad \nu^2 = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Za određivanje U i λ imamo: $[rU']' - \frac{n^2}{r}U = -\lambda^2rU$, uz uvjet $U(R) = 0$. Ako dodamo prirodne uvjete ograđenosti $U(r)$ za $r = 0$ i uvrstimo $\lambda r = z$, naći ćemo

$$z^2U'' + zU' + (z^2 - n^2)\,U = 0, \quad \text{tj.} \quad U(r) = J_n(z) = J_n\left(\mu\frac{r}{R}\right)$$

(J_n je Besselova funkcija, vidi na str. 565) gdje je $\lambda = \frac{\mu}{R}$ i $J_n(\mu) = 0$.

Neka je μ_{nk} k-ta pozitivna nultačka funkcije $J_n(z)$. Sistem funkcija $U_{nk}(r) = J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots,)$ potpuni je sistem svih svojstvenih funkcija samoadjungiranog problema Sturm-Liouvilleova tipa, ortogonalnih s težinom r (vidi na str. 570).

Rješenje našeg zadatka tražimo u obliku dvostrukog reda

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\cos\frac{a\mu_{nk}t}{R} + \right. \\ \left. + (c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\sin\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right] J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right).$$

Iz početnih uvjeta za $t = 0$ dobivamo

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

$$F(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_{nk}}{R}(c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

odakle je

$$\begin{matrix} a_{nk} \\ b_{nk}\end{matrix} = \frac{2}{\pi R^2J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(r,\varphi)\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)r\,dr;$$

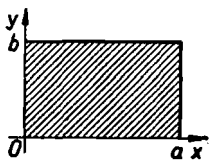
za $n = 0$ moramo 2 u brojniku zamijeniti sa 1. Formule kojima određujemo koeficijente c_{nk} i d_{nk} dobivamo iz formula za a_{nk} i b_{nk} tako da $f(r,\varphi)$ zamijenimo sa $F(r,\varphi)$ i pomnožimo sa $\frac{R}{a\mu_{nk}}$.

4) *Dirichletov problem* (vidi na str. 661) za pravokutnik $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (sl. 661) Treba naći funkciju $u(x, y)$ koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ i uvjete

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(a, y) = \varphi_2(y), \quad u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u(x, b) = \psi_2(x).$$

Riješimo najprije zadatak za slučaj $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$. Uvrštenjem $u = X(x)\,Y(y)$ u jednadžbu dobivamo $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$ $(= -\lambda^2)$. Kako je $X(0) = X(a) = 0$, to je $X = C \sin \lambda x$, $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ako opće rješenje jednadžbe $Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$ napišemo u obliku

$$Y = a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y,$$



Sl. 362

dobivamo partikularno rješenje jednadžbe $\Delta u = 0$, koje zadovoljava uvjete $u(0, y) = u(a, y) = 0$, u obliku

$$u_n = \left[a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right] \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Ako sada postavimo $u = \sum u_n$, dobivamo iz uvjeta za $y = 0$ i $y = b$ da je

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

gdje je

$$a_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\,dx, \quad b_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\,dx.$$

Ako analogno riješimo zadatak za slučaj $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$, dobivamo rješenje općeg zadatka kao zbroj dvaju nađenih rješenja.

5) *Širenje topline u homogenoj šipki* kojoj je jedan kraj u neizmjernosti, a na drugom održavamo konstantnu temperaturu. Treba naći ograđeno rješenje jednadžbe $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 \leqslant x < +\infty, t \geqslant 0)$, uz uvjet $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $u\Big|_{x=0} = 0$ (pretpostavljamo da je konstantna temperatura na kraju šipke jednaka nuli). Uvrštenjem $u = X(x)\,T(t)$ u jednadžbu, dobivamo $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ $(= -\lambda^2)$. Odatle je $T(t) = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}$.

Iz uvjeta ograđenosti rješenja izlazi da je $\lambda^2 \geqslant 0$. Kako je $X(0) = 0$, to je $X(x) = C \sin \lambda x$. Time je $u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$. Ovdje je λ po volji odabran realan broj, pa stoga možemo razmotriti rješenja oblika

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x\,d\lambda.$$

Iz uvjeta $u\Big|_{t=0} = f(x)$ naći ćemo $f(x) = \int_0^\infty C(\lambda) \sin \lambda x\,d\lambda$. Posljednja jednadžba je zadovoljena ako stavimo $C(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \sin \lambda s\,ds$ (vidi na str. 739). Uvrštenjem $C(\lambda)$ u $u(x, t)$ dobivamo

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda s \sin \lambda x\,d\lambda\right) ds$$

ili zamjenom produkta sinusa s polovičnom razlikom kosinusa (vidi na str. 233) i upotrebom jednadžbe 5) sa str. 499

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(s) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}}\right] ds.$$

Riemannova metoda rješavanja Cauchyjevog problema za jednadžbu hiperbolnog tipa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F.$$

Potražimo »*Riemannovu funkciju*« $v(x, y; \xi, \eta)$ (ξ, η su parametri) koja zadovoljava konjugiranu* homogenu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0$$

i uvjete

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = e^{\int_\xi^x b(s, \eta)\,ds} \qquad v(\xi, y; \xi, \eta) = e^{\int_\eta^y a(\xi, s)\,ds}$$

* Konjugiranom jednadžbom linearnoj jednadžbi

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \text{ nazivamo } \sum_{i,k} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_i \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv = 0.$$

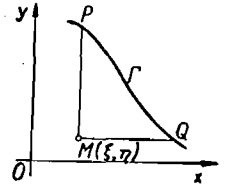
Funkcija $u(\xi, \eta)$ koja zadovoljava ishodnu jednadžbu i koja na zadanoj krivulji Γ (sl. 363; glatka krivulja Γ ne smije imati tangente paralelne koordinatnim osima, tj. ne smije dirati karakteristike) poprima zajedno sa svojom derivacijom u smjeru normale te krivulje (vidi na str. 291) zadane vrijednosti, određuje se po formuli

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_P + \frac{1}{2}(uv)_Q - \int_{QP} \left[buv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dx - \left[auv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy.$$

Krivuljni integral u toj formuli može se izračunati, jer iz vrijednosti funkcije i njene derivacije (u netangencijalnom smjeru) na luku mogu se odrediti vrijednosti obiju parcijalnih derivacija. Često pri postavljanju Cauchyjeva problema umjesto derivacije u smjeru normale zadajemo na krivulji vrijednosti jedne parcijalne derivacije tražene funkcije. U tom je slučaju prikladnije upotrijebiti drugi oblik Riemannove formule

$$u(\xi, \eta) = (uv)_P - \int_{QP} \left(buv - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \left(auv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy$$

$\left(\text{ako su na } \Gamma \text{ zadane vrijednosti } \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.



Sl. 363

Primjer: Jednadžba prolaženja električne struje vodičima (telegrafska jednadžba) ima oblik

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdje su $a > 0$, b, c konstante.

Zamjenom nepoznate funkcije $u = ze^{-(b/a)t}$, jednadžbu svodimo na oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z \quad \left(m^2 = \frac{1}{a}, \quad n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}\right),$$

a zamjenom nezavisnih varijabli $\xi = \frac{n}{m}(mt + x)$, $\eta = \frac{n}{m}(mt - x)$ na oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{z}{4} = 0.$$

Riemannova funkcija $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ mora zadovoljiti tu jednadžbu i postati jednaka jedinici za $\xi = \xi_0$ i za $\eta = \eta_0$. Ako tražimo v u obliku $v = f(w)$, gdje je $w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, onda je $f(w)$ rješenje jednadžbe $w\frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} - \frac{1}{4}f = 0$ s početnim uvjetom $f(0) = 1$. Zamjenom $w = \alpha^2$ tu jednadžbu svodimo na Besselovu jednadžbu nultog reda $\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{df}{d\alpha} - f = 0$ (vidi na str. 564) i, prema tomu je $v = I_0[\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}]$. Ako treba naći rješenje ishodne jednadžbe koja zadovoljava početne uvjete $z\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$, onda supstitucijom dobivene vrijednosti v u Riemannovu formulu i vraćanjem na stare varijable dobivamo

$$z(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - mt) + f(x + mt)] + \frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt} \left[g(s)\frac{I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}\right)}{m} - f(s)\frac{ntI_1\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}\right)}{\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}}\right] ds.$$

Greenova metoda rješavanja rubnih problema za jednadžbe eliptičkog tipa u mnogome je slična Riemannovoj metodi rješavanja Cauchyjevih problema za jednadžbe hiperbolnog tipa. Ako treba naći funkciju $u(x, y)$ koja u nekom području zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

i na rubu tog područja poprima zadane vrijednosti, onda najprije nađemo »*Greenovu funkciju*« $G(x, y; \xi, \eta)$, koja zadovoljava ove uvjete (ξ, η smatramo parametrima):

1) $G(x, y; \xi, \eta)$ posvuda, osim u točki $x = \xi$, $y = \eta$, zadovoljava homogenu konjugiranu* jednadžbu

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial (aG)}{\partial x} - \frac{\partial (bG)}{\partial y} + cG = 0.$$

* Vidi napomenu na str. 591.

2) Funkcija G ima oblik $U\ln\frac{1}{r}+V$, gdje su U i V zajedno sa svojim derivacijama do uključivog drugog reda u čitavom području neprekinute funkcije, pri čemu U u točki $x=\xi$, $y=\eta$ ima vrijednost 1, a $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

3) Na rubu promatranog područja $G(x, y; \xi, \eta)$ iščezava.

Pomoću Greenove funkcije rješenje rubnog problema dobivamo po formuli

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_S u(x,y)\frac{\partial}{\partial n}G(x,y;\xi,\eta)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_D f(x,y)\,G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy,$$

gdje je D promatrano područje, S njegov rub na kojem je funkcija u zadana, a $\frac{\partial}{\partial n}$ označava derivaciju u smjeru nutarnje normale na rubu područja.

Uvjet 3) ovisi o karakteru postavljenog zadatka. Ako npr. na rubu područja nisu zadane vrijednosti tražene funkcije nego vrijednosti njene derivacije u smjeru normale ruba, onda se u uvjetu 3) mora tražiti da izraz

$$\frac{\partial G}{\partial n}-(a\cos\alpha+b\cos\beta)\,G$$

bude jednak nuli, pri čemu su α, β kutovi nutarnje normale ruba prema koordinatnim osima. Rješenje je u tom slučaju određeno formulom

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}G\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\int_D fG\,dx\,dy.$$

Greenovu metodu primjenjujemo također i na linearne jednadžbe sa tri nezavisne varijable, koje imaju oblik

$$\Delta u+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+eu=f.$$

Pri traženju rješenja te jednadžbe, kojemu su zadane vrijednosti na rubu razmatranog područja, konstruiramo kao i prije Greenovu funkciju (s tom razlikom da sada ona ovisi o trima parametrima

ξ, η, ζ); konjugirana jednadžba koju zadovoljava Greenova funkcija ima oblik

$$\Delta G-\frac{\partial(aG)}{\partial x}-\frac{\partial(bG)}{\partial y}-\frac{\partial(cG)}{\partial z}+eG=0,$$

a u uvjetu 2) se traži da G ima oblik $U\frac{1}{r}+V$, gdje je $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Rješenje zadatka dano je pri tome formulom

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int\int_S u\frac{\partial G}{\partial n}\,ds-\frac{1}{4\pi}\int\int\int_D fG\,dx\,dy\,dz.$$

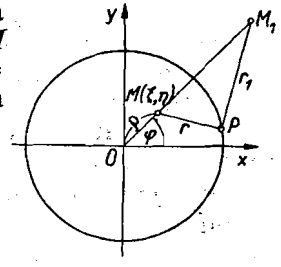
Kao i po Riemannovoj metodi, i po Greenovoj treba najprije naći neko specijalno rješenje diferencijalne jednadžbe, pomoću kojega možemo zatim dobiti rješenje uz bilo koje početne (rubne) uvjete. Bit razlike između Greenove i Riemannove funkcije je u tome da Greenova funkcija ovisi samo o obliku lijeve strane diferencijalne jednadžbe, a Riemannova ovisi i o razmatranom području. Određivanje Greenove funkcije, čak i onda kada je osigurano njeno postojanje, praktički je veoma teško, zbog čega se Greenova metoda više upotrebljava u teoretskim istraživanjima.

Primjer: 1) Za Laplaceovu jednadžbu $\Delta u=0$, ako je razmatrano područje kružnica, možemo lako konstruirati Greenovu funkciju za Dirichletov problem. Ako je polumjer kružnice jednak R, a točka M_1 simetrična s točkom $M(\xi,\eta)$ s obzirom na kružnicu, tj. M i M_1 leže na istom polumjeru a $OM\cdot OM_1=R^2$, onda je Greenova funkcija izražena formulom

$$G(x,y;\xi,\eta)=\ln\frac{1}{r}+\ln\frac{\rho r_1}{R},$$

gdje je

$r=MP$, $\rho=OM$ i $r_1=M_1P$ (sl. 364).



Sl. 364

Navedena formula za rješenje Dirichletovog problema u danom slučaju, nakon uvrštenja normalne derivacije Greenove funkcije i nekih transformacija, daje tzv. *Poissonov integral*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}\,u(\varphi)\,d\varphi$$

(oznake su iste kao i prije, $\xi = \rho\cos\psi$, $\eta = \rho\sin\psi$; $u(\varphi)$ je na kružnici zadana funkcija koja određuje rubne vrijednosti tražene funkcije u).

2) Analogno konstruiramo Greenovu funkciju za Dirichletov problem Laplaceove jednadžbe $\Delta u = 0$ u prostoru, ako je promatrano područje kugla polumjera R. Tada Greenova funkcija ima oblik

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1 \rho},$$

gdje je $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ udaljenost od točke (ξ, η, ζ) do središta kugle, r je udaljenost od točke (x, y, z) do točke (ξ, η, ζ), r_1 je udaljenost od točke (x, y, z) do točke $\left(\frac{R\xi}{\rho}, \frac{R\eta}{\rho}, \frac{R\zeta}{\rho}\right)$ simetrične točki (ξ, η, ζ). Poissonov integral ima pri tome oblik (iste oznake):

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3}\, u\, ds.$$

Operatorska metoda. Isto kao i za obične diferencijalne jednadžbe, i za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi možemo uspješno primijeniti operatorsku metodu, koja se temelji na prelazu od tražene funkcije na njen transformat (vidi na str. 557). Pri tome traženu funkciju smatramo funkcijom jedne od nepoznatih varijabli, a ostale parametrima. Za transformat tražene funkcije dobivamo tako diferencijalnu jednadžbu (*pomoćna jednadžba*) koja ima jednu nezavisnu varijablu manje od ishodne jednadžbe. Posebno, ako je ishodna jednadžba imala dvije nezavisne varijable, za transformat tražene funkcije dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu. Ako iz dobivene jednadžbe možemo naći transformat tražene funkcije, onda samu funkciju nalazimo ili iz tablice transformata, ili po formuli obrata.

Primjeri: 1) Promotrimo širenje topline u krutom tijelu omeđenom s jedne strane ($x > 0$). Temperatura na rubu ($x = 0$) mijenja se po zakonu $u = k\cos\omega t$ za $t > 0$, a početna temperatura tijela jednaka je nuli.

Zadatak svodi se na rješavanje jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ u području } x > 0,\ t > 0$$

uz uvjete: $u\big|_{t=0,\ x>0} = 0$, $u\big|_{x=0,\ t>0} = k\cos\omega t$. Pomoćna jednadžba ima oblik

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2} - p\bar{u} = 0,\ x > 0$$

uz uvjet $\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2 + \omega^2}$ za $x = 0$. Rješenje pomoćne jednadžbe koje ostaje ograđeno za $x \to \infty$ jest

$$\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2 + \omega^2}\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}$$

Primjenjujući formulu (12) sa str. 562 i Borelov teorem (vidi na str. 558) za prelaz od transformata na funkciju, dobivamo

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \cos\omega\tau\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\, \mathrm{d}\tau.$$

2) Šipka duljine l nalazi se u stanju mirovanja, a njen kraj $x = 0$ je upet. U trenutku $t = 0$ na slobodni kraj šipke djeluje sila S (na jedinicu površine).

Zadatak istraživanja titranja šipke svodimo na rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u području $0 < x < l$, $t > 0$, uz početne uvjete

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

za $0 < x < l$ i rubne uvjete

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$$

(E je Youngov modul). Pomoćna jednadžba ima oblik

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{u} = 0$$

s uvjetom $\bar{u}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$.

Rješenje je funkcija $\bar{u} = \frac{Sa}{Ep}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{px}{a}}{\mathrm{ch}\frac{pl}{a}}$.

Pomoću rastavljanja transformata $\bar{u}$ na parcijalne razlomke ili pomoću obrata možemo odatle dobiti

$$u(x,t) = \frac{Sx}{E} - \frac{8Sl}{\pi^2 E}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

Aproksimativne metode. Pri rješavanju konkretnih zadataka u vezi s integriranjem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često se primjenjuju aproksimativne metode kako analitičke, pomoću kojih možemo dobiti približan analitički izraz za traženu funkciju, tako i numeričke, pomoću kojih neposredno dobivamo vrijednosti tražene funkcije za neke određene vrijednosti argumenata.

Numeričke metode osnovane su na zamjeni derivacija s kvocijentima diferencija, čime diferencijalna jednadžba prelazi u sistem algebarskih jednadžbi, koji je u slučaju linearne ishodne jednadžbe linearan sistem. Osim toga vrlo je raširena metoda modeliranja, koja se osniva na tome da jedna te ista diferencijalna jednadžba opisuje različite fizikalne pojave. Za rješavanje dane jednadžbe konstruiramo model u kojem se odvija jedan od procesa koji opisuje promatrana jednadžba, a vrijednost tražene funkcije dobivamo neposrednim mjerenjem na modelu. Model obično sadrži elemente koje možemo mijenjati u određenim granicama i zato na modelu možemo rješavati zadaće za čitavu klasu diferencijalnih jednadžbi.

PETI DIO

DOPUNSKA POGLAVLJA ANALIZE

I. KOMPLEKSNI BROJEVI I FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE

1. OSNOVNI POJMOVI

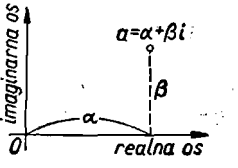
Imaginarna jedinica. Imaginarnu jedinicu i* formalno definiramo kao broj koji kvadriran daje »—1«. Uvođenje imaginarne jedinice dovodi do poopćenja pojma broja na *kompleksne brojeve*, koji su značajni u algebri i analizi i omogućuju konkretne interpretacije u nekim geometrijskim i fizikalnim pitanjima.

Kompleksni brojevi. Opći oblik kompleksnog broja je $a = \alpha + \beta i$; primaju li α i β sve moguće realne vrijednosti, dobivamo sve moguće kompleksne brojeve a. Broj α nazivamo *realnim dijelom* kompleksnog broja a; β njegovim *imaginarnim dijelom.* Oznake:

$$\alpha = \mathrm{R}(a), \qquad \beta = \mathrm{I}(a)^{**}.$$

Ako je $\beta = 0$, onda je $a = \alpha$ (realni brojevi — poseban slučaj kompleksnih brojeva); ako je $\alpha = 0$, onda je $a = \beta i$ (»*čisto imaginarni*« brojevi).

Geometrijska interpretacija. Slično kao što realne brojeve možemo prikazati točkama brojevnog pravca, kompleksne brojeve prikazujemo točkama ravnine: broj $a = \alpha + \beta i$ prikazujemo točkom kojoj je apscisa α, a ordinata β (sl. 365). Realne brojeve prikazujemo točkama osi apscisa (*realna os*), čisto imaginarne točkama osi ordinata (*imaginarna os*). Kako je svaka točka ravnine potpuno određena radijvektorom te točke (vidi na str. 628), svakom kompleksnom broju odgovara određeni *vektor* koji leži u ravnini i povučen je od pola u točku pripadnu kompleksnom broju (sl. 366). Prema tome kompleksne brojeve možemo prikazivati i točkama i vektorima.



Sl. 365

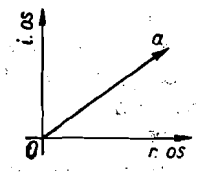
* i od francuskog imaginaire — zamišljeni. U elektrotehnici umjesto i upotrebljavamo slovo j (da ga ne pobrkamo s oznakom i za jakost struje).

** R od francuskog réel (realan), I — imaginaire (imaginaran).

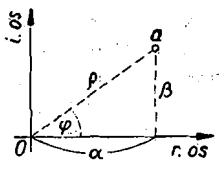
Jednakost kompleksnih brojeva. Po definiciji, dva su kompleksna broja *jednaka* ako su im jednaki posebno realni dijelovi i posebno imaginarni dijelovi. Geometrijski su kompleksni brojevi jednaki ako su jednaki vektori kojima su prikazani. U protivnom slučaju brojevi nisu jednaki; pojmova »veći« i »manji« nema za kompleksne brojeve.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Izraz kompleksnog broja $a = \alpha + \beta i$ nazivamo *algebarskim oblikom*; ako umjesto kartezijskih koordinata točke koja prikazuje kompleksan broj uvedemo njegove polarne koordinate (str. 251), dobivamo *trigonometrijski oblik* kompleksnog broja (sl. 367)

$$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$



Sl. 366



Sl. 367

ρ, tj. duljinu radijvektora pripadne točke, nazivamo *modulom* ili *apsolutnom vrijednosti* kompleksnog broja (označavamo sa $|a|$), kut φ (u radijanima) nazivamo *argumentom* kompleksnog broja (označavamo sa $\arg a$):

$$\rho = |a|, \qquad \varphi = \arg a.$$

Veza između ρ, φ i α, β ista je kao i među kartezijskim i polarnim koordinatama točke (vidi na str. 252)

$$\alpha = \rho\cos\varphi, \qquad \beta = \rho\sin\varphi;$$
$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha};$$

pri tome je $0 \leqslant \rho < \infty$, a φ može imati ma koju vrijednost: $-\infty < \varphi + \infty$; za dane kompleksne brojeve argument φ ima neizmjerno mnogo vrijednosti, koje se međusobno razlikuju za $2k\pi$ (k cio broj). *Glavna vrijednost* argumenta je u intervalu $-\pi < \varphi \leqslant +\pi$.

Broj »*nula*« $(0 + 0i)$ ima modul koji je jednak nuli; $\arg 0$ je neodređena veličina.

Eksponencijalni oblik. Često upotrebljavamo ovaj oblik pisanja kompleksnog broja a s modulom ρ i argumentom φ:

$$a = \rho e^{\varphi i} \text{ (eksponencijalni oblik)*.}$$

* Podrobnije o tome vidi na str. 606.

Tako npr. broj $1 + \sqrt{3}i$ možemo napisati ovako:

algebarski oblik $= 1 + \sqrt{3}i$

trigonometrijski oblik $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

eksponencijalni oblik $= 2e^{\frac{\pi}{3}i}$,

A također, ako se ne ograničimo na glavnu vrijednost argumenta

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i}$$

Konjugirano kompleksni brojevi. Dva kompleksna broja nazivamo *međusobno konjugiranim* (označavamo ih a i $\bar{a}$), ako su im realni dijelovi jednaki, a imaginarni se razlikuju samo po predznacima: $R(\bar{a}) = R(a)$, $I(\bar{a}) = -I(a)$. Geometrijski, konjugirano kompleksne brojeve prikazujemo točkama koje leže simetrično prema realnoj osi. Moduli konjugirano kompleksnih brojeva su jednaki, a argumenti se razlikuju po predznacima:

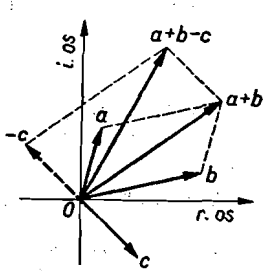
$$a = \alpha + \beta i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{\varphi i},$$
$$\bar{a} = \alpha - \beta i = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-\varphi i}$$

2. ALGEBARSKE OPERACIJE

Zbrajanje i oduzimanje dvaju ili više kompleksnih brojeva izvodimo po formuli

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) - (\alpha_3 + \beta_3 i) + \ldots =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots) + (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots)i.$$

Da geometrijski dobijemo vektor koji predstavlja zbroj ili razliku dvaju ili više brojeva, treba zbrojiti ili oduzeti vektore koji predstavljaju te brojeve, po pravilima operacija sa vektorima (vidi na str. 628) (sl. 368).



Sl. 368

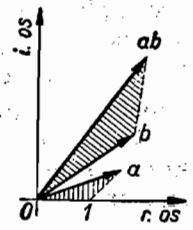
Množenje dvaju kompleksnih brojeva vršimo pomoću formule

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)\cdot(\alpha_2 + \beta_2 i) =$$
$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)i.$$

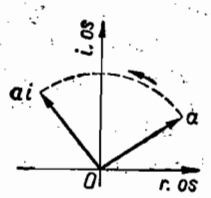
Ako su brojevi zadani u trigonometrijskom obliku, onda

$$[\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)]\,[\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

tj. modul produkta jednak je produktu modula, a argument produkta jednak je sumi argumenata faktora. Geometrijski, vektor koji prikazuje produkt a sa b dobivamo vrtnjom vektora a u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu za kut jednak $\arg b$, i povećanjem vektora $|b|$ puta. Produkt ab možemo također dobiti konstrukcijom sličnog trokuta (sl. 369). Napose, kada množimo a sa i, zavrtimo vektor, koji prikazuje a, za $\pi/2$, ne mijenjajući duljinu (sl. 370).



Sl. 369



Sl. 370

Dijeljenje dvaju kompleksnih brojeva definiramo kao operaciju suprotnu množenju. U algebarskom obliku je

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} i.$$

U trigonometrijskom obliku je

$$[\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] : [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)],$$

tj. modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dividenda i divizora, a argument kvocijenta jednak je razlici njihovih argumenata.

Geometrijski, vektor koji odgovara kvocijentu $\frac{a}{b}$ dobivamo vrtnjom vektora koji odgovara broju a, u smislu gibanja kazaljke na satu za kut $\arg b$, skrativši ga $|b|$ puta.

Dijeljenje s nulom je nemoguće.

Opća pravila za četiri aritmetičke operacije. Formalno se računa s kompleksnim brojevima $\alpha + \beta i$ isto tako kao i s običnim binomima, uz uvrštenje $i^2 = -1$. Kada dijelimo kompleksni broj s kompleksnim brojem »rješavamo se imaginarnosti u nazivniku« (analogno otklanjanju iracionalnosti u nazivniku, vidi na str. 172): brojnik i nazivnik pomnožimo s konjugirano kompleksnim nazivnikom, služeći se pri tome jednadžbom $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ (realan broj).

Primjer pretvaranja:

$$\frac{(3 - 4i)(-1 + 5i)^2}{1 + 3i} + \frac{10 + 7i}{5i} = \\ = \frac{(3 - 4i)(1 - 10i - 25)}{1 + 3i} + \frac{(10 + 7i)i}{5i \cdot i} = \\ = \frac{-2(3 - 4i)(12 + 5i)}{1 + 3i} + \frac{7 - 10i}{5} = \\ = \frac{-2(56 - 33i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} + \frac{7 - 10i}{5} = \\ = \frac{-2(-43 - 201i)}{10} + \frac{7 - 10i}{5} = \\ = \frac{1}{5}(50 + 191i) = 10 + 38{,}2i.$$

Potenciranje kompleksnog broja eksponentom n izvodimo po *Moivreovoj formuli*

$$[\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi);$$

modul potenciramo sa n, a argument pomnožimo sa n. Moivreova formula upotrebljiva je za bilo koju vrijednost n: cijelu, razlomljenu, pozitivnu, negativnu. Za razlomljeni n treba uzeti u obzir višeznačnost rezultata (vidi dalje).

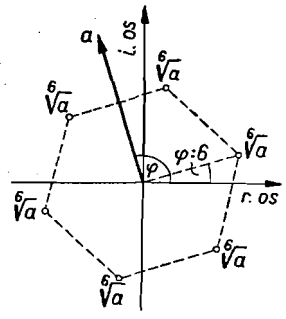
Napose imamo: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ i dalje $i^{4n+k} = i^k$.

Vađenje n-tog korijena, kao operacija inverzna potenciranju, izvodi se po Moivreovoj formuli za razlomljeni eksponent: ako je $a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, onda je

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i potenciranje sa cijelim eksponentom jednoznačne su operacije; vađenje n-tog korijena daje uvijek n različitih vrijednosti.

Ako za $\arg a$ uzmemo vrijednosti φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, ..., ..., $\varphi + 2(n-1)\pi$, onda će se vrijednosti $\arg \sqrt[n]{a}$ međusobno razlikovati za $2\pi/n$; za dalje vrijednosti k one će se ponavljati. Geometrijski, točke koje odgovaraju $\sqrt[n]{a}$ vrhovi su pravilnog n-terokuta sa središtem u polu (na sl. 371 nacrtano je 6 vrijednosti $\sqrt[6]{a}$).



Sl. 371

Algebarske funkcije kompleksne varijable. Ako je veličina z kompleksna varijabla (veličina koja prima po volji odaberive vrijednosti $z = x + yi$), onda je rezultat izvršenja određenih algebarskih operacija na z (i, eventualno, nekim konstantama) algebarska funkcija te varijable $w = f(z)$*. Takve su npr. funkcije

$$w = az + b, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = z^2, \quad w = \frac{z+i}{z-i}, \quad w = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

3. ELEMENTARNE TRANSCENDENTNE FUNKCIJE

Redovi s kompleksnim članovima. Beskonačan niz kompleksnih brojeva $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ima limes z ($z = \lim_{n\to\infty} z_n$), ako je počevši od nekog n, $|z - z_n| < \varepsilon$ (po volji malenog pozitivnog broja), tj. ako se počevši od nekog n, sve točke koje predočuju brojeve $z_n, z_{n+1}, \ldots$, nalaze u krugu polumjera ε sa središtem u z.

* U općenitijem smislu algebarska funkcija w može biti zadana implicitno jednadžbom

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \ldots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

koju vrlo često ne možemo riješiti eksplicitno (radikalima) s obzirom na w.

Primjer: $\lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a}\} = 1$ za po volji odabran a (ovdje pod $\{\sqrt[n]{a}\}$ razumijevamo onu vrijednost korijena koja ima najmanji argument, vidi sl. 372).

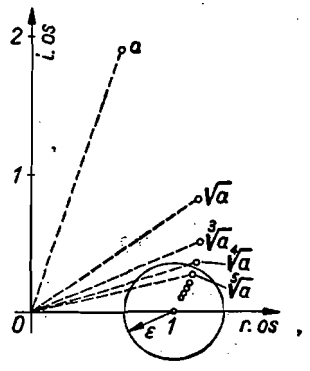
Beskonačan red s kompleksnim brojevima

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

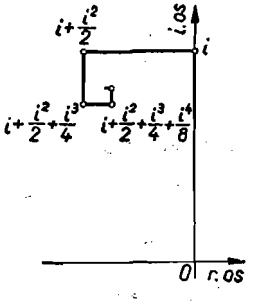
konvergira prema broju s (sumi reda), ako je

$$s = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

U slučaju konvergencije reda konac poligonalne spojnice točaka koje predočuju brojeve $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ neograničeno se približuje točki s.



Sl. 372



Sl. 373

Primjeri: 1) $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \frac{i^4}{4} + \ldots$

2) $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2^2} + \ldots$ (sl. 373).

Red konvergira *apsolutno*, ako konvergira red njegovih modula

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots,$$

i uvjetno, ako sam red konvergira, ali red modula divergira. U primjeru 1) red konvergira uvjetno, a u primjeru 2) konvergira apsolutno.

Red s promjenljivim članovima

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

definira neku funkciju od z za takve vrijednosti z za koje red konvergira.

Red potencija

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

(a_i su kompleksne konstante) konvergira apsolutno ili za sve vrijednosti z (u čitavoj ravnini) ili pak za vrijednosti koje leže unutar nekog *kruga konvergencije* sa središtem u ishodištu; izvan tog kruga red divergira; polumjer tog kruga nazivamo *polumjerom konvergencije* reda*. Npr.: za red $1 + z + z^2 + \ldots$ polumjer konvergencije je $R = 1$.

Obična eksponencijalna funkcija. Po definiciji je

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Taj red konvergira na čitavoj ravnini. Za čisto imaginarni eksponent yi je: $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ (*Eulerova formula*) npr. $e^{\pi i} = -1$.

U općem slučaju je

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

tj.

$$\mathrm{R}(e^z) = e^x \cos y, \quad \mathrm{I}(e^z) = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y$$

Odatle izlazi *eksponencijalni oblik* kompleksnog broja: $a + bi = \rho e^{\varphi i}$
Funkcija e^z je periodična s periodom $2\pi i$: $e^z = e^{z+2k\pi i}$, npr.: $e^0 = e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

Eulerove formule za kompleksne brojeve:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z$$

(o trigonometrijskim funkcijama kompleksnog argumenta vidi dalje).

Prirodni logaritam. Po definiciji je

$$w = \mathrm{Ln}\, z, \quad \text{ako je } z = e^w.$$

* Konvergenciju reda u točkama na samoj kružnici kruga konvergencije treba za svaki pojedini slučaj posebno ispitati.

Ako je $z = \rho e^{\varphi i}$, onda je $\mathrm{Ln}\, z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi)$, tj. $\mathrm{R}(\mathrm{Ln}\, z) = \ln \rho$, $\mathrm{I}(\mathrm{Ln}\, z) = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). $\mathrm{Ln}\, z$ je *višeznačna* funkcija. Ako se ograničimo na glavnu vrijednost φ (str. 600) dobivamo *glavnu vrijednost logaritma* (označavamo $\ln z$)

$$\ln z = \ln \rho + \varphi i \qquad (-\pi < \varphi \leqslant +\pi).$$

$\mathrm{Ln}\, z$ egzistira za sve kompleksne brojeve z, osim za nulu.

Opća eksponencijalna funkcija. Po definiciji je $a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a}$ ($a \neq 0$), a^z je *višeznačna* funkcija. Njena glavna vrijednost je $e^{z \ln a}$.

Trigonometrijske i hiperbolne funkcije.

Po definiciji je

$$\left.\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \\
\mathrm{sh}\, z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\
\mathrm{ch}\, z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.
\end{aligned}\right\} \text{Redovi konvergiraju na čitavoj ravnini.}$$

Funkcije $\sin z$ i $\cos z$ su periodične s periodom 2π, a funkcije $\mathrm{sh}\, z$ i $\mathrm{ch}\, z$ su periodične s periodom $2\pi i$.

Izrazi za funkcije čisto imaginarnog argumenta glase:

$$\sin yi = i \,\mathrm{sh}\, y, \quad \cos yi = \mathrm{ch}\, y, \quad \mathrm{sh}\, yi = i \sin y, \quad \mathrm{ch}\, yi = \cos y.$$

Formule koje vrijede za trigonometrijske i hiperbolne funkcije realnog argumenta (vidi na str. 231 do 233 i 246) vrijede i za funkcije kompleksnog argumenta. Napose se $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ za $z = x + yi$ računaju po formulama za $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\mathrm{sh}(a + b)$, $\mathrm{ch}(a + b)$.

Na primjer

$$\cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \sin x \,\mathrm{sh}\, y.$$

i prema tome

$$\mathrm{R}(\cos z) = \cos \mathrm{R}(z) \,\mathrm{ch}\, \mathrm{I}(z),$$
$$\mathrm{I}(\cos z) = -\sin \mathrm{R}(z) \,\mathrm{sh}\, \mathrm{I}(z).$$

Funkcije tg z, ctg z, th z, cth z definirane su formulama

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Arkus-funkcije i Area-funkcije Arc sin z, Arc cos z, Arc tg z, Arc ctg z, Arsh z, Arch z, Arth z, Arcth z definirane su isto tako kao i za realne varijable*. Npr.: $w = \operatorname{Arc}\sin z$, ako je $z = \sin w$.

Te funkcije imaju neizmjerno mnogo vrijednosti, a izražavamo ih logaritmima pomoću formula

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{Ar}\operatorname{sh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Ar}\operatorname{ch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{Ar}\operatorname{th} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z = -\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{iz + 1}{iz - 1}; \quad \operatorname{Ar}\operatorname{cth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}.$$

Glavne vrijednosti Arkus-funkcija i Area-funkcija izražavamo istim formulama sa funkcijom ln (glavna vrijednost logaritma)

$$\arcsin z = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{ar}\operatorname{sh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{ar}\operatorname{ch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{ar}\operatorname{th} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z = -\frac{1}{2i}\ln\frac{iz + 1}{iz - 1}, \quad \operatorname{ar}\operatorname{cth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z + 1}{z - 1}.$$

U tablici navedeni su izrazi za realne i imaginarne dijelove, za module i argumente trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija kompleksne varijable $z = x \pm iy$.

* Str. 238 i 247.

Izrazi R (w) i I (w)

Funkcija $w = f(x \pm iy)$	Realni dio: R (w)	Imaginarni dio: I (w)
$\sin(x \pm iy)$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\pm \cos x \operatorname{sh} y$
$\cos(x \pm iy)$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$\mp \sin x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{tg}(x \pm iy)$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\pm \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$
$\operatorname{sh}(x \pm iy)$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\pm \operatorname{ch} x \sin y$
$\operatorname{ch}(x \pm iy)$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\pm \operatorname{sh} x \sin y$
$\operatorname{th}(x \pm iy)$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\pm \dfrac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$

Izrazi $|w|$ i arg w

Funkcija $w = f(x \pm iy)$	Modul: $\lvert w \rvert$	Argument: arg w
$\sin(x \pm iy)$	$\sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\pm \operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$
$\cos(x \pm iy)$	$\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\mp \operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$
$\operatorname{sh}(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$	$\pm \operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{ch}(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$	$\pm \operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$

4. JEDNADŽBE KRIVULJA U KOMPLEKSNOM OBLIKU

Kompleksna funkcija realne varijable. Funkcija $z = f(t)$, gdje je $z = x + yi$, a t je realna varijabla predočena točkama z koje pri promjenljivom t tvore neku krivulju. Parametarske jednadžbe te krivulje jesu: $x = x(t)$, $y = y(t)$; *jednadžba u kompleksnom obliku je*: $z = f(t)$.

Na str. 610 i 611 navedeni su primjeri nekih krivulja izraženih u kompleksnom obliku i prikazanih na sl. 374.

Primjeri nekih krivulja u kompleksnom obliku

Krivulja	Jednadžba	Crtež
1. *Pravac:*		
a) prolazi kroz točku z_1 i sa osi Ox tvori kut φ	$z = z_1 + te^{\varphi i}$	
b) prolazi kroz dvije točke z_1 i z_2	$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$	
2. *Kružnica:*		
c) polumjera r sa središtem u ishodištu koordinata	$z = re^{ti}$	
d) polumjera r sa središtem u točki z_1	$z = z_1 + re^{ti}$	
3. *Hiperbola:*		
e) u normalnom obliku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$z = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t$ ili $z = ce^t + \bar{c}e^{-t}$, gdje su c i $\bar{c}$ konjugirano kompleksni brojevi $c = \frac{a+bi}{2}$, $\bar{c} = \frac{a-bi}{2}$	

4. *Elipsa:*		
f) u normalnom obliku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$z = a\cos t + ib\sin t$ ili $z = ce^{ti} + de^{-ti}$, gdje su $c = \frac{a+b}{2}$, $d = \frac{a-b}{2}$ tj. po volji odabrani realni brojevi	
g) u općem obliku (središte u točki z_1, osi su zakrenute za neki kut)	$z = z_1 + ce^{ti} + de^{-ti}$ gdje su c i d po volji odabrani kompleksni brojevi, koji određuju duljinu i zakret osi	
5. *Logaritamska zavojnica:*	$z = ae^{bt}$ gdje su a i b po volji odabrani kompleksni brojevi	

Sl. 374

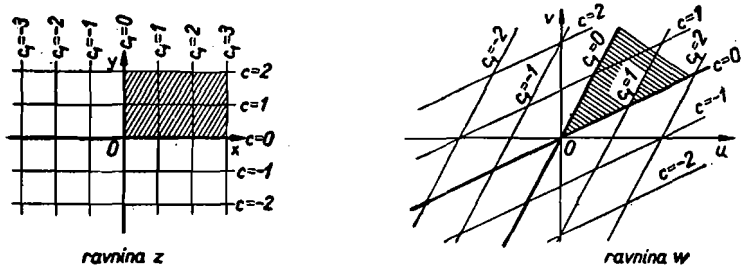
5. FUNKCIJE KOMPLEKSNIH VARIJABLI

Preslikavanje ravnine. Funkcija $w = f(z)$, gdje je $z = x + yi$ i $w = u + vi$, definirana je ako su nam poznate dvije funkcije dviju realnih varijabli

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Funkcija kompleksne varijable preslikava ravninu z u ravninu w*: svaka točka z_1 prelazi u pripadnu točku w_1, a geometrijski oblici (krivulje, područja) pri prelazu ravnine z u ravninu w pretvaraju se u drugi oblik. Krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$ prelazi u krivulju $u = u[x(t), y(t)]$, $v = v[x(t), y(t)]$ (t je parametar).

Koordinatne krivulje $y = c$ prelaze u $u = u(x, c)$, $v = v(x, c)$, gdje je x parametar; koordinatne krivulje $x = c_1$ prelaze u $u = u(c_1, y)$, $v = v(c_1, y)$, gdje je y parametar.



Sl. 375

Primjer preslikavanja: $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (sl. 375). Krivulja $y = c$ prelazi u $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, tj. u pravac $v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}c$; analogno krivulje $x = c_1$ prelaze u pravce $v = 2u - 3c_1$; iscrtkano područje prelazi u iscrtkano područje.

Limes, neprekinutost, derivacija. Pojmove limesa, neprekinutosti i derivacije definiramo za funkcije kompleksne varijable $w = f(z)$ formalno jednako kao i za funkcije realne varijable (vidi na str. 338, 344 i 371).

Kompleksni broj A nazivamo *limesom* funkcije $f(z)$ kada z teži k a

$$A = \lim_{z \to a} f(z), \qquad (*)$$

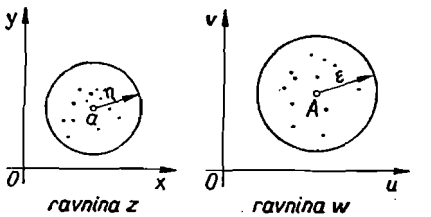
* Ako je funkcija $w = f(z)$ višeznačna (npr. $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arc\,sin} z$, $\operatorname{Ar\,th} z$ itd.), onda je područje vrijednosti w skup nekoliko ravnina postavljenih jedna na drugu; svaka vrijednost funkcije predočuje se tačkom koja leži na jednoj od ravnina. Te ravnine su međusobno povezane duž neke krivulje i tvore tzv. *višelisnu* ili *Riemannovu plohu.*

ako za po volji odabrani mali pozitivni realni broj ε možemo naći takav realni pozitivni broj η da je za svaki kompleksni broj z (izuzevši možda sam broj a) koji zadovoljava uvjet $|a - z| < \eta$, ispunjen i uvjet $|A - f(z)| < \varepsilon$. Geometrijsko značenje (sl. 376): Svakoj točki z (izuzevši možda točku a) koja leži unutar kruga polumjera η sa središtem a odgovara u preslikavanju točka w određena funkcijom $w = f(z)$ koja leži unutar polumjera ε sa središtem A.

Ako funkcija $w = f(z)$ ima limes kada $z \to a$, a pri tome je

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \qquad (**)$$

(tj. limes funkcije jednak je vrijednosti funkcije limesa nezavisne varijable), onda funkciju w nazivamo *neprekinutom* u točki a. Ekvivalentna definicija neprekinutosti je: funkcija $w = f(z)$ neprekinuta je u točki z, ako iz uvjeta $|\Delta z| \to 0$ izlazi uvjet



Sl. 376

$$|\Delta w| = |f(z + \Delta z) - f(z)| \to 0 \text{ ili } \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

(infinitezimalnom prirastu argumenta odgovara infinitezimalan prirast funkcije).

Derivacijom $w' = f'(z)$ zadane funkcije $w = f(z)$ nazivamo funkciju koja je za zadanu vrijednost z definirana jednadžbom

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (***)$$

Funkciju koja u zadanoj tački ima limes (***) nazivamo *derivabilnom*, a također i *monogenom* ili *holomorfnom* u toj točki. Geometrijski smisao modula i argumenta derivacije funkcije kompleksne varijable vidi na str. 616.

Analitičke funkcije. Ako je funkcija $w = f(z)$ derivabilna u svim točkama nekog kruga sa središtem z_0 (ma kako malog polumjera) nazivamo je *analitičkom u točki* z_0; funkciju nazivamo *analitičkom u suvislom području* (vidi na str. 352) ako je ona analitička u svim točkama tog područja. Nuždan i dovoljan* uvjet da funkcija $u + vi = f(x + yi)$ bude analitička je

* Za dovoljnost treba još da su parcijalne derivacije u Cauchy-Riemannovom uvjetu neprekinute u promatranom području.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (\textit{Cauchy-Riemannov uvjet}).$$

Npr. funkcija $w=z^2$ ($u=x^2-y^2$, $v=2xy$) posvuda je analitička; funkcija $w=u+vi$ definirana jednadžbama $u=2x+y$, $v=x+2y$, nije nigdje analitička. U slučaju analitičke funkcije $w=u+vi$ funkcije u i v su *harmonijske funkcije* realnih varijabli x i y, tj. zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu (vidi na str. 661). Ako poznamo harmonijsku funkciju u možemo s točnošću do aditivne konstante odrediti njenu *konjugiranu* harmonijsku funkciju v iz Cauchy-Riemannova uvjeta

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+\varphi(x),\ \text{gdje je}\ \frac{d\varphi}{dx}=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right).$$

Analogno možemo iz v odrediti u.

Točke u kojima je funkcija analitička nazivamo *regularnim* točkama. Ako je funkcija analitička u nekom području, izuzevši u nekim točkama toga područja, onda te točke nazivamo *singularnim*. Primjere i klasifikaciju singularnih točaka vidi na str. 616. Elementarne funkcije (algebarske i transcendentne vidi na str. 334) su analitičke na čitavoj ravnini, s izuzetkom nekih izoliranih singularnih točaka.

Analitičke funkcije imaju u svim regularnim točkama derivacije bilo kojega reda. Derivacije elementarnih funkcija kompleksne varijable računamo po istim pravilima kao i derivacije istih funkcija realnih varijabli.

Modul analitičke funkcije. U različitim pitanjima teorije i upotrebe funkcija kompleksne varijable od bitne je važnosti apsolutna veličina (modul) funkcije

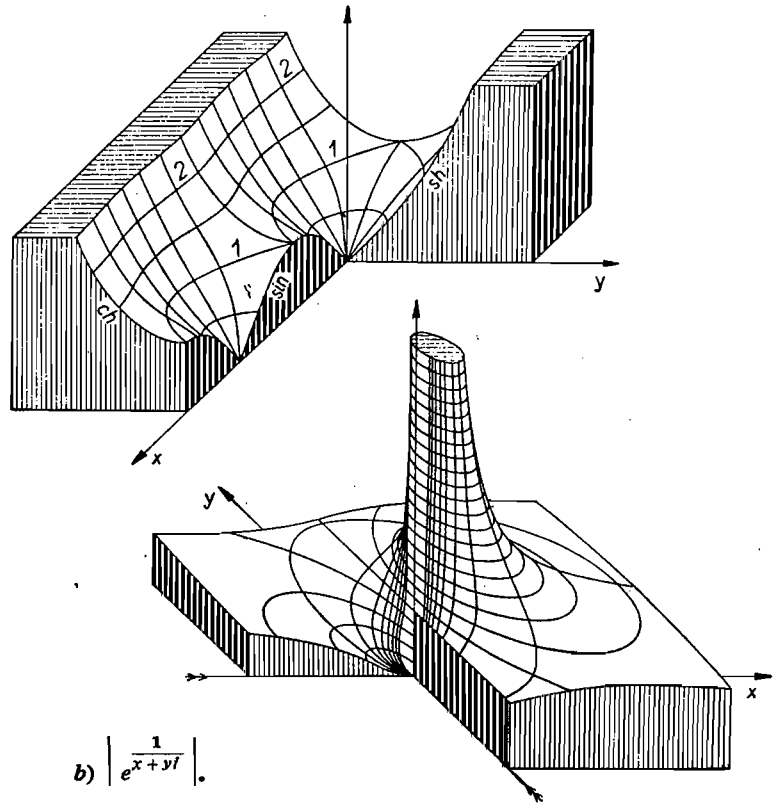
$$|w|=|f(z)|=\sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2}=\varphi(x,y).$$

Ploha $|w|=\varphi(x,y)$, gdje je $|w|$ aplikata u točki $z=x+yi$, naziva se *reljefom* funkcije. Npr. za funkciju $\sin z=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$ je

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y}.$$

Na sl. 377*a* prikazan je reljef te funkcije; na sl. 377*b* prikazan je reljef funkcije

$$w=e^{1/z}.$$



Sl. 377

Kako je modul funkcije pozitivna veličina, reljef funkcije je uvijek iznad ravnine z, osim za točke $|f(z)|=0$, tj. $f(z)=0$. Takve vrijednosti z (korijeni jednadžbe $f(z)=0$) nazivamo nultočkama funkcije $f(z)$.

Funkciju nazivamo *ograđenom* u danom području ako egzistira takav pozivitni broj N da je $|f(z)|<N$ za svaku točku z u tom području, a *neograđenom* ako takav broj N ne postoji.

Osnovni teoremi o modulu analitičkih funkcija:

1) Ako je $w=f(z)$ analitička funkcija u zatvorenom području, onda njen modul postiže maksimum na rubu tog područja.

2) Ako je $w=f(z)$ analitička u čitavoj ravnini i ograđena, onda je ta funkcija konstanta: $f(z)=\text{const}$ (*Liouvilleov teorem*).

Singularne točke. Ako je $w = f(z)$ analitička u okolini točke $z = a^*$ i ograđena u toj okolini, moguća su ova dva slučaja:

1) $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$. U tom slučaju je funkcija $f(z)$ analitička u samoj točki a.

2) $f(a)$ ima drugu vrijednost ili funkcija nije definirana u točki a. Takva točka a je singularna i naziva se *uklonjivom singularnom točkom* zato, što zamjenom vrijednosti $f(a)$ brojem $\lim_{z \to a} f(z)$ možemo funkciju načiniti analitičkom i u toj točki a**.

Ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u okolini točke $z = a$, a nije ograđena u toj okolini, onda je točka a singularna točka. Pri tome su moguća ova dva slučaja:

1) $|f(z)| \to \infty$ ako se z približava točki a po bilo kojem putu. Takvu točku a nazivamo *polom.* U tome slučaju pišemo $f(a) = \infty$. O redu pola vidi na str. 624.

2) Kada se z približava točki a, $|f(z)|$ ne teži k ni jednom broju: niz $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ ima različite limese, ovisno o izboru točaka z_n koje se približavaju točki a. Takvu točku a nazivamo *bitno singularnom točkom****.

Primjer: Za funkciju $w = \dfrac{1}{z - a}$ točka a je pol; za funkciju $w = e^{1/z}$ točka 0 je bitno singularna (vidi sl. 377, *b*).

Konformna preslikavanja. Preslikavanje ravnine po analitičkoj funkciji u okolini točke z, za koju je $w' \neq 0$, ima ova važna svojstva: Neizmjerno mali vektori svih smjerova, koji izlaze iz te točke: 1) povećavaju (ili umanjuju) svoju duljinu jedan te isti broj puta, naime $|w|$ puta (s točnošću do infinitezimalnih veličina višeg reda) i 2) vrte sa za jedan te isti kut jednak arg w'. Na taj se način likovi u neizmjerno malom području preslikavaju u sebi slične likove i zadržavaju oblik (sl. 378). Takvo preslikavanje nazivamo *konformnim preslikavanjem.* Likovi konačne veličine se izobličuju, ali se kutovi između dviju krivulja ne mijenjaju (*čuvanje kutova,* sl. 379). Napose, koordinatne krivulje $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ u konformnom preslikavanju pretvaraju se u dvije porodice međusobno okomitih krivulja.

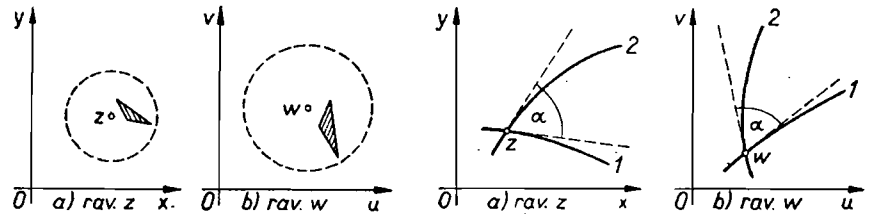
Tako pomoću analitičkih funkcija možemo dobiti mnoštvo pravokutnih sistema krivocrtnih koordinata.

* Tj. unutar po volji malenog kruga sa središtem u točki a, izuzevši možda same te točke.

** Taj slučaj analogan je uklonljivoj prekinutosti funkcije realne varijable (vidi na str. 347).

*** U tome slučaju možemo odabrati takav način približavanja z k točki a, da se $f(z)$ približava po volji odabranom kompleksnom broju.

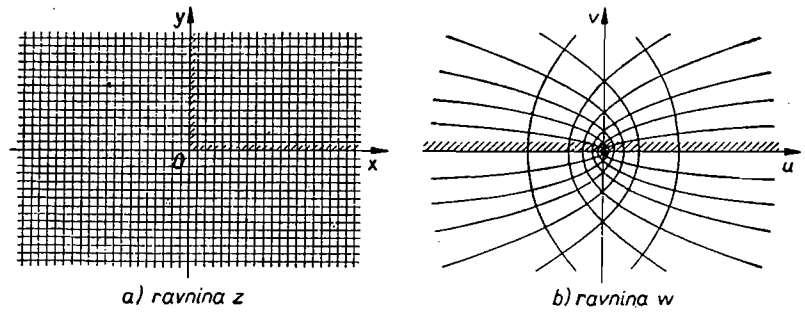
Obrnuto, za po volji odabrano konformno preslikavanje postoji neka ortogonalna mreža krivulja koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu. U primjeru $u = 2x + y$, $v = x + 2y$



Sl. 378

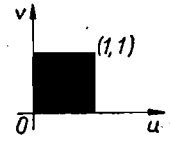
Sl. 379

(str. 614) ortogonalnost je narušena; u primjeru $w = z^2$ je sačuvana; koordinatne krivulje prelaze u dvije porodice konfokalnih parabola (sl. 380). U točki $z = 0$ imamo $w' = 0$, konformnost je narušena. Prvi koordinatni kvadrant prelazi u gornju poluravninu.



Sl. 380

Konformna preslikavanja primjenjujemo u elektrotehnici, hidrodinamici, aerodinamici i drugim oblastima primjene. Dalje (str. 618 i 619) je naveden pregled najčešće upotrebljavanih konformnih preslikavanja, zajedno sa crtežom one pravokutne mreže krivulja (*izotermna mreža*) koja se preslikava u kartezijsku pravokutnu mrežu. Crtkano su označeni rubovi područja koje se preslikava u gornju poluravninu. Područje koje se preslikava u kvadrat s vrhovima (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) crno je ispunjeno (sl. 381).



Sl. 381

6. JEDNOSTAVNIJA KONFORMNA PRESLIKAVANJA

Funkcije i njihova svojstva	Ortogonalna mreža koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu

a) *Linearna funkcija:*

$$w = az + b \quad (a = \rho e^{\varphi i}).$$

Transformaciju možemo rastaviti na troje: $t = e^{\varphi i} z$ je vrtnja ravnine za kut φ, $s = \rho t$ je rastezanje na ρ-struko uz održanje sličnosti, $w = s + b$ je pomak paralelan vektoru b. Kao rezultat likovi se ravnine z preslikavaju u sebi slične likove, a uz to se zakrenu i pomaknu. Točke $z_1 = \frac{b}{1-a}$ i $z_2 = \infty$ prelaze same u sebe.

b) *Inverzija:* $w = \frac{1}{z}$.

Točka z s radijvektorom ρ i polarnim kutom φ preslikava se u tačku s radijvektorom $1/\rho$ i kutom $(-\varphi)$. Transformacija se sastoji od inverzije na jediničnoj kružnici* i zrcaljenja na osi Ox. Kružnice prelaze u kružnice (pri čemu se pravac smatra posebnim slučajem kružnice sa polumjerom ∞). Točka 0 prelazi u ∞, a točke 1 i -1 ostaju na mjestu. Konformnost je narušena za $z = 0$.

c) *Razlomljena linearna funkcija:*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

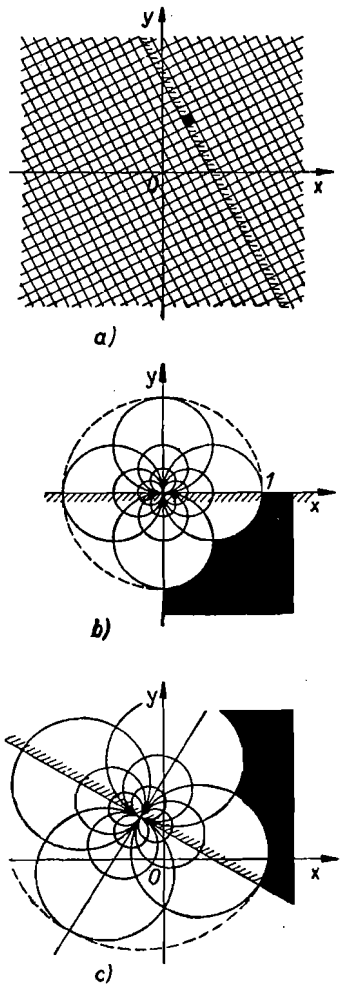
Transformaciju možemo rastaviti na troje:

$t = cz + d$ (linearna funkcija),

$s = \frac{1}{t}$ (inverzija),

$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} s$ (linearna funkcija).

Razlomljena linearna funkcija preslikava kružnicu u kružnicu (pri čemu se pravac smatra kao specijalan slučaj kružnice); dvije točke koje zadovoljavaju jednadžbu $z = \frac{az + b}{cz + d}$ ostaju na mjestu.



Slika 382

* *Inverzijom* s obzirom na zadanu kružnicu polumjera R nazivamo transformaciju točaka ravnine, pri kojoj točka M_1 udaljena d_1 od središta kruga prelazi u točku M_2 na istoj poluzraci OM_1 (ili njezinom produženju) na udaljenosti $OM_2 = d_2 = \frac{R^2}{d_1}$ pri tome točka M_2 prelazi u točku M_1. Točke izvan kružnice prelaze u točke unutar kružnice i obrnuto.

Funkcije i njihova svojstva	Ortogonalna mreža koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu

d) *Kvadratna funkcija:* $w = z^2$.

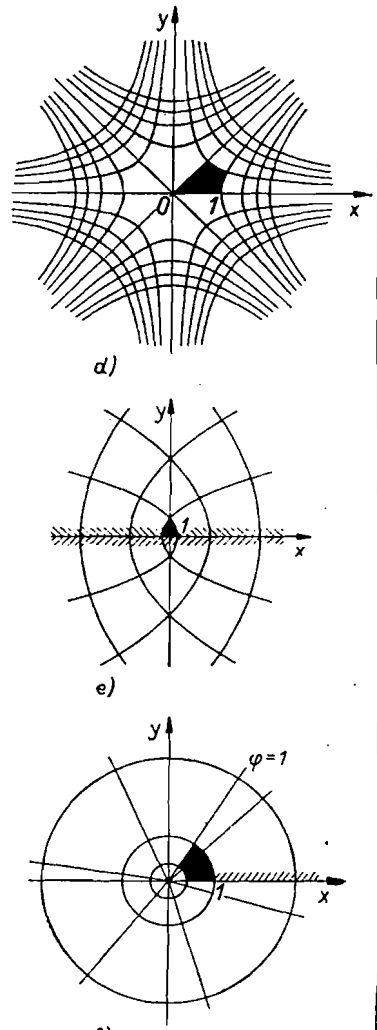
Čitava ravnina z prelazi u dvostruku ravninu w. Izotermnu mrežu ravnine z sačinjavaju dvije porodice hiperbola $u = x^2 - y^2$ i $v = 2xy$. Konformnost je narušena za $z = 0$. Fiksne točke su 0 i 1.

e) *Kvadratni korijen:* $w = \sqrt{z}$.

Funkcija je dvoznačna; čitava ravnina preslikava se: 1) u gornju poluravninu, 2) u donju poluravninu. Izotermnu mrežu ravnine z sačinjavaju dvije porodice konfokalnih parabola sa žarištem u ishodištu i osima usmjerenim u pozitivnom i negativnom smjeru osi Ox. Konformnost je narušena za $z = 0$. Fiksne točke su 0 i $+1$.

f) *Logaritam:* $w = \operatorname{Ln} z$,

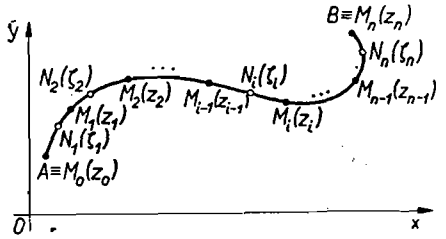
$u = \ln \rho$, $v = \varphi + 2k\pi$; izotermnu mrežu tvore kružnice $\ln \rho = \text{const}$ i poluzrake $\varphi = \text{const}$, tj. mreža je polarna. Funkcija ima neizmjerno mnogo vrijednosti; za glavnu vrijednost logaritma čitava ravnina prelazi u prugu omeđenu pravcima $v = -\pi$ i $v = +\pi$ (uključivo posljednji).



Slika 382

7. INTEGRALI U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

Definicija. Integralom funkcije kompleksne varijable $w = f(z)$ po luku $\overset{\frown}{AB}$ krivulje na ravnini z (»put integracije«) nazivamo kompleksni broj koji dobivamo na ovaj način (sl. 383):



Sl. 383

1) luk $\overset{\frown}{AB}$ dijelimo na n odsječaka sa po volji odabranim dodirištima

$$M_1(z_1), M_2(z_2), \ldots, M_{n-1}(z_{n-1})^*$$

[stavljamo $A \equiv M_0(z_0)$, $B \equiv M_n(z_n)$];

2) unutar (ili na rubu) svakog odsječka $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ po volji odaberemo točku $N_i(\zeta_i)$;

3) u točkama ζ_i izračunamo vrijednosti funkcije $f(z)$ i pomnožimo ih s pripadnom razlikom $z_i - z_{i-1}$ (prirastom argumenta);

4) n dobivenih produkata $f(\zeta_i) \cdot (z_i - z_{i-1})$ zbrojimo;

5) potražimo limes sume $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \cdot (z_i - z_{i-1})$, kada svaki prirast argumenta teži k nuli. Ako taj limes egzistira i ne ovisi ni o izboru točaka M_i ni o izboru točaka N_i, nazivamo ga integralom funkcije $f(z)$ po luku $\overset{\frown}{AB}$ i označujemo ga

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz. \qquad (*)$$

Svojstva. Integral (*) ima ista svojstva kao i krivuljni integral drugog tipa (vidi na str. 508): promjenom smjera puta integracije integral mijenja predznak; ako se put integracije rastavi na nekoliko dijelova, vrijednost integrala jednaka je sumi integrala po pojedinim dijelovima.

* Kompleksni broj u zagradama iza oznake točke jednak je vrijednosti kompleksne varijable koju prikazuje ta točka.

Procjena integrala. Ako je duljina puta $\overset{\frown}{AB}$ jednaka s i za z na tom putu apsolutna veličina $f(z)$ nije veća od pozitivnog broja M [$|f(z)| \leqslant M$], onda je

$$\left| \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz \right| \leqslant Ms.$$

Izračunavanje integrala. Ako je podintegralna funkcija $f(z)$ u obliku $u(x, y) + iv(x, y)$ i put integracije $\overset{\frown}{AB}$ određen parametarski sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, a vrijednost t za početak A i kraj B puta integracije je t_A i t_B, onda je integral (*) izražen krivuljnim integralom funkcija realnih varijabli

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int_{\overset{\frown}{AB}} v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy,$$

koje računamo po pravilima navedenim na str. 507 i 508.

Nezavisnost integrala od puta. Da integral (*) funkcije kompleksne varijable, definirane u nekom jednostruko suvislom* području, ne bi ovisio o putu koji spaja dvije fiksirane točke $A(z_A)$ i $B(z_B)$, nužno je i dovoljno da je funkcija analitička u tome području, tj. da je za nju ispunjen Cauchy-Riemannov uvjet (vidi na str. 614). Ako uz te ispunjene uvjete fiksiramo početnu točku $A_0(z_0)$, a krajnju točku puta integracije $M(z)$ načinimo promjenljivom, onda je

$$\int_{\overset{\frown}{A_0M}} f(z)\,dz = F(z),$$

pri čemu je $F'(z) = f(z)$; funkciju $F(z)$ nazivamo *primitivnom funkcijom* analitičke funkcije $f(z)$. Primitivna funkcija ovisi o izboru početne točke A_0; opći oblik svih primitivnih funkcija od $f(z)$ je

$$F(z) + C = \int f(z)\,dz \quad (\textit{neodređeni integral}).$$

Neodređeni integrali elementarnih funkcija kompleksne varijable računaju se po istim formulama kao i integrali istih funkcija realnih varijabli.

Osnovna formula integralnog računa. Integral (*) analitičke funkcije $f(z)$ jednak je prirastu primitivne funkcije pri prelazu od početne točke puta do konačne:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = F(z_B) - F(z_A).$$

* O jednostruko suvislom području vidi na str. 352. U slučaju višestruko suvislog područja uvjet može biti i neispunjen.

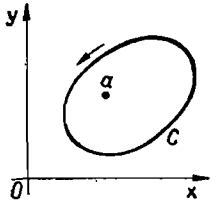
Integral po zatvorenoj krivulji C funkcije $f(z)$ koja je analitička za čitavo jednostruko suvislo područje ograničeno tim putem jednak je nuli (Cauchyjev teorem): ako to područje ima singularnih točaka, integral računamo po teoremu residuâ (vidi na str. 625). Napose za funkciju $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, koja ima jedinu singularnu točku $z = a$, integral po zatvorenoj krivulji koja okružuje tu točku u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu (sl. 384) jest

$$\int_{\widehat{C}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

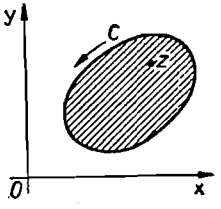
Cauchyjeve formule. Ako je funkcija $f(z)$ analitička u nekom jednostruko suvislom području, onda su, njena vrijednost u bilo kojoj točki z tog područja, a također i vrijednosti njenih derivacija ma kojega reda, izražene vrijednostima te funkcije po zatvorenoj krivulji C, koja okružuje tu točku (sl. 385), ovim *Cauchyjevim formulama*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \\ f''(z) &= \frac{2}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta, \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

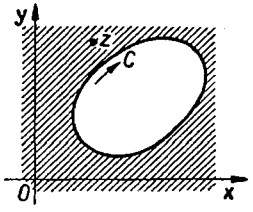
gdje je ζ varijabla integracije, a integracija se vrši po putu C u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu.



Sl. 384



Sl. 385



Sl. 386

Ako je funkcija $f(z)$ analitička u čitavom dijelu ravnine koja se nalazi izvan zatvorene krivulje C, onda su vrijednost $f(z)$ i vrijednosti njenih derivacija u po volji odabranoj točki z tog područja (sl. 386) izražene tim istim formulama (*), ali se integracija vrši u smislu gibanja kazaljke na satu $\widehat{C}$.

Cauchyjevim formulama možemo izračunati i vrijednosti nekih određenih integrala.

Primjer: Uzmimo da je $f(z) = e^z$ (funkcija analitička na čitavoj ravnini), a put integracije C je kružnica sa središtem u z i polumjerom r (njegova jednadžba je $\zeta = z + re^{i\varphi}$, vidi na str. 610); po posljednjoj od formula (*) tada dobivamo

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} \frac{e^\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{z+re^{i\varphi}}}{r^{n+1}\,e^{i\varphi(n+1)}}\,ire^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} e^{z + r\cos\varphi + ir\sin\varphi - in\varphi}d\varphi,$$

odakle je

$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi + i(r\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\cos(r\sin\varphi - n\varphi)]d\varphi + i\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\sin(r\sin\varphi - n\varphi)]d\varphi.$$

Kako je imaginarni dio jednak nuli, dobivamo vrijednost integrala

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

8. RAZVOJ ANALITIČKIH FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA

Taylorov red. Svaka funkcija $f(z)$, analitička unutar nekog kruga sa središtem a, može se u svim točkama unutar tog kruga na jednoznačan način izraziti u obliku reda potencija

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n;$$

gdje je koeficijent razvoja c_n kompleksni broj određen formulom

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Tako je

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \qquad (\textit{Taylorov red}).$$

Razvoj funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ u redove potencija vidi na str. 606 i 607.

Laurentov red. Svaka funkcija $f(x)$, analitička unutar nekog vijenca između dvije koncentrične kružnice sa središtem a*, može se na jednoznačan način izraziti u obliku reda potencija

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \begin{cases} c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \\ \qquad \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \\ \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \ldots \\ \qquad \ldots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \ldots \end{cases} \qquad (*)$$

(*Laurentov red*), gdje su koeficijenti razvoja c_n kompleksni brojevi određeni formulama

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

($\widehat{C}$ je neka zatvorena krivulja unutar vijenca, koja okružuje točku a u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu).

Singularne točke. Ako je funkcija $f(z)$ analitička u okolini točke a**, onda karakter točke a određujemo po obliku razvoja funkcije u Laurentov red (*) u okolini te točke na ovaj način:

1) Ako red (*) ne sadrži članove s negativnim potencijama $z-a$ ($c_n = 0$ za $n < 0$), onda Laurentov red prelazi u Taylorov red***; funkcija $f(z)$ je analitička i u samoj točki, ako je $f(a) = c_0$ ili je a uklonjiva singularna točka.

2) Ako red (*) ima konačan broj članova s negativnim potencijama od $z-a$ ($c_m \neq 0$ i svi $c_n = 0$ za $n < m < 0$), onda je točka a pol (vidi str. 616) funkcije $f(z)$ (*pol m-tog reda*).

* Polumjer unutarnjeg kruga može biti jednak nuli i tada vijenac prelazi u krug iz koga je izuzeta jedna tačka — njegovo središte.

** Vidi opasku na str. 616.

*** Njeni koeficijenti u tome slučaju, na osnovu Cauchyjevih formula (str. 622), jesu

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

3) Ako red (*) ima neizmjerno mnogo članova s negativnim potencijama od $z-a$, onda je točka *a bitno singularna točka* (vidi na str. 616).

U slučaju 2) i 3) koeficijent c_{-1} za $(z-a)^{-1}$ u Laurentovom redu nazivamo *residuumom* funkcije $f(z)$ u točki $z = a$.

$$\text{Residuum } f(z)_{z=a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \qquad (**)$$

Teorem residuâ. Iz definicije (**) izlazi ovaj teorem, pomoću koga možemo izračunati integral po zatvorenoj krivulji koja okružuje singularnu točku (str. 622): integral

$$\int_{\widehat{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

funkcije $f(z)$, koja je analitička u čitavom jednostrukom suvislom području unutar zatvorene krivulje uzete u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu, izuzevši u konačnom broju točaka $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (sl. 387), jednak je produktu $2\pi i$ sa sumom residuâ u svim tim singularnim tačkama

$$\int_{\widehat{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\operatorname{Res} f(z)_{z=a_1} + \operatorname{Res} f(z)_{z=a_2} + \ldots + \operatorname{Res} f(z)_{z=a_k}\right].$$

Residuum za pol m-tog reda možemo izračunati po formuli

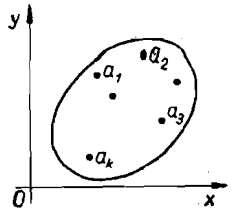
$$\operatorname{Res} f(z)_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!}\left.\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[f(z)\cdot(z-a)^m\right]\right|_{z=a}. \qquad (1)$$

Ako je $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje su $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ funkcije analitičke u točki $z = a$, a a je jednostruki korijen (vidi str. 182) jednadžbe $\psi(z) = 0$ [tj. $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$], onda je točka $z = a$ pol (prvog reda) funkcije $f(z)$, i formula (1) daje

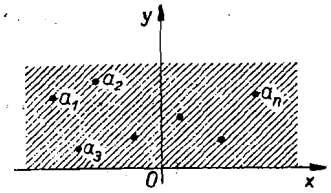
$$\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (2)$$

Ako je a m-struki korijen jednadžbe $\psi(z) = 0$ [tj. $\psi(a) = \psi'(a) = \ldots = \psi^{(m-1)}(a) = 0$, $\psi^{(m)}(a) \neq 0$], onda je točka $z = a$ pol m-tog reda funkcije $f(z)$.

Primjena pri računanju određenih integrala. Pomoću teorema residuâ možemo naći neke određene integrale funkcija realnih varijabli. Ako je $f(z)$ funkcija analitička u čitavoj gornjoj poluravnini uključivši i realnu os, s izuzetkom konačnog broja singularnih točaka $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, koje leže iznad realne osi (sl. 388),



Sl. 387



Sl. 388

a »nula« je višestruki korijen jednadžbe $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, višestrukosti $m \geqslant 2$*, onda je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)_{z=a_i}. \qquad (*)$$

Primjer: Izračunaj integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Jednadžba $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3} = \frac{x^6}{(x^2+1)^3} = 0$ ima šestero-

struki korijen $x = 0$. U gornjoj poluravnini funkcija $w = \frac{1}{(1+z^2)^3}$ ima jedinu singularnu točku $z = i$, koja je pol trećeg reda**.

Po formuli (1) dobivamo

$$\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3}_{z=i} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z=i}.$$

Izračunamo li $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-i}{1+z^2}\right)^3 = \frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$, dobivamo

$$\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3_{z=i}} = 6(z+i)^{-5}_{z=i} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16}i.$$

U skladu s formulom (*) izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

* Vidi na str. 182.

** Jednadžba $(1+z^2)^3 = 0$ ima dva trostruka korijena: i i $-i$.

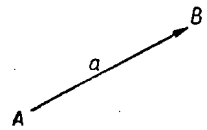
II. VEKTORSKI RAČUN

A. VEKTORSKA ALGEBRA I VEKTORSKE FUNKCIJE SKALARA

1. OSNOVNI POJMOVI

Skalarne i vektorske veličine. Veličine kojih vrijednosti možemo izraziti pozitivnim ili negativnim brojevima (»skalarima«) nazivamo *skalarnim* (masa, temperatura, rad itd.); veličine pak kojih se vrijednosti određuju kako dimenzijama, tako i smjerom u prostoru, nazivamo *vektorskim* (sila, brzina, ubrzanje, napetost električkog i magnetskog polja itd.) i možemo ih predočiti vektorima.

Vektor je odsječak (sl. 389) koji ima određenu duljinu i smjer (oznake su $\vec{AB}$, **a**, **b**, **c**, ..., ponekad $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ili $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...). A je *početak*, B je *kraj* ili šiljak vektora; duljina vektora **a** (*modul* ili apsolutna vrijednost) označuje se sa a ili $|\mathbf{a}|$. *Nulvektor* (0) je vektor kojemu se početak i završetak podudaraju; njegov je modul jednak 0, a smjer neodređen. Dva vektora, **a** i **b**, smatramo *jednakim* ako su im moduli jednaki i ako se podudaraju u smjeru (tj. vektori koji su paralelni i orijentirani u istu stranu*).



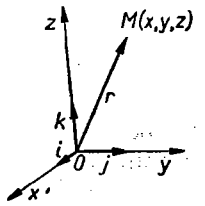
Sl. 389

Kolinearni vektori su paralelni s jednim te istim pravcem, *komplanarni* su paralelni s jednom te istom ravninom. Međusobno *suprotni* vektori jednaki su po duljini i suprotnog smjera: $\vec{AB} = \mathbf{a}$ i $\vec{BA} = -\mathbf{a}$. *Jedinični vektori* su oni kojima je modul jednak 1; jedinični vektor, kojemu se smjer podudara sa smjerom vektora **a**,

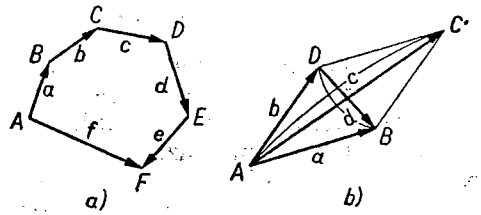
* Prema ovoj definiciji vektor se ne mijenja ako ga prenesemo paralelno samom sebi, tako da početak padne u po volji odaberivu točku prostora. Ovakvi vektori tvore sistem *slobodnih* vektora. U nekim pitanjima mehanike razmatraju se vektori kojih je početak pričvršćen u određenoj točki prostora (sistem *vezanih* vektora) ili se može prenijeti samo u one točke koje leže na pravcu duž smjera vektora (sistem *kliznih* vektora).

označuje se sa $\mathbf{a}^\circ$ i naziva *ortom* tog smjera. Vektor $\mathbf{a}$ možemo izraziti u obliku: $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{a}^\circ$, gdje je a modul vektora $\mathbf{a}$. Jedinični vektori koji imaju smjer pravokutnih koordinatnih osi Ox, Oy, Oz (u smjeru porasta koordinata)* označuju se sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (sl. 390).

Radijvektor točke. Vektor OM kojeg se početak podudara sa ishodištem, a kraj se nalazi u točki M (vidi sl. 390) potpuno određuje tu točku i naziva se *radijvektorom* točke M (označuje se sa $\mathbf{r}$). Ishodište O u tom se slučaju naziva *polom*.



Sl. 390



Sl. 391

Linearne kombinacije vektora. *Zbroj* nekoliko vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}, \ldots, \mathbf{e}$ je vektor $\mathbf{f} = \overrightarrow{AF}$, koji zatvara poligonalni potez $ABCDEF$, sastavljen od sumanda vektora (sl. 391, *a*); zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ (sl. 391, *b*) je vektor $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, tj. dijagonala paralelograma $ABCD$. Osnovna su svojstva zbroja

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Razlikom $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ nazivamo zbroj vektora $\mathbf{a}$ i $-\mathbf{b}$ (dijagonala DB na slici 391, *b*); $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{d}$; svojstva razlike: $\mathbf{a}-\mathbf{a}=0$ (nulvektor), $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$.

Produkt skalara i vektora ($\alpha\mathbf{a}$ ili $\mathbf{a}\alpha$) nazivamo vektor kolinearan s vektorom $\mathbf{a}$; njegova je duljina jednaka $|\alpha|\,a$, a smjer se podudara sa smjerom $\mathbf{a}$ za $\alpha > 0$ i suprotan je za $\alpha < 0$; svojstva tog su produkta

$$\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}\alpha, \qquad \alpha\beta\mathbf{a}=\beta\alpha\mathbf{a}, \qquad (\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a},$$
$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}.$$

Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d}$ s koeficijentima $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ (skalarnim) je vektor

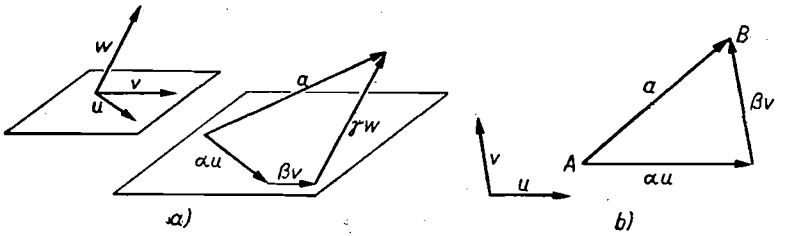
$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\ldots+\delta\mathbf{d}. \qquad (*)$$

* U ovoj glavi je primijenjen desni sistem koordinata (vidi str. 270).

Po volji odabrani vektor $\mathbf{a}$ možemo jednoznačno rastaviti na zbroj triju vektora, koji su paralelni trima zadanim (nekomplanarnim) vektorima $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (sl. 392, *a*)

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}; \qquad (**)$$

sumande $\alpha\mathbf{u}$, $\beta\mathbf{v}$, $\gamma\mathbf{w}$ nazivamo *komponentama*, a skalarne faktore α, β, γ *koeficijentima* tog rastava. Vektore koji su paralelni s jednom ravninom možemo predočiti u obliku $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$, gdje su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dva zadana nekolinearna vektora (sl. 392, *b*).



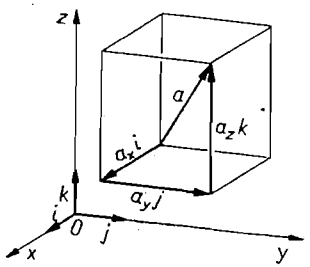
Sl. 392

Koordinate vektora. *Pravokutne Descartesove koordinate.* Suglasno formuli (**) svaki vektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ u prostoru može biti jednoznačno rastavljen na zbroj vektora paralelnih jediničnim vektorima $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ (vidi str. 627)

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}; \qquad (1)$$

Skalare a_x, a_y i a_z nazivamo *pravokutnim Descartesovim koordinatama* vektora $\mathbf{a}$ u sistemu $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$; to se bilježi ovako

$$\mathbf{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}; \qquad (2)$$



Sl. 393

oznaka (2) je ekvivalentna oznaci (1). Pravokutne Descartesove koordinate vektora su projekcije tog vektora na koordinatne osi Ox, Oy i Oz (sl. 393).

Pri paralelnom pomaku vektora njegove se koordinate ne mijenjaju.

Koordinate linearne kombinacije nekoliko vektora jednake su isto takvim linearnim kombinacijama koordinata tih vektora; iz vektorske jednadžbe (*) izlaze tri skalarne jednadžbe

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \ldots + \delta d_x, \\ k_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \ldots + \delta d_y, \\ k_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \ldots + \delta d_z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Napose, za koordinate zbroja ili razlike vektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ dobivamo

$$c_x = a_x \pm b_x, \quad c_y = a_y \pm b_y, \quad c_z = a_z \pm b_z. \tag{4}$$

Descartesove pravokutne koordinate radijvektora $\mathbf{r}$ točke $M(x, y, z)$ jednake su koordinatama te točke

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z; \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Afine koordinate. Kao poopćenje pravokutnih Descartesovih koordinata vektora dobivamo njegove afine koordinate u sistemu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; a^1, a^2, a^3 su koeficijenti rastava vektora $\mathbf{a}$ u smjeru triju zadanih nekomplanarnih vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \tag{1'}$$

ili u ekvivalentnom pisanju

$$\mathbf{a}\,\{a^1, a^2, a^3\}^*. \tag{2'}$$

Formule (1') i (2') prelaze u (1) i (2) za $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ i $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Analogno, za koordinate linearne kombinacije vektora (*) i za zbroj ili razliku vektora (4) vrijede formule

$$\left.\begin{aligned} k^1 &= \alpha a^1 + \beta b^1 + \ldots + \delta d^1, \\ k^2 &= \alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots + \delta d^2, \\ k^3 &= \alpha a^3 + \beta b^3 + \ldots + \delta d^3; \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

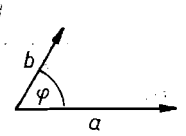
$$c^1 = a^1 \pm b^1, \quad c^2 = a^2 \pm b^2, \quad c^3 = a^3 \pm b^3. \tag{4'}$$

2. MNOŽENJE VEKTORA

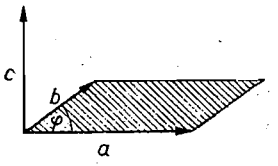
Skalarni produkt vektora. *Skalarnim produktom* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (označujemo ga sa $\mathbf{ab}$) naziva se skalar određen jednadžbom $\mathbf{ab} = ab\cos\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, pomaknutih tako da imaju zajedničku početnu točku (sl. 394).

* Gornje indekse ne smijemo pomiješati s eksponentima potencija. Takvo označivanje koeficijenta podesno je zato što su skalari a^1, a^2, a^3 kontravarijantne koordinate vektora $\mathbf{a}$ (vidi str. 636).

Vektorski produkt vektora. *Vektorskim produktom* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (označuje se sa $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ili $[\mathbf{ab}]$) nazivamo vektor $\mathbf{c}$ kojemu je duljina jednaka $ab\sin\varphi$ (tj. jednaka je površini paralelograma konstruiranog na vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kao stranicama) i koji ima smjer okomit na $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, i to tako da tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ tvore desnu trojku (tj. ako sva tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ imaju isti početak, tada najkraća vrtnja od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$, uz pretpostavku da promatrač gleda sa šiljka vektora $\mathbf{c}$, ima obrnuti smisao vrtnje kazaljke na satu, vidi sl. 395).



Sl. 394



Sl. 395

Svojstva vektorskih produkata

$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (zakon komutacije), ali $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (pri zamjeni faktora vektorski produkt mijenja svoj smjer u suprotni);

$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b}$ i $\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (zakon asocijacije s obzirom na skalarni faktor α);

$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}$ i $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (u ovim slučajevima ne vrijedi zakon asocijacije);

$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ i $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (zakon distribucije)

$\mathbf{ab} = 0$, ako je $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (uvjet okomitosti vektora);

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, ako je $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (uvjet kolinearnosti vektora).

$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = a^2$, ali je $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Linearne kombinacije vektora možemo množiti kao skalarne polinome, s tom razlikom da za vektorski produkt izmjena faktora (na primjer pri stezanju istovrsnih članova) mijenja predznak.

Primjeri: 1) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c})(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}^2 + 5\mathbf{ba} - 2\mathbf{ca} - 6\mathbf{ab} - 10\mathbf{b}^2 + 4\mathbf{cb} - 12\mathbf{ac} - 20\mathbf{bc} + 8\mathbf{c}^2 = 3\mathbf{a}^2 - 10\mathbf{b}^2 + 8\mathbf{c}^2 - \mathbf{ab} - 14\mathbf{ac} - 16\mathbf{bc}.$

2) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 5\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 2\mathbf{c} \times \mathbf{a} - 6\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 10\mathbf{b} \times \mathbf{b} + 4\mathbf{c} \times \mathbf{b} - 12\mathbf{a} \times \mathbf{c} -$

$$-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+8\mathbf{c}\times\mathbf{c}=0-5\mathbf{a}\times\mathbf{b}+2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}+0-$$
$$-4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+0=-11\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{a}\times\mathbf{c}-$$
$$-24\mathbf{b}\times\mathbf{c}=11\,\mathbf{b}\times\mathbf{a}+10\,\mathbf{c}\times\mathbf{a}+24\,\mathbf{c}\times\mathbf{b}.$$

Višestruki vektorski produkti. *Dvostruki vektorski produkt* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ je vektor komplanaran sa **b** i **c**, koji možemo izračunati po formuli

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Mješoviti produkt $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}$ je broj koji je jednak volumenu paralelepipeda, konstruiranog na vektorima **a**, **b** i **c**, uzetom s predznakom »+«, ako **a**, **b** i **c** čine desnu trojku i predznakom »—« ako čine lijevu trojku (vidi naprijed). Zagrade i znak množenja kod mješovitog produkta obično izostavljamo: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}=\mathbf{abc}$.

$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{acb}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}$ (zamjena dvaju faktora mijenja predznak mješovitog produkta: ciklička zamjena svih triju faktora ne mijenja predznak).

Formule za »složene produkte«

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{bc})(\mathbf{ad})$ (Lagrangeov identitet)

$$\mathbf{abc}\cdot\mathbf{efg}=\begin{vmatrix}\mathbf{ae}&\mathbf{af}&\mathbf{ag}\\ \mathbf{be}&\mathbf{bf}&\mathbf{bg}\\ \mathbf{ce}&\mathbf{cf}&\mathbf{cg}\end{vmatrix}$$

Izražavanje produkata u pravokutnim Descartesovim koordinatama. Ako su vektori **a**, **b** i **c** zadani u pravokutnim Descartesovim koordinatama

$$\mathbf{a}\{a_x,a_y,a_z\},\qquad \mathbf{b}\{b_x,b_y,b_z\},\qquad \mathbf{c}\{c_x,c_y,c_z\},$$

tada produkte vektora izračunavamo po ovim formulama

Skalarni produkt $\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$ (1)

Vektorski produkt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}. \quad (2)$$

Mješoviti produkt $\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$ (3)

Izražavanje produkata u afinim koordinatama. *Metrički koeficijenti i recipročni vektori.* Ako su poznate afine koordinate dvaju vektora **a** i **b** u sistemu $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3,$$

tada je za izračunavanje skalarnog produkta

$$\mathbf{ab}=a^1b^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+a^2b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+a^3b^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3+(a^1b^2+a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+$$
$$+(a^2b^3+a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+(a^3b^1+a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \quad (A)$$

ili vektorskog produkta

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a^2b^3-a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3+(a^3b^1-a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+$$
$$+(a^1b^2-a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 \quad (B)$$

(jer je $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3=0$)

nužno znati iznose produkata parova koordinatnih vektora, tj. za skalarni produkt šest brojeva (*metrički koeficijenti*)

$$g_{11}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1,\quad g_{22}=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\quad g_{33}=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$
$$g_{12}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,\quad g_{23}=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2,\quad g_{31}=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3;$$

a za vektorski produkt tri vektora (*recipročni vektori* s obzirom na $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$)

$$\mathbf{e}^1=\Omega(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),\qquad \mathbf{e}^2=\Omega(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1),\qquad \mathbf{e}^3=\Omega(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

gdje koeficijent Ω, koji je jednak recipročnoj vrijednosti miješanog produkta koordinatnih vektora

$$\Omega=\frac{1}{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3},$$

uvodimo radi pojednostavnjenja daljnjih formula.

»Tablice produkata« koordinatnih vektora

Skalarni produkt

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	g_{11}	g_{12}	g_{13}
$\mathbf{e}_2$	g_{21}	g_{22}	g_{23}
$\mathbf{e}_3$	g_{31}	g_{32}	g_{33}

$(g_{ki}=g_{ik})$

Vektorski produkt

multiplikatori

multiplikandi	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}^3/\Omega$	$-\mathbf{e}^2/\Omega$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}^3/\Omega$	0	$\mathbf{e}^1/\Omega$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}^2/\Omega$	$-\mathbf{e}^1/\Omega$	0

U pravokutnim Descartesovim koordinatama ($\mathbf{e}_1=\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}$) metrički koeficijenti su ovi:

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$$
$$g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$$
$$\Omega=\frac{1}{\mathbf{ijk}}=1;$$

Recipročni vektori $\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$ podudaraju se s koordinatnim vektorima, a tablice produkata imaju oblik

Skalarni produkt

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Vektorski produkt

multiplikandi \ multiplikatori	i	j	k
i	0	k	—j
j	—k	0	i
k	j	—i	0

Skalarni produkt u koordinatama. U skladu s formulom (A) vrijedi

$$\mathbf{ab} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g_{mn}\, a^m a^n = g_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta *. \qquad (1'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (1'') prelazi u (1) na str. 632.

Vektorski produkt u koordinatama. U skladu s formulom (B) vrijedi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} [(a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{e}^3]. \qquad (2'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (2'') prelazi u (2) na str. 632.

Mješoviti produkt u koordinatama je

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \qquad (3'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (3'') prelazi u (3) na str. 632.

* Posljednji dio jednadžbe (1'') skraćeno je pisanje zbroja uzeto iz tenzorskog računa: umjesto cijelog zbroja napisan je jedan njegov tipični član, pri čemu se podrazumijeva da indeks koji se u tom članu dva puta susreće (jedanput gore, a drugi put dolje) i koji je označen grčkim slovom (»*indeks zbrajanja*«), prolazi sve vrijednosti od 1 do 3. Na taj je način

$$g_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3.$$

Vektorske jednadžbe

x je nepoznat vektor, **a**, **b**, **c**, **d** su poznati vektori, x, y, z su nepoznati skalari, α, β, γ su poznati skalari

Jednadžba	Rješenje
1) $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$	$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$
2) $\mathbf{x}\alpha = \mathbf{a}$	$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\alpha}$
3) $\mathbf{xa} = \alpha$	Jednadžba je neodređena. Ako sve vektore **x** koji zadovoljavaju tu jednadžbu prenesemo tako da imaju zajedničku početnu točku, tada će njihovi šiljci ležati u ravnini koja je okomita na vektor **a**. Jednadžbu 3) nazivamo *vektorskom jednadžbom te ravnine*
4) $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \perp \mathbf{a})$	Jednadžba je neodređena. Ako sve vektore **x** koji zadovoljavaju tu jednadžbu prenesemo tako da imaju zajedničku početnu točku, tada će njihovi šiljci ležati na pravcu koji je paralelan s vektorom **a**. Jednadžbu 4) nazivamo *vektorskom jednadžbom* tog *pravca*
5) $\begin{cases} \mathbf{xa} = \alpha \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (\mathbf{b} \perp \mathbf{a})$	$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}\alpha + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2}$
6) $\begin{cases} \mathbf{xa} = \alpha \\ \mathbf{xb} = \beta \\ \mathbf{xc} = \gamma \end{cases}$	$\mathbf{x} = \frac{\alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \beta(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{abc}} = \alpha\tilde{\mathbf{a}} + \beta\tilde{\mathbf{b}} + \gamma\tilde{\mathbf{c}}$, gdje su $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ vektori recipročni s obzirom na **a**, **b** i **c** (vidi str. 632)
7) $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$	$x = \frac{\mathbf{dbc}}{\mathbf{abc}}, \; y = \frac{\mathbf{adc}}{\mathbf{abc}}, \; z = \frac{\mathbf{abd}}{\mathbf{abc}}$
8) $\mathbf{d} = x(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + y(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + z(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	$x = \frac{\mathbf{da}}{\mathbf{abc}}, \; y = \frac{\mathbf{db}}{\mathbf{abc}}, \; z = \frac{\mathbf{dc}}{\mathbf{abc}}$

3. KOVARIJANTNE I KONTRAVARIJANTNE KOORDINATE VEKTORA

Definicije. Afine koordinate a^1, a^2, a^3 vektora $\mathbf{a}$ u sistemu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ definiramo formulom

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = a^\alpha\mathbf{e}_\alpha{}^*.$$

Nazivamo ih također *kontravarijantnim koordinatama* tog vektora, za razliku od njegovih *kovarijantnih koordinata* koje su koeficijenti rastava vektora po trima vektorima $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, recipročnim s obzirom na $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (vidi str. 632). Kovarijantne koordinate vektora $\mathbf{a}$ označujemo sa a_1, a_2 i a_3

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = a_\alpha\mathbf{e}^\alpha.$$

U sistemu pravokutnih Descartesovih koordinata kovarijantne koordinate vektora podudaraju se s kontravarijantnim.

Izražavanje koordinata pomoću skalarnih produkata. Kovarijantna koordinata vektora $\mathbf{a}$ jednaka je skalarnom produktu tog vektora s pripadnim koordinatnim vektorom

$$a_1 = \mathbf{ae}_1, \quad a_2 = \mathbf{ae}_2, \quad a_3 = \mathbf{ae}_3. \tag{a}$$

Kontravarijantna koordinata vektora $\mathbf{a}$ jednaka je skalarnom produktu tog vektora s pripadnim recipročnim vektorom

$$a^1 = \mathbf{ae}^1, \quad a^2 = \mathbf{ae}^2, \quad a^3 = \mathbf{ae}^3. \tag{b}$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formule (a) i (b) se podudaraju $a_x = \mathbf{ai}$, $a_y = \mathbf{aj}$, $a_z = \mathbf{ak}$.

Izražavanje skalarnog produkta pomoću koordinata. Formula (1″) na str. 634 izražava skalarni produkt dvaju vektora pomoću njihovih kontravarijantnih koordinata. U kovarijantnim koordinatama njoj odgovara formula $\mathbf{ab} = g^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta$,

gdje su $g^{mn} = \mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ metrički koeficijenti u sistemu recipročnih vektora; oni su povezani s koeficijentima g_{mn} ovim relacijama:

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n}A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

gdje je A^{mn} minor determinante u nazivniku koji dobivamo nakon izostavljanja retka i stupca u kojem se nalazi element g_{mn}.

Ako je vektor $\mathbf{a}$ zadan pomoću kontravarijantnih koordinata, a $\mathbf{b}$ pomoću kovarijantnih, tada je njihov skalarni produkt jednak

$$\mathbf{ab} = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3 = a^\alpha b_\alpha$$

i analogno

$$\mathbf{ab} = a_\alpha b^\alpha$$

* Vidi napomenu na str. 634.

4. GEOMETRIJSKE PRIMJENE VEKTORSKE ALGEBRE

Naziv	Vektorska formula	Koordinatna formula (u pravokutnim Descartesovim koordinatama)
Duljina vektora $\mathbf{a}$	$a = \sqrt{\mathbf{a}^2}$	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Površina paralelograma konstruiranog na $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$	$S = \lvert \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rvert$	$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$
Volumen paralelepipeda konstruiranog na $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$	$V = \lvert \mathbf{abc} \rvert$	$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Kut između $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}}$	$\cos\varphi = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Primjenu u analitičkoj geometriji (vektorske jednadžbe ravnine i pravca) vidi na str. 276 do 283 i na str. 635.

5. VEKTORSKA FUNKCIJA SKALARNE VARIJABLE

Definicija. Varijabilni vektor **a** nazivamo *vektorskom funkcijom* skalarne varijable t ako svakoj vrijednosti t odgovara određena vrijednost vektora **a**.

Oznaka: $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$

Koordinatno zadavanje vektorske funkcije

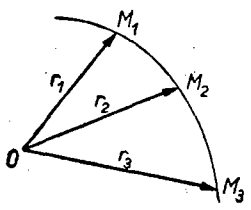
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

sastoji se u zadavanju triju skalarnih funkcija jedne nezavisne varijable

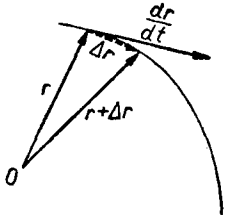
$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Ako predočimo varijabilni vektor u obliku radijvektora $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ točke M, tada pri promjenljivom t točka M opisuje prostornu krivulju (sl. 396), tzv. *hodograf* vektorske funkcije; u koordinatama se on zadaje sa tri jednadžbe

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



Sl. 396



Sl. 397

Derivacija vektorske funkcije $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

predstavlja novu vektorsku funkciju od t. Geometrijski smisao derivacije radijvektora: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ je vektor koji tangira hodograf u dotičnoj točki (sl. 397); duljina $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ovisi o izboru parametra t. Ako je t vrijeme, tada funkcija $\mathbf{r}(t)$ određuje gibanje točke M u prostoru, a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ po veličini i po smjeru brzinu toga gibanja. Ako je t duljina luka hodografa (od neke njegove točke do M), tada je $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$.

Pravila diferenciranja vektora

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ je skalarna funkcija od } t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$ (faktore ne smijemo izmijeniti, vidi str. 630)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ako je **r** jedinični vektor, tada je $\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ (tangenta je okomita na radijvektoru, hodograf je *sferna krivulja*).

Taylorov red za vektorske funkcije

$$\mathbf{a}(t + h) = \mathbf{a}(t) + h\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} + \ldots$$

Konvergencija ovog reda (i bilo kojeg s vektorskim članovima) određuje se isto tako kao i konvergencija reda s kompleksnim članovima (vidi str. 605). O razvoju vektorske funkcije u Taylorov red ima smisla govoriti samo tada, kada taj red konvergira.

Diferencijal funkcije $\mathbf{a}(t)$ je definiran jednadžbom

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \Delta t.$$

B. TEORIJA POLJA

6. SKALARNO POLJE

Funkcije točke. Skalarna veličina U, koja poprima određene vrijednosti u svakoj točki M prostora, naziva se skalarnom *funkcijom točke* ili *skalarnim poljem* $U = U(M)$ (na primjer polje temperature, potencijala, gustoće u nehomogenoj sredini itd.). Polje može biti određeno pomoću skalarne funkcije vektorskog argumenta **r** (radijvektora tačke M uz izabrani pol O, vidi str. 604)

$$U = U(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

Polje koje je definirano samo za točke neke ravnine nazivamo *ravninskim**

Centralno i aksijalno polje. Ako funkcija poprima jednake vrijednosti za sve točke koje se nalaze na istim udaljenostima od nekog centra $C(r_1)$, tada se polje naziva *centralnim* ili *sfernim*. U zavisi samo od udaljenosti $CM = r$, na primjer: $U = r$ (udaljenost točke od pola), $U = \frac{c}{r^2}$ (polje koje izražava osvijetljenost u svakoj točki pri centralnom izvoru svjetla), općenito

$$U = f(r). \tag{2}$$

Ako funkcija prima jednake vrijednosti za sve točke koje se nalaze na jednakim udaljenostima od nekog pravca (*osi polja*), tada polje nazivamo *aksijalnim* ili *cilindarskim*.

Polje zadano u koordinatama. Ako odredimo točku M njezinim koordinatama (Descartesovim x, y, z, cilindarskim ρ, φ, z ili sfernim r, Θ, φ**) dobivamo skalarno polje (1) u obliku funkcije triju varijabli

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) \text{ ili } U = X(r, \Theta, \varphi), \tag{1a}$$

a za ravninsko polje u vidu funkcije sa dvije varijable (u Descartesovim ili polarnim koordinatama)

$$U = \Phi(x, y) \quad \text{ili} \quad U = \Psi(\rho, \varphi) \tag{1b}$$

(funkcije U u (1a) i (1b) uzimamo da su jednoznačne i neprekinute posvuda, osim za pojedine *točke, krivulje i ravnine prekinutosti*). Izražavanje centralnog polja u koordinatama

$$U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right) = U(r), \tag{2a}$$

aksijalnog $U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = U(\rho) = U(r \sin \Theta)$; (3)

za izučavanje centralnih polja najzgodnije su sferne, a za aksijalna cilindarske koordinate.

Nivo-plohe i nivo-linije. Točke za koje funkcija (1) prima jednu te istu vrijednost

$$U = \text{const}, \tag{4}$$

tvore u prostoru *nivo-plohu*, kojoj jednadžba u koordinatama glasi

$$U = \Phi(x, y, z) = \text{const}, \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{const},$$
$$U = X(r, \Theta, \varphi) = \text{const} \tag{4a}$$

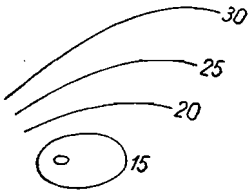
* Ponekad ravninskim poljem nazivamo polje definirano za točke prostora koje ima svojstvo da za sve tačke bilo kojeg pravca, paralelnog nekom smjeru prostora, funkcija U ima istu vrijednost. Takvo je polje ispravnije nazivati *plan-paralelnim*; njegovo se proučavanje svodi na proučavanje polja u ravnini okomitoj na taj smjer.

** Vidi str. 298.

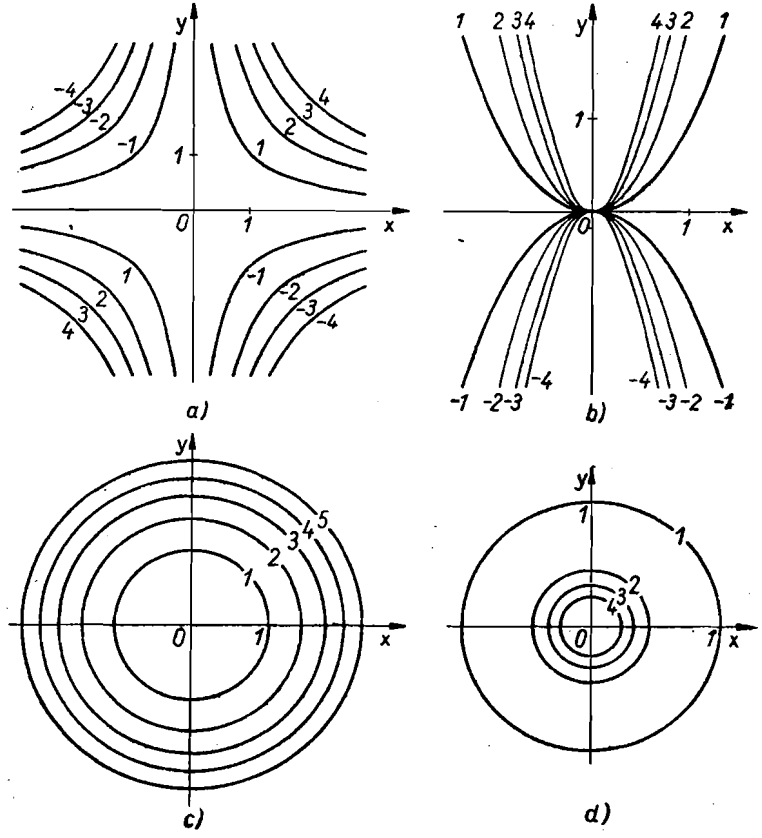
Za različite const $= U_0, U_1, U_2, \ldots$ dobivaju se različite plohe; kroz svaku točku polja prolazi jedna takva ploha (osim za točke u kojima funkcija U nije jednoznačno definirana).

Primjeri: 1) Za polje $U = \mathbf{cr} = c_x x + c_y y + c_z z$ nivo-plohe su paralelne ravnine. 2) Za polje $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ nivo-plohe su slični i slično smješteni elipsoidi.

Nivo-plohe centralnog polja su koncentrične kugle, ravnine nivo-plohe aksijalnog polja su koaksijalni valjci.



Sl. 398



Sl. 399

Za ravninsko polje jednadžba $U = \text{const}$ predstavlja *nivo-liniju*

$$U(x, y) = \text{const}, \quad U(\rho, \varphi) = \text{const}. \tag{4b}$$

Na slikama se nivo-linije redovno crtaju za određene jednake intervale vrijednosti U, i uz svaku od njih se napiše pripadna numerička vrijednost U (sl. 398). Na primjer: izobare na sinoptičkim kartama ili horizontale (krivulje istih visina) na topografskim kartama. U posebnim slučajevima nivo-linije mogu degenerirati u izolirane točke, a nivo-plohe u točke i krivulje.

Primjeri (sl. 399): a) $U = xy$, b) $U = \frac{y}{x^2}$, c) $U = r^2$, d) $U = \frac{1}{r}$.

7. VEKTORSKO POLJE

Vektorska funkcija točke. Vektorsku veličinu V koja prima određenu vrijednost u svakoj točki M prostora nazivamo *vektorskom funkcijom točke* ili *vektorskim poljem* $\mathbf{V} = \mathbf{V}(M)$ (na primjer polje brzina čestica tekućine koja struji, polje sila, električko ili magnetsko polje, itd.) Polje može biti određeno pomoću vektorske funkcije vektorskog argumenta $\mathbf{r}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}).$$

Vektorsko polje je *ravninsko*, ako sve vrijednosti $\mathbf{r}$ i $\mathbf{V}$ leže u istoj ravnini.*

Tipovi vektorskih polja s kojima se često susrećemo

a) *Centralno vektorsko polje* (sl. 400, *a*) za koja svi vektori $\mathbf{V}$ leže na pravcima kroz određenu točku (*centar*). Ako premjestimo pol u centar, tada takvo polje određujemo formulom $\mathbf{V} = f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$; svi vektori $\mathbf{V}$ imaju smjer radijvektora $\mathbf{r}$. Ovo se polje može podesnije izraziti formulom

$$\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$\varphi(\mathbf{r})$ je duljina vektora $\mathbf{V}$, a $\frac{\mathbf{r}}{r}$ je njegov jedinični vektor.

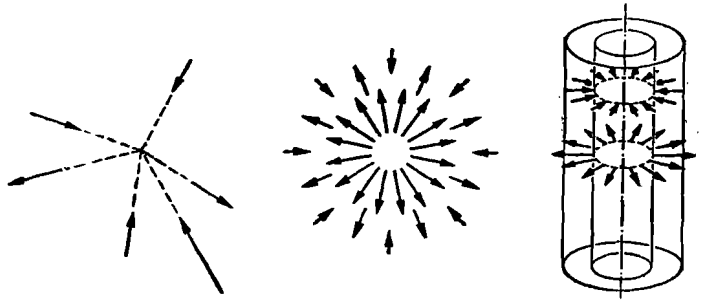
b) *Sferno vektorsko polje* (sl. 400, *b*): $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ je važan poseban slučaj centralnog polja u kome duljina vektora $\mathbf{V}$ ovisi samo o udaljenosti $|\mathbf{r}|$, npr. Newtonovo gravitaciono polje (također Coulombovo polje)

* Vidi napomenu* na str. 640. Analogno vrijedi i za vektorsko polje.

$$\mathbf{V} = \frac{c}{r^3}\mathbf{r} = \frac{c}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

(za ravninsko polje nazivamo taj slučaj kružnim poljem).

c) *Cilindarsko vektorsko polje* (sl. 400, *c*) u kojemu svi vektori $\mathbf{V}$ 1) leže na pravcima koji okomito sijeku određeni pravac (os), 2) za točke koje se nalaze na istim udaljenostima od osi, vektori



Sl. 400

su jednaki po apsolutnoj vrijednosti i usmjereni su ili od osi ili k osi. Ako premjestimo pol na os polja, određenu jediničnim vektorom $\mathbf{c}$, tada je takvo polje određeno formulom $\mathbf{V} = \varphi(\rho)\frac{\mathbf{r}}{\rho}$, gdje je $\mathbf{r}$ vektor, koji je projekcija vektora $\mathbf{r}$ na ravninu okomitu na os: $\mathbf{r} = \mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c})$. Ako presiječemo to polje ravninama okomitim na os, dobivamo jednaka kružna polja.

Polje zadano u koordinatama. Vektorsko polje (1) možemo definirati pomoću tri skalarna polja $V^1(\mathbf{r})$, $V^2(\mathbf{r})$ i $V^3(\mathbf{r})$, koja su koeficijenti rastava vektora $\mathbf{V}$ po trima bilo kojim nekomplanarnim vektorima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3. \tag{2}$$

Ako za te vektore uzmemo koordinatne jedinične vektore $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, a koeficijente V^1, V^2, V^3 izrazimo Descartesovim koordinatama x, y, z, tada je

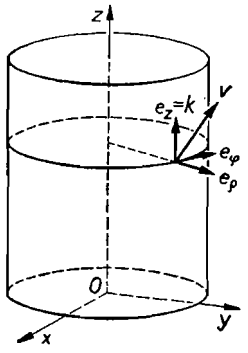
$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

tj. vektorsko je polje definirano pomoću triju skalarnih funkcija i triju varijabli (zadavanje polja u *Descartesovim koordinatama*). *U cilindarskim i sfernim koordinatama* jedinični vektori $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ $(= \mathbf{k})$ (sl. 401) i $\mathbf{e}_r \left(= \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\Theta$ (sl. 402) diraju koordinatne linije u svakoj točki, a koeficijenti su izraženi pripadnim koordinatama:

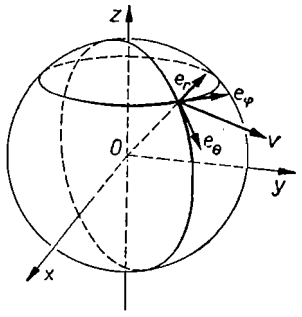
$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_z, \qquad (2b)$$

$$\mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_\varphi + V_\Theta(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_\Theta. \qquad (2c)$$

U ovim slučajevima jedinični vektori mijenjaju svoj smjer pri prelazu od zadane točke u drugu, ostajući međusobno okomiti.



Sl. 401



Sl. 402

Formule za prijelaz s jednog sistema na drugi

a) *Izražavanje Descartesovih koordinata pomoću cilindarskih*

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi, \quad V_y = V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

b) *Izražavanje cilindarskih koordinata pomoću Descartesovih*

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi, \quad V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

c) *Izražavanje Descartesovih koordinata pomoću sfernih:*

$$V_x = V_r \sin\Theta \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi + V_\Theta \cos\varphi \cos\Theta,$$
$$V_y = V_r \sin\Theta \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi + V_\Theta \sin\varphi \cos\Theta,$$
$$V_z = V_r \cos\Theta - V_\Theta \sin\theta.$$

d) *Izražavanje sfernih koordinata pomoću Descartesovih*

$$V_r = V_x \sin\Theta \cos\varphi + V_y \sin\Theta \sin\varphi + V_z \cos\Theta,$$
$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi,$$
$$V_\Theta = V_x \cos\Theta \cos\varphi + V_y \cos\Theta \sin\varphi - V_z \sin\Theta.$$

Izražavanje sfernog vektorskog polja Descartesovim koordinatama

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k});$$

izražavanje cilindarskog polja Descartesovim koordinatama

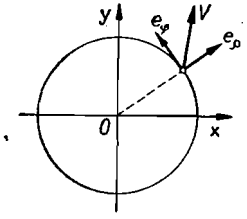
$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}).$$

Najpraktičnije su za proučavanje sfernih polja sferne koordinate [$\mathbf{V} = V(r)\,\mathbf{e}_r$], a za proučavanje cilindarskih polja cilindarske. [$\mathbf{V} = V(\rho)\,\mathbf{e}_\rho$]. Ako je polje ravninsko, tada je

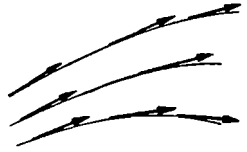
$$\mathbf{V} = V_x(x, y)\,\mathbf{i} + V_y(x, y)\,\mathbf{j} = V_\rho(x, y)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(x, y)\,\mathbf{e}_\varphi$$

(sl. 403), a za kružno polje

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) = \psi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$



Sl. 403



Sl. 404

Strujnice. Krivulja Γ, kod koje u svakoj njenoj točki $M(\mathbf{r})$ vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ tangira Γ, naziva se strujnica vektorskog polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (sl. 404). Kroz svaku točku polja prolazi jedna strujnica; strujnice se međusobno ne presijecaju (izuzetak su točke u kojima funkcija V nije definirana ili je $\mathbf{V} = 0$). Ako se radi o polju sila, govorimo o *silnicama.*

Primjeri: Strujnice centralnog polja su pravci koji centar spajaju s točkom polja; strujnice polja $\mathbf{V} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ su kružnice koje leže u ravninama okomitim na vektor $\mathbf{c}$ i koje imaju centre na osi paralelnoj sa $\mathbf{c}$.

Diferencijalne jednadžbe strujnica polja izraženog u Descartesovim koordinatama glase

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}; \text{ za ravninsko polje } \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}^{*}.$$

* Rješavanje ovih diferencijalnih jednadžbi vidi na str. 533 i 545.

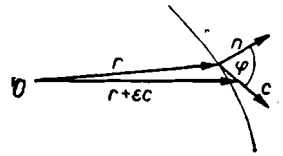
8. GRADIJENT

Derivacijom skalarnog polja $U = U(\mathbf{r})$ u zadanoj točki $\mathbf{r}$ po vektoru $\mathbf{c}$ nazivamo limes kvocijenta

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{(sl. 405)}.$$

Derivacijom polja $U = U(\mathbf{r})$ u zadanoj točki $\mathbf{r}$ u smjeru jedničnog vektora $\mathbf{c}^0$ nazivamo derivaciju $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$. Derivacije po vektoru $\mathbf{c}$ i njegovom jediničnom vektoru $\mathbf{c}^0$ u zadanoj točki međusobno su povezane odnosom

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}.$$



Sl. 405

$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ pokazuje brzinu prirasta funkcije U u smjeru $\mathbf{c}^0$ u svakoj točki; od svih derivacija u zadanoj točki po različitim jediničnim vektorima najveća je derivacija $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ u smjeru normale $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ je jedinični vektor normale) na nivo-plohu u toj točki (u smjeru porasta funkcije U); derivaciju po jediničnom vektoru u bilo kom drugom smjeru izražavamo formulom

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{c}^0, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos \varphi.$$

Gradijent polja $U(r)$ (označava se: grad U ili ∇U*) je vektor definiran u svakoj točki polja, koji ima smjer normale na nivo-plohu (u smjeru porasta funkcije U) i duljinu koja je jednaka $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$.

Derivacija $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ jednaka je projekciji grad U na smjer $\mathbf{c}^0$;

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \mathbf{c}^0 \operatorname{grad} U.$$

Koordinate gradijenta

U Descartesovom sistemu

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k},$$

* O simbolu ∇ (nabla) vidi na str. 656.

u sistemu cilindarskih koordinata

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

u sistemu sfernih koordinata

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \Theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \Theta}\mathbf{e}_\Theta.$$

U onim točkama polja gdje su nivo-linije, povučene u skladu s uvjetom na str. 642, gušće, apsolutna veličina gradijenta je veća; u točkama maksimuma i minimuma polja [u njima nivo-plohe degeneriraju u točku] grad $U = 0$.

Diferencijal skalarnog polja je totalni diferencijal funkcije U (vidi str. 374)

$$\mathbf{d}U = \operatorname{grad} U \, \mathbf{dr} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{d}z.$$

Pravila za izračunavanje gradijenta*:

$$\operatorname{grad} c = 0, \quad \operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2,$$

$$\operatorname{grad}(cU) = c \operatorname{grad} U, \quad \operatorname{grad}(U_1 U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1,$$

$$\operatorname{grad} \varphi(U) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}U} \operatorname{grad} U, \quad \operatorname{grad}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad}) \mathbf{V}_2 +$$

$$+ (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad}) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_1**.$$

Posebno je grad $(\mathbf{rc}) = \mathbf{c}$.

Gradijent centralnog polja: grad $U(r) = U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (sferno polje);

posebno je grad $r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (polje jediničnih vektora).

Gradijent kao derivacija po volumenu. Derivacija skalarnog polja po volumenu (vidi str. 653 je vektor koji je gradijent tog polja; ovo svojstvo možemo uzeti za određivanje gradijenta:

$$\operatorname{grad} U = \lim_{v \to 0} \frac{\oint_\Sigma U \mathbf{dS}}{v}.$$

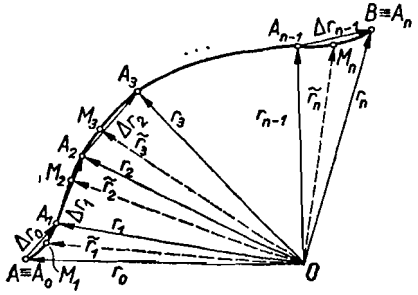
* Ovdje i dalje su c i $\mathbf{c}$ konstante.
** O izrazima (V grad) W i rot V vidi na str. 657 i 654.

9. KRIVULJNI INTEGRAL I POTENCIJAL U VEKTORSKOM POLJU*

Definicija. Krivuljnim integralom vektorske funkcije $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ po putu $\overset{\frown}{AB}$ [oznaka $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$] nazivamo skalar P koji dobivamo na ovaj način:

1) Put $\overset{\frown}{AB}$ (sl. 406) razdijelimo točkama $A_1(\mathbf{r}_1)$, $A_2(\mathbf{r}_2)$, ..., ..., $(A_{n-1})(\mathbf{r}_{n-1})$ $(A \equiv A_0,\ B \equiv A_n)$ na n malih odsječaka, koje približno izražavamo vektorima $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

2) Unutar (ili na granici) svakog elementarnog luka $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ izabiremo po volji točku M_i, koja ima radijvektor $\tilde{\mathbf{r}}_i$.



Sl. 406

3) Vrijednosti funkcije $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)$ u tim izabranim točkama skalarno pomnožimo sa $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

4) Svih n dobivenih produkata zbrojimo.

5) Izračunamo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}$, kada dužina svakog elementarnog vektora $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$ teži k nuli (i stoga $n \to \infty$).

Ako taj limes postoji i ne ovisi o izboru točaka A_i i M_i, tada se on naziva krivuljnim integralom

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \lim_{\substack{\Delta\mathbf{r}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}.$$

Ako je funkcija $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ neprekinuta**, a luk $\overset{\frown}{AB}$ neprekinut i ima neprekinutu tangentu, tada krivuljni integral $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ egzistira.

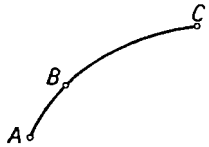
* To je poglavlje vektorsko izlaganje krivuljnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 507).

** Za neprekinutost vektorske funkcije $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ potrebna je neprekinutost svih triju skalarnih funkcija, koje su koeficijenti u rastavu $\mathbf{V}$ po vektorima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$.

Mehanički smisao integrala. Ako je polje $\mathbf{V}$ polje sila, tada je $P = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ jednak *radu* koji sila $\mathbf{V}$ proizvede pri pomicanju materijalne točke po putu $\overset{\frown}{AB}$.

Svojstva krivuljnog integrala

a) $\int_{\overset{\frown}{ABC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\overset{\frown}{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;



Sl. 407

b) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ (sl. 407);

c) $\int_{\overset{\frown}{AB}} [\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \mathbf{W}(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{W}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;

d) $\int_{\overset{\frown}{AB}} c\,\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = c\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$.

Izračunavanje krivuljnog integrala, zadanog u Descartesovim koordinatama, svodi se na izračunavanje krivuljnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 507 do 509)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz).$$

Cirkulacijom vektorskog polja nazivamo krivuljni integral tog polja po zatvorenoj konturi (označujemo ga sa $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$, gdje je C zatvorena krivulja).

Konzervativno (ili *potencijalno*) polje je vektorsko polje kod kojega je krivuljni integral $\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ neovisan od puta koji povezuje A i B, već ovisi samo o položaju točaka A i B. Cirkulacija u konzervativnom polju je uvijek jednaka nuli. Konzervativno polje je uvijek *bezvrtložno:*

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

(vidi str. 659); ova jednakost je nuždan i dovoljan uvjet za konzervativnost polja uz neprekinutost parcijalnih derivacija koordinata polja. U Descartesovim koordinatama:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y},\quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}\,* \tag{1a}$$

[za ravninsko polje vrijedi samo prva jednakost (1a)].

* Ovo je *uvjet integrabilnosti* (vidi str. 510).

Potencijal konzervativnog polja. Ako u konzervativnom polju fiksiramo početnu točku $A(\mathbf{r}_0)$ i mijenjamo konačnu točku $B(\mathbf{r})$, tada je integral $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ [označuje se sa $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$] skalarna funkcija od $\mathbf{r}$: $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r})$, a skalarno polje $\varphi(\mathbf{r})$ nazivamo *potencijalnom funkcijom* ili *potencijalom polja* $\mathbf{V}(\mathbf{r})$*. Potencijal polja je određen do po volji odaberive aditivne konstante, koja ovisi o donjoj granici $\mathbf{r}_0$. *Razlika potencijala je*

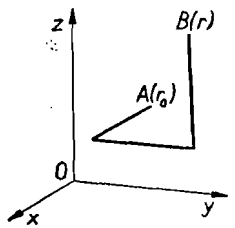
$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Veza gradijenta, krivuljnog integrala i potencijala. Ako je $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{r})$, tada je $U(\mathbf{r})$ potencijal polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$** i obrnuto.

Izračunavanje potencijala U konzervativnog polja $V = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$, zadanog u Descartesovim koordinatama ekvivalentno je zadatku izračunavanja funkcije U iz njenog totalnog diferencijala: $dU = V_x dx + V_y dy + V_z dz$ [V_x, V_y, V_z moraju zadovoljavati uvjet (1a)]; U određujemo iz sistema jednadžbi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z.$$

Praktički se potencijal izračunava integriranjem po poligonskom potezu (sl. 408) sastavljenog od odsječaka koji su paralelni koordinatnim osima (vidi izračunavanje primitivne funkcije na str. 510)



Sl. 408

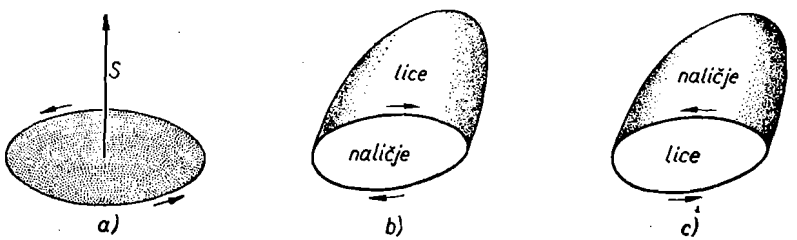
$$U = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\,dz.$$

* To je *primitivna funkcija* (vidi str. 510). U fizici *potencijalom* $\varphi(\mathbf{r})$ u točki $\mathbf{r}$ nazivamo ponekad veličinu suprotnog predznaka: »$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$«.

** Ili »minus potencijal polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$« (vidi prethodnu napomenu).

10. PLOŠNI INTEGRALI*

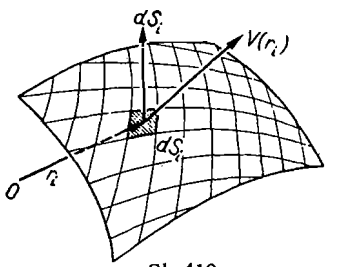
Vektorom ravne površine Σ koja je omeđena zatvorenom krivuljom C duž koje je određen pozitivni smisao, nazivamo vektor $\mathbf{S}$ (sl. 409, *a*) kojemu je modul jednak veličini S površine Σ, a smjer mu je izabran okomito na Σ tako, da se od njegovog šiljka gledano pozitivno obilaženje površine prikazuje u suprotnom smislu gibanja kazaljke na satu. Na taj je način izbor pozitivnog smisla na



Sl. 409

rubu površine povezan s izborom *lica* površine (tj. strane od koje ide vektor $\mathbf{S}$); ova se veza prenosi na po volji odabranu zakrivljenu površinu omeđenu nekim rubom (sl. 409, *b* i *c*).

Tri oblika integrala po površini Σ (omeđenoj nekim rubom ili zatvorenom plohom). *Plošnim integralima* u skalarnom ili vektorskom polju nazivamo veličine koje se dobivaju na ovaj način: 1) Ploha Σ na kojoj je izbrano lice (sl. 410) razdijeli se na po volji odabran način na n malih (»elementarnih«) površina dS_i, koje su sve približno ravne, a pripadni vektor površine označavamo sa $d\mathbf{S}_i$ (pri tome, u slučaju zatvorene plohe, pozitivni obilazak površina uzimamo tako da lice od kojeg polazi vektor $d\mathbf{S}_i$ bude vanjska strana). 2) Unutar (ili na granici) svake površine izabiremo po volji točku $\mathbf{r}_i$. 3) Izračunamo produkte: u slučaju skalarnog polja $U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$, a u slučaju vektorskog polja $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$ ili $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i) \times d\mathbf{S}_i$. 4) Produkti izračunani za svaku površinu zbrajaju se. 5) Prelazimo k limesu za $n \to \infty$ i $dS \to 0$**:



Sl. 410

* Ovo poglavlje je vektorsko tumačenje teorije plošnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 528).

** Površina teži k nuli u smislu napomene** na str. 512.

A. *Tok skalarnog polja*

$$\mathbf{P} = \lim_{\mathrm{d}S_i \to 0} \sum U(\mathbf{r}_i)\,\mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_{\Sigma} U(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

B. *Skalarni tok vektorskog polja*

$$Q = \lim_{\mathrm{d}S_i \to 0} \sum \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,\mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_{\Sigma} \mathbf{V}(r)\,\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

C. *Vektorski tok vektorskog polja*

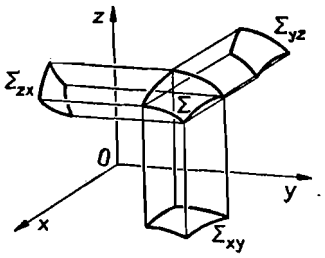
$$\mathbf{R} = \lim_{\mathrm{d}S_i \to 0} \sum \mathbf{V}(\mathbf{r}_i) \times \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_{\Sigma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{S}^*.$$

Izračunavanje integrala po plohi u Descartesovim koordinatama svodi se na izračunavanje plošnih integrala drugog tipa (vidi str. 525) i provodi se po ovim formulama:

$$\text{A.}\quad \int_{\Sigma} U\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} U\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathbf{i} + \iint_{\Sigma_{zx}} U\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathbf{j} + \iint_{\Sigma_{xy}} U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathbf{k}.$$

$$\text{B.}\quad \int_{\Sigma} \mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} V_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_{zx}} V_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_{xy}} V_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$\text{C.}\quad \int_{\Sigma} \mathbf{V} \times \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} (V_z\mathbf{j} - V_y\mathbf{k})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_{zx}} (V_x\mathbf{k} - V_z\mathbf{i})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_{xy}} (V_y\mathbf{i} - V_x\mathbf{j})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Sl. 411

Svaki se dvostruki integral proteže na površinu koja je projekcija Σ na koordinatne ravnine** (sl. 411), pri čemu u izrazima koji su pod znakom integrala treba jednu od varijabli (x, y ili z) izraziti sa dvije druge iz jednadžbe plohe Σ.

Primjeri: A) $\mathbf{P} = \int_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}\mathbf{S}$ po dijelu ravnine $x + y + z = 1$ zatvorenom između tri koordinatne ravnine (lice je gornja strana). Imamo

* Za svaki od tih integrala vrijedi teorem egzistencije, analogan onom na str. 527 (točnu formulaciju izostavljamo).

** Projekcija se uzima s predznakom »+« ili »—« (vidi str. 526).

$$\mathbf{P} = \iint_{yz} (1 - y - z)\,yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathbf{i} + \iint_{zx} (1 - x - z)\,xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathbf{j} + \iint_{xy} (1 - x - y)\,xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathbf{k};$$

$$\iint_{yz} (1 - y - z)\,yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - y - z)\,yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{120};$$

ostala dva integrala izračunamo analogno. Rezultat je

$$\mathbf{P} = \frac{1}{120}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

B) $Q = \int_{\Sigma} \mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{yz} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{zx} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{xy} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ po istoj plohi. $\iint_{xy} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$; ostala dva integrala izračunamo analogno; $Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

C) $\mathbf{R} = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathbf{i} + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathbf{j} + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathbf{k})$ po istoj plohi. Analogna izračunavanja daju $\mathbf{R} = 0$.

Integrale po zatvorenoj plohi označavamo

$$\oint_{\Sigma} U\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{V} \times \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

11. PROSTORNO DERIVIRANJE

Definicija. *Prostornim derivacijama* skalarnog ili vektorskog polja u točki $\mathbf{r}$ nazivamo veličine triju oblika koje dobivamo ovako: 1) točka $\mathbf{r}$ polja $U(\mathbf{r})$ ili $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ okruži se zatvorenom plohom Σ; 2) izračunamo integral po plohi Σ $\left(\oint_{\Sigma} U\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \oint_{\Sigma} \mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\right.$ ili $\left.\oint_{\Sigma} \mathbf{V} \times \mathrm{d}\mathbf{S}\right)$. 3) nađemo limes kvocijenta toga integrala s volumenom v prostora unutar plohe Σ, kada taj volumen v teži k nuli (u smislu navedenom u napomeni na str. 512).

Prostorna derivacija skalarnog polja je njegov gradijent (vidi str. 647), a prostorne derivacije vektorskog polja dovode do pojmova divergencije i rotacije.

12. DIVERGENCIJA VEKTORSKOG POLJA

Definicija. *Divergencijom* polja $\mathbf{V}$ (označuje se sa div $\mathbf{V}$ ili $\nabla\,\mathbf{V}$*) nazivamo skalar koji je definiran u svakoj točki polja i koji je prostorna derivacija tog polja:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\lim_{v\to 0}\frac{\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\,d\mathbf{S}}{v}.$$

Formule za izračunavanje divergencije

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\quad\text{(u Descartesovim koordinatama);}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\quad\text{(u cilindarskim koordinatama);}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)\right]+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\Theta\,V_\Theta)\right]$$

(u sfernim koordinatama);

Pravila za izračunavanje divergencije

$$\operatorname{div}\mathbf{c}=0,\quad \operatorname{div}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)=\operatorname{div}\mathbf{V}_1+\operatorname{div}\mathbf{V}_2,\quad \operatorname{div}(c\mathbf{V})=c\operatorname{div}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{V})=U\operatorname{div}\mathbf{V}+\mathbf{V}\operatorname{grad}U\quad\left[\text{posebno, }\operatorname{div}r\mathbf{c}=\frac{\mathbf{r}\,\mathbf{c}}{r}\right],$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)=\mathbf{V}_2\operatorname{rot}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

Divergencija centralnog polja:

$$\operatorname{div}\mathbf{r}=3,\qquad \operatorname{div}\varphi(r)\,\mathbf{r}=3\varphi(r)+r\varphi'(r).$$

13. ROTACIJA VEKTORSKOG POLJA

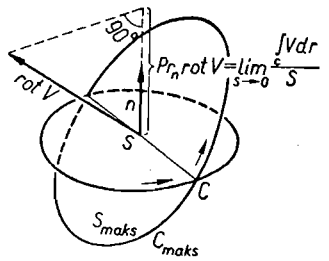
Definicije. *Rotacija* (također *rotor*) polja $\mathbf{V}$ (označava se rot $\mathbf{V}$, curl $\mathbf{V}$ ili $\nabla\times\mathbf{V}$*) je vektor definiran u svakoj točki polja kao prostorna derivacija tog polja uzeta sa suprotnim predznakom

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=-\lim_{v\to 0}\left(\frac{1}{v}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{V}\times d\mathbf{S}\right)\text{**}$$

* O simbolu ∇ (nabla) vidi na str. 656.

** Predznak »minus« možemo odstraniti ako uzmemo faktore pod integralom obrnutim redom: $\int d\mathbf{S}\times\mathbf{V}$ (vidi str. 631).

Druga definicija: *rotacijom* polja $\mathbf{V}$ nazivamo vektor koji dobivamo na ovaj način: 1) kroz zadanu točku $\mathbf{r}$ položimo malu površinu S (sl. 412); 2) izračunamo cirkulaciju $\oint\limits_C\mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ (vidi str. 649) duž ruba koji omeđuje tu plohu; 3) promatramo kvocijent te cirkulacije i površine S kada S teži k nuli stežući se u točku $\mathbf{r}$, pri čemu



Sl. 412

položaj površine ostaje nepromijenjen; 4) mijenjanjem smjera vektora te površine ustanovljujemo smjer u kome dobiveni limes dostiže maksimum; 5) u točki $\mathbf{r}$ određujemo vektor rot $\mathbf{r}$, kojemu je modul jednak dobivenom maksimumu, a smjer se podudara sa smjerom vektora površine $S_{\max}$

$$|\operatorname{rot}\mathbf{V}|=\lim_{S\to 0}\frac{\int\limits_{(C_{\max})}\mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S_{\max}};\quad \left.\begin{array}{l}\text{projekcija rot }\mathbf{V}\text{ na}\\ \text{normalu površine }S\end{array}\right\}=\lim_{S\to 0}\frac{\int\limits_{C}\mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S}.$$

Rotacija potencijalnog polja jednaka je nuli (izlazi iz teorema Stokesa, str. 659).

Koordinate rotacije

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

u Descartesovim koordinatama

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi+$$

$$+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z\ \text{u cilindarskim koordinatama}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\left[\frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\,V_\varphi)-\frac{\partial V_\Theta}{\partial\varphi}\right)\right]\mathbf{e}_r+$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\Theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\Theta}\right]\mathbf{e}_\varphi+$$

$$+\left[\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\Theta$$ u sfernim koordinatama.

Pravila za izračunavanje rotacije

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)=\operatorname{rot}\mathbf{V}_1+\operatorname{rot}\mathbf{V}_2,\qquad \operatorname{rot}(c\mathbf{V})=c\operatorname{rot}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{V})=U\operatorname{rot}\mathbf{V}+\operatorname{grad}U\times\mathbf{V},\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)=$$

$$=(\mathbf{V}_2\operatorname{grad})\mathbf{V}_1-(\mathbf{V}_1\operatorname{grad})\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1\operatorname{div}\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_2\operatorname{div}\mathbf{V}_1^*.$$

Vrtložnim krivuljama polja $\mathbf{V}$ nazivamo strujnice polja rot $\mathbf{V}$ (str. 647).

14. OPERATORI ∇ (HAMILTONOV), $(a\nabla)$ I Δ (LAPLACEOV)

Hamiltonov operator ∇ (nabla) je simbolički vektor koji zamjenjuje simbole gradijenta, divergencije i rotacije:

$$\nabla U=\operatorname{grad}U,\qquad \nabla\mathbf{V}=\operatorname{div}\mathbf{V},\qquad \nabla\times\mathbf{V}=\operatorname{rot}\mathbf{V};$$

njegova primjena pojednostavnjuje izračunavanja u vektorskoj analizi. Izraz Hamiltonova operatora u Descartesovim koordinatama je

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Ako formalno pomnožimo taj vektor sa skalarom U ili s vektorom $\mathbf{V}$ (skalarno ili vektorski) izražene u Descartesovim koordinatama, dobivamo formule za gradijent (str. 646), divergenciju (str. 654) i rotaciju (str. 654) u Descartesovim koordinatama.

Pravila za izračunavanje s operatorom ∇. a) Ako ∇ stoji ispred linearne kombinacije $\Sigma a_i X_i$, gdje su a_i konstante, a X_i funkcije točke (bez obzira bile one skalarne ili vektorske), tada je

$$\nabla(\Sigma a_i X_i)=\Sigma a_i\nabla X_i.$$

b) Ako ∇ stoji ispred produkta funkcije točaka X, Y, Z (skalarnih ili vektorskih), tada se on primjenjuje po redu na svaku od tih funkcija (nad njih u tom slučaju stavljamo znak $\downarrow$), a rezultati se zbrajaju:

$$\nabla(XYZ)=\nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ)+\nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z)+\nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}).$$

* O izražavanju V grad vidi str. 657.

Zatim dobivene produkte transformiramo po pravilima vektorske algebre tako da iza operatora ∇ stoji samo faktor s znakom $\downarrow$; taj znak nakon izračunavanja izostavljamo.

Primjeri: 1) $\operatorname{div}(U\mathbf{V})=\nabla(U\mathbf{V})=\nabla(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{V})+\nabla(U\overset{\downarrow}{\mathbf{V}})=$

$$=\mathbf{V}\cdot\nabla U+U\cdot\nabla\mathbf{V}=\mathbf{V}\operatorname{grad}U+U\operatorname{div}\mathbf{V}.$$

2) $\operatorname{div}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)=\nabla(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)=\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_1\times\mathbf{V}_2)+\nabla(\mathbf{V}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_2)=$

$$=\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_1\mathbf{V}_2+\nabla\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_2=\mathbf{V}_2\nabla\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_1\nabla\mathbf{V}_2=$$

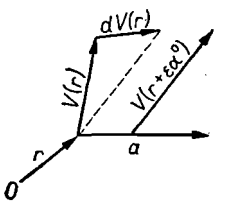
$$=\mathbf{V}_2(\nabla\times\mathbf{V}_1)-\mathbf{V}_1(\nabla\times\mathbf{V}_2)=\mathbf{V}_2\operatorname{rot}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

Operator $(\mathbf{a}\nabla)$. Pri izračunavanju pojavljuje se ponekad operatorski izraz $(\mathbf{a}\nabla)=a_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+a_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. Vektor $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V}=$ $=(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ nazivamo *gradijentom vektorskog polja* $\mathbf{V}$ po vektoru $\mathbf{a}$; on je jednak derivaciji vektora $\mathbf{V}$ po vektoru $\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V}=(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V}=$$

$$=|\mathbf{a}|\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{a}^\circ)-\mathbf{V}(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

(sl. 413).



Sl. 413

Primjer: $\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)=\nabla(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)=\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_1\mathbf{V}_2)+\nabla(\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_2)$.

Prema formuli $\mathbf{b}(\mathbf{ac})=(\mathbf{ab})\mathbf{c}+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (vidi str. 631)

$$\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)=(\mathbf{V}_2\nabla)\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\times(\nabla\times\mathbf{V}_1)+(\mathbf{V}_1\nabla)\mathbf{V}_2+$$

$$+\mathbf{V}_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_2)=(\mathbf{V}_2\operatorname{grad})\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{V}_1+(\mathbf{V}_1\operatorname{grad})\mathbf{V}_2+$$

$$+\mathbf{V}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

Izraz $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V}$ možemo pretvoriti prema formuli

$$2(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V}=\operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{a})+\operatorname{grad}(\mathbf{aV})+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}-\mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a}-$$

$$-\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}-\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Dvostruka primjena ∇; operator Δ

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \nabla(\nabla\times\mathbf{V})=\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V}=0,\\&2)\ \nabla\times(\nabla U)=\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0,\\&3)\ \nabla(\nabla U)=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\Delta U\end{aligned}\right\}\ \text{za svako polje.}$$

Δ (također i $\nabla\nabla$, ∇^2) je *Laplaceov operator*; njegov izraz u koordinatama je:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{(Descartesove koordinate)},$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{(cilindarske koordinate)},$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\Theta\frac{\partial U}{\partial \Theta}$$

(sferne koordinate).

4) $\nabla(\nabla \mathbf{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}$ i 5) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ međusobno su povezani formulom: $\nabla(\nabla \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{V}$. Ovdje je $\Delta \mathbf{V} = (\nabla\nabla)\mathbf{V}$ Laplaceov operator, primijenjen na vektor $\mathbf{V}$

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

15. INTEGRALNI TEOREMI*

Teorem Ostrogradski-Gaussa

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V}\,d\mathbf{S} = \int_{v} \operatorname{div}\mathbf{V}\,dv$$

izriče da je skalarni tok polja $\mathbf{V}$ kroz zatvorenu plohu Σ jednak integralu divergencije $\mathbf{V}$ proširenu po prostoru v, koji je obuhvaćen unutar Σ.

U Descartesovim koordinatama

$$\iint_{\Sigma} (V_x\,dy\,dz + V_y\,dz\,dx + V_z\,dx\,dy) = \iiint_{v} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

(V_x, V_y, V_z su funkcije triju varijabli: x, y i z).

* Vidi str. 529 i 530.

Stokesov teorem

$$\oint_{C} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}\mathbf{V}\,d\mathbf{S}$$

izriče da je cirkulacija polja po krivulji C jednaka toku rotora kroz po volji uzetu plohu Σ, omeđenu rubom C*.

U Descartesovim koordinatama

$$\int_{C} (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) dy\,dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Za ravninsku zatvorenu krivulju (*Greenova formula*)

$$\int_{C} (V_x\,dx + V_y\,dy) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(V_x i V_y su funkcije dviju varijabli x i y.)

Greenovi teoremi

1) $\int_{\Sigma} U_1 \operatorname{grad} U_2\,d\mathbf{S} = \int_{v} (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2)\,dv,$

2) $\int_{\Sigma} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1)\,d\mathbf{S} = \int_{v} (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1)\,dv$

(U_1 i U_2 su skalarna polja, Σ je ploha koja omeđuje prostor v). Napose je (za $U_1 = 1$)

3) $\int_{\Sigma} \operatorname{grad} U\,d\mathbf{S} = \int_{v} \Delta U\,dv.$

U Descartesovim koordinatama teorem 3) poprima ovaj oblik:

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x}dy\,dz + \frac{\partial U}{\partial y}dz\,dx + \frac{\partial U}{\partial z}dx\,dy = \int_{v} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dv.$$

16. BEZVRTLOŽNA I SOLENOIDALNA VEKTORSKA POLJA

Brezvrtložnim poljem $\mathbf{V}$ nazivamo polje za koje je rotor posvuda jednak 0. Ako je $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$, tada je $\mathbf{V} = \operatorname{grad} U$; funkciju U (potencijal $\mathbf{V}$)** u bilo kojoj točki M možemo izraziti formulom

* Točnije vidi na str. 529.

** Ili »minus potencijal V«, vidi napomenu** na str. 650.

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}\, dv}{r}, \tag{1}$$

gdje je r udaljenost volumenskog elementa dv od M; integral se proteže na cijeli prostor*.

Solenoidalnim poljem $\mathbf{V}$ nazivamo polje kojemu je divergencija posvuda jednaka 0. Ako je $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, tada postoji takvo solenoidalno polje $\mathbf{W}$ (*vektorski potencijal* $\mathbf{V}$) da je $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ i

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}\, dv}{r}; \tag{2}$$

r ima isto značenje kao i u formuli (1); integral se proteže na cijeli prostor**.

Svako vektorsko polje $\mathbf{V}$ koje dovoljno brzo pada pri odmicanju u neizmjernost, može se jednoznačno rastaviti na zbroj brezvrtložnog polja $\mathbf{V}_1$ i solenoidalnog polja $\mathbf{V}_2$ ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$), koja se određuju ovim formulama:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}\, dv}{r}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}\, dv}{r}.$$

Polje s točkastim izvorima. *Newtonovo polje* (*Coulombovo polje*) $\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}$ je bezvrtložno posvuda, a također solenoidalno posvuda, s izuzetkom pola 0 (izvora polja). Njegov potencijal je $U = -\frac{e}{r}$***. Skalarni tok $\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S}$ jednak je nuli, ako ploha S ne uključuje unutar sebe izvor, i jednak je $4\pi e$, ako je izvor unutra; veličinu e nazivamo *izdašnost* (ili *intenzitet*) izvora.

Newtonovo polje s izvorom u točki $\mathbf{r}_1$ je

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1);$$

s nekoliko izvora $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$ intenzitet kojih je $e_1, e_2, e_3, \ldots$:

$$\mathbf{E} = \sum \frac{e_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

* Formula (1) vrijedi ako je divergencija polja $\mathbf{V}$ derivabilna i pri odmicanju u neizmjernost dovoljno brzo pada.

** Formula (2) vrijedi ako je rotacija polja $\mathbf{V}$ derivabilna i pri odmicanju u neizmjernost dovoljno brzo pada.

*** Ili $+\frac{e}{r}$; vidi napomenu** na str. 650.

Tok $\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S}$ jednak je nuli, ako ploha S ne uključuje unutar sebe izvore, i jednak $4\pi\Sigma' e_i$, ako su izvori unutra (Σ' se proteže na izvore koji su unutar S).

17. LAPLACEOVA I POISSONOVA JEDNADŽBA

Laplaceova jednadžba. Određivanje skalarnog polja U, za koje je $\Delta U = 0$ ($\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$), dovodi do *Laplaceove jednadžbe*, tj. do parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

ili u ravnini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Funkcije koje zadovoljavaju tu jednadžbu (neprekinute i s neprekinutim parcijalnim derivacijama prvog i drugog reda) nazivamo *Laplaceovim* ili *harmonijskim funkcijama.* Ako su poznate vrijednosti harmonijske funkcije u točkama zatvorene plohe Σ, tada je time potpuno određena vrijednost te funkcije u svim točkama unutar te plohe; njihovo određivanje predstavlja Dirichletov problem. Ako su na zatvorenoj plohi poznate vrijednosti harmonijske funkcije U i njene derivacije $\frac{\partial U}{\partial n}$ u smjeru normale (vanjske) te plohe, tada vrijednosti U_M u točki M unutar plohe izračunavamo po formuli

$$U_M = \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U\, dS,$$

gdje je r udaljenost elementa dS od točke M.

Poissonova jednadžba. Određivanje skalarnog polja U iz dane divergencije $\rho(x, y, z)$ njegova gradijenta dovodi do *Poissonove jednadžbe*

$$\Delta U = \rho(x, y, z)$$

ili

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho(x, y, z).$$

Ako je ρ neprekinuta funkcija i ako je poznato da za $r \to \infty$ (tj. pri odmicanju točke u neizmjernost) funkcija U teži k nuli

i to dovoljno brzo, tada je rješenje Poissonove jednadžbe *Newtonov potencijal* funkcije ρ definiran formulom

$$U_M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho\, dv}{r},$$

gdje je r udaljenost elementa volumena dv od točke M; integracija se proteže na cijeli prostor.

III. SKUPOVI, RELACIJE, PRESLIKAVANJA

A. OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE LOGIKE

1. ALGEBRA LOGIKE (ALGEBRA SUDOVA, LOGIKA SUDOVA)

Pod *sudom*[1] razumijevamo iskaz koji ima jezični smisao i za kojeg se može utvrditi da li je istinit ili lažan. Tako svakom sudu možemo pridružiti *vrijednosti istinitosti* I (istina) ili L (laž, neistina). Umjesto tih simbola često upotrebljavamo brojeve 1 (istina) i 0 (laž).

Primjer 1. „5 je prost broj",
„3 je djelitelj od 7",
„$3+5=9$".

Prvom od navedenih sudova pripada vrijednost istinitosti I, a preostalima vrijednost istinitosti L. Jednadžba:

„$2+x=4$"

nije sud. Ako, međutim, uzmemo da varijabla x ima određene brojevne vrijednosti, onda ćemo za svaki konkretni x dobiti sud, koji može biti istinit ili lažan.

Upotrebom niječne riječce „ne" (ili, prema latinskom, „non"), a također i veznika „*i*", „*ili*", „*ako ..., onda*", „*onda i samo onda, kada*", „*ako i samo ako*" itd. možemo iz jednih sudova izvoditi druge nove sudove. Vrijednosti istinitosti novih izvedenih sudova određene su vrijednostima istinitosti polaznih sudova iz kojih je taj novi sud izgrađen. Konstrukciju pomoću koje iz zadanih sudova (ili iz zadanog suda) izgrađujemo novi sud nazivamo *logičkom operacijom*. Oznake logičkih operacija nazivamo *logičkim veznicima* (ili naprosto *veznicima*). Logičke operacije (veznici) mogu biti jednovaljane (unarne), dvovaljane (binarne), trovaljane (ternarne) itd. U algebri logike logičke se operacije najčešće opisuju (zadaju) pomoću *tablice istinitosti*. Za unarnu operaciju „negacije" (ili „inverzije"), koja odgovara riječci „ne" (odnosno „non"), tablica istinitosti ima izgled kao tablica 1.

Tablica 1.

A	non A
0	1
1	0

[1] Pored izraza *sud* upotrebljavamo još izraze: *izjava, iskaz, izreka.*

Tablica 2.

Oznaka logičke operacije	Druge oznake logičke operacije	Vrijednosti istinitosti koje odgovaraju zadanoj logičkoj operaciji	Naziv logičke operacije	Kako se čita izraz naveden u prvom stupcu
$A_1 \wedge A_2$	$A_1 \& A_2$ $A_1 \cdot A_2$ $A_1 A_2$ $\min(A_1, A_2)$	0001	konjunkcija, logičko množenje logički „i“	A_1 i A_2
$A_1 \vee A_2$	$A_1 + A_2$ $\max(A_1, A_2)$	0111	disjunkcija, logičko zbrajanje, logički „ili“	A_1 ili A_2
$A_1 \rightarrow A_2$	$A_1 \supset A_2$ $A_1 \Rightarrow A_2$	1101	implikacija, logički posljedak,	ako je A_1 onda je i A_2; A_1 implicira A_2; A_1 povlači A_2
$A_1 \oplus A_2$	$A_1 + A_2$ $A_1 \vee A_2$ $A_1 \triangle A_2$	0110	zbroj po modulu 2, ekskluzivna disjenkcija, ekskluzivni „ili“	A_1 plus A_2; ili A_1; ili A_2
$A_1 \sim A_2$	$A_1 \equiv A_2$ $A_1 \leftrightarrow A_2$ $A_1 \Leftrightarrow A_2$	1001	ekvivalencija, ekvivalentnost, identitet	A_1 je tada i samo tada kada je A_2; A_1 je ekvivalentno s A_2
$A_1 \mid A_2$		1110	Shefferov potez, operator Scheffera, antikonjunkcija	nije istina da je i A_1 i A_2; A_1 Shefferov potez A_2
$A_1 \downarrow A_2$	$A_1 \circ A_2$ $A_1 \overline{\vee} A_2$	1000	Pierceova strelica, Webbova funkcija, Daggerova funkcija	ni A_1 ni A_2; A_1 Pierceova strelica A_2

Napomena: U logičkoj operaciji $A_1 * A_2$ sudovi redom poprimaju vrijednosti $0*0$, $0*1$, $1*0$, $1*1$, gdje je sa $*$ označena jedna od navedenih operacija.

Negaciju suda A (tj. non A) označavamo sa $\neg A$ ili $\overline{A}$, ili $\sim A$ i često čitamo kao „*negacija od A*“ ili „*non A*“.

U tablici 2 navede su osnovne dvovaljane (binarne) operacije. U prvom stupcu tablice navedena je najčešće upotrebljavana oznaka za odgovarajuću operaciju, dok su u drugome stupcu navedene ostale oznake za te iste operacije, a u trećem stupcu njihove vrijednosti istinitosti. (Ako je $A_1 * A_2$ rezultat primjene logičke operacije $*$ na sudove A_1 i A_2, onda je prva znamenka u trećem stupcu vrijednost istinitosti za vrijednosti 0 sudova A_1 i A_2 $(0*0)$, druga znamenka za vrijednosti istinitosti $0*1$, treća za $1*0$ i četvrta za $1*1$). U četvrtom stupcu navedeni su različiti nazivi za promatrane operacije. U petom se stupcu navodi kako se uobičajeno čita iskaz oblika $A_1 * A_2$, gdje su A_1 i A_2 sudovi, a sa $*$ je (uvjetno) označena jedna od navedenih operacija (veznika).

Varijablu kojoj su vrijednosti sudovi, nazivamo *propozicijskom* (*izjavnom*) *varijablom.*

Osnovni simboli algebre sudova jesu:

a) propozicijske varijable $p_1, p_2, p_3, \ldots$;
b) unarni veznik $\neg$ i binarni veznici $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,
c) zagrade ( ).

Propozicijske varijable mogu se označavati i drugim slovima, npr. $a, b, c, \ldots$

Pojam *formule algebre sudova* ili *propozicijske formule* uvodi se induktivno:

1) izraz koji se sastoji samo iz propozicijskih varijabli je propozicijska formula;

2) ako su H_1 i H_2 propozicijske formule, onda je svaki od izraza $\neg H_1$, $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \vee H_2)$, $(H_1 \rightarrow H_2)$ i $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ propozicijska formula;

3) niz osnovnih simbola čini propozicijsku formulu onda i samo onda ako je ona konstruirana u skladu s pravilima 1) i 2).

Primjer 2. Izrazi

$$H_1 \equiv ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge \neg p_3),$$

$$H_2 \equiv ((p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg (p_1 \wedge p_2))$$

su propozicijske formule.

Propozicijsku formulu koja započinje znakom $\neg$ nazivamo *negacijom.* Propozicijske formule:

$H_1 \wedge H_2$ nazivamo *konjunkcijom,*

$H_1 \vee H_2$ nazivamo *disjunkcijom,*

$H_1 \to H_2$ nazivamo *implikacijom* i
$H_1 \leftrightarrow H_2$ nazivamo *ekvivalencijom.*

Kao i u aritmetičkim izrazima, dogovorom se upotrebljavaju neki skraćeni zapisi propozicijskih formula:

a) umjesto $\neg H$ piše se $\overline{H}$,

b) umjesto $H_1 \wedge H_2$ piše se $H_1 H_2$,

c) uzima se dogovorom da je prioritet primjene veznika dan slijedećim redosljedom:

$$\leftrightarrow, \to, \vee, \wedge, \neg.$$

d) vanjske zagrade se ispuštaju.

Primjer 3.

$$((p_1 \to p_2) \wedge \neg p_3) \equiv (p_1 \to p_2)\,\overline{p}_3,$$

$$((p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2)) \equiv p_1\overline{p}_3 \vee \overline{p_1 p_2}.$$

Skraćeni zapis višekratne konjunkcije i disjunkcije. Neka su H_1, H_2, $H_3, \ldots$ propozicijske formule. Tada je

$$\bigwedge_{i=1}^{1} H_i = H_1, \qquad \bigwedge_{i=1}^{n+1} H_i = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} H_i \wedge H_{n+1}\right),$$

$$\bigvee_{i=1}^{1} H_i = H_1, \qquad \bigvee_{i=1}^{n+1} H_i = \left(\bigvee_{i=1}^{n} H_i \vee H_{n+1}\right).$$

Primjer 4.

$$\bigwedge_{i=1}^{4} H_i = (((H_1 \wedge H_2) \wedge H_3) \wedge H_4) \equiv H_1 H_2 H_3 H_4,$$

$$\bigvee_{i=1}^{4} H_i = (((H_1 \vee H_2) \vee H_3) \vee H_4) \equiv H_1 \vee H_2 \vee H_3 \vee H_4.$$

U algebri logike često se upotrebljava algebarski i funkcionalni jezik. Pri algebarskom pristupu logičke se operacije interpretiraju kao algebarske operacije koje djeluju na skupu od dva elementa, na primjer na skupu $\{0, 1\}$. Pri funkcionalnom pristupu svakoj osnovnoj logičkoj operaciji pridružena je posve određena dvoznačna funkcija.

Funkciju $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, kojoj argumenti prolaze skupom $\{0, 1\}$ i koja za svaki izbor argumenta prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1\}$ nazivamo *funkcijom algebre logike* ili *Booleovom funkcijom.* Booleova

funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, može se zadati tablicom (vidi tablicu 3). Ovdje su n-torke argumenata napisane u smislu povećanja njihovih indeksa: najprije imamo slog koji predstavlja dijadski zapis broja 0 (taj slog je

Tablica 3.

	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
1	0	0	...	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
2	0	0	...	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
3	0	0	...	1	1	$f(0, 0, \ldots, 1, 1)$
....	.....					.....
2^n-2	1	1	...	1	0	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
2^n-1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

numeriran sa 0), zatim slijedi slog koji predstavlja dijadski zapis broja 1 (taj slog je numeriran brojem 1), za njim slog broja 2 itd. Posljednji slog u tablici 3 sastavljen je od n jedinica i predstavlja dijadski zapis broja 2^n-1. Imajući to u vidu uočimo da Booleovu funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ponekad možemo zadati slogom $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{2^n-1}$, gdje je α_i vrijednost funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na slogu numeriranom sa i $(i=0, 1, \ldots, 2^n-1)$.

Među Booleovim funkcijama osobito važnu ulogu imaju tzv. *elementarne* Booleove funkcije, koje su tijesno povezane s osnovnim logičkim operacijama (i veznicima): *negacijom, konjunkcijom* i drugima.

Binarne elementarne Booleove funkcije jesu *konjunkcija, disjunkcija, implikacija, suma po modulu 2, ekvivalencija, Shefferov potez* i *Pierceova strelica.* Svaka od navedenih funkcija definira se i označava na isti način kao i pripadne logičke operacije navedene u tablici 2. Jedina razlika sastoji se u tome da simbole A_1 i A_2 iz tablice 2 treba interpretirati kao *Booleove varijable* (tj. varijable koje primaju vrijednosti iz skupa $\{0, 1\}$).

Postoje dvije unarne Booleove funkcije varijable x: *identična funkcija* (*identitet*) $\varphi_1(x)$ i negacija od x koju označavamo sa $\varphi_2(x)$ (vidi tablicu 4). Identitet $\varphi_1(x)$ obično označavamo sa x, a negaciju od x sa $\neg x$ ili $\overline{x}$ (usporedi s logičkom operacijom „negacija"). Obje ove unarne funkcije dogovorom se smatraju elementarnim funkcijama.

Tablica 4

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	0	1
1	1	0

Postoje dvije nul-arne elementarne Booleove funkcije: to su *konstante* 0 i 1.

Svakoj propozicijskoj formuli može se po posve određenom pravilu pridružiti Booleova funkcija:

1) propozicijskoj varijabli p_i pridružuje se identična Booleova funkcija x_i $(i=1, 2, \ldots)$;

2) neka su propozicijskim formulama H_1 i H_2 već pridružene Booleove funkcije φ_{H_1} i φ_{H_2}; tada se propozicijskoj formuli $\neg H_1$ pridružuje Booleova funkcija $\overline{\varphi}_{H_1}$, propozicijskoj formuli $H_1 \wedge H_2$ (odnosno $H_1 \vee H_2$, $H_1 \rightarrow H_2$ i $H_1 \leftrightarrow H_2$) pridružuje Booleova funkcija $\varphi_{H_1} \cdot \varphi_{H_2}$ (odnosno $\varphi_{H_1} \vee \varphi_{H_2}$, $\varphi_{H_1} \rightarrow \varphi_{H_2}$ i $\varphi_{H_1} \leftrightarrow \varphi_{H_2}$).

Booleovu funkciju φ_H pridruženu po opisanom pravilu propozicijskoj formuli H, nazivamo *funkcijom istinitosti formule H.*

Neka je φ_{H_i} funkcija istinitosti formule H_i $(i=1, 2)$; neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup onih varijabli koje se pojavljuju u bar jednoj od funkcija φ_{H_1} i φ_{H_2}. Propozicijske formule H_1 i H_2 nazivamo *ekvivalentnim* (ili *revnopravnim*), ako se na svakom slogu $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ varijabli vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkcija φ_{H_1} i φ_{H_2} podudaraju. Činjenicu da su propozicijske formule H_1 i H_2 ekvivalentne označavamo ovako: $H_1 = H_2$ (ili $H_1 \equiv H_2$).

Niže navedene *osnovne ekvivalencije* često su od koristi pri operiranju s propozicijskim formulama i Booleovim funkcijama.

Osnovne ekvivalencije:

$\overline{\overline{H}} = H$ (pravilo skidanja dvostruke negacije);

$H \wedge H = H$ (idempotentnost konjunkcije);

$H \vee H = H$ (idempotentnost disjunkcije);

$H_1 * H_2 = H_2 * H_1$ (komutativnost veznika $*$, gdje je $*$ zajednički simbol za veznike $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$);

$(H_1 * H_2) * H_3 = H_1 * (H_2 * H_3)$ (asocijativnost veznika $*$, gdje je $*$ opća oznaka za veznike $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$);

$H_1 \wedge (H_2 \vee H_3) = (H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3)$ (distributivnost konjunkcije s obzirom na disjunkciju);

$H_1 \vee (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3)$ (distributivnost disjunkcije s obzirom na konjunkciju);

$\overline{H_1 \wedge H_2} = \overline{H}_1 \vee \overline{H}_2$ i $\overline{H_1 \vee H_2} = \overline{H}_1 \wedge \overline{H}_2$ (de Morganova pravila);

$H_1 \vee (H_1 \wedge H_2) = H_1$ i $H_1 \wedge (H_1 \vee H_2) = H_1$ (pravila gutanja ili apsorpcije);

$H_1 \vee (\overline{H}_1 \wedge H_2) = H_1 \vee H_2$ i $H_1 \wedge (\overline{H}_1 \vee H_2) = H_1 \wedge H_2$;

$H_1 \rightarrow H_2 = \overline{H}_1 \vee H_2$;

$H_1 \leftrightarrow H_2 = H_1 H_2 \vee \overline{H}_1 \overline{H}_2$;

$H\overline{H} = L$; (zakon proturječja);

$H \vee \overline{H} = I$; (zakon isključenja trećega);

$H \cdot I = H$;

$H \vee I = I$;

$H \cdot L = L$;

$H \vee L = H$.

Primjedba. U nekoliko navedenih ekvivalencija pojavljuje se slovo I (odnosno L); ono tamo ima također značenje propozicijske formule kojoj je funkcija istinitosti identički jednaka 1 (odnosno 0).

Propozicijsku formulu $\overset{r}{\underset{k=1}{\wedge}} p_{i_k}^{\sigma_k}$ (odnosno $\overset{r}{\underset{k=1}{\vee}} p_{i_k}^{\sigma_k}$), gdje je $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $p_{i_k}^0 \equiv \overline{p}_{i_k}$, $p_{i_k}^1 \equiv p_{i_k}$, $i_k \in \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ za sve $k=1, 2, \ldots, r$ i $p_{i_m} \neq p_{i_k}$ za $m \neq k$, nazivamo *elementarnom konjunkcijom* (odnosno *elementarnom disjunkcijom*) *nad skupom propozicijskih varijabli* $\{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}\}$. Broj r (količina slova u formuli) nazivamo *rang* elementarne konjunkcije (odnosno elementarne disjunkcije). Dvije elementarne konjunkcije (odnosno disjunkcije) smatramo različitima, ako u bar jednoj od njih postoji izraz $p_i^{\sigma_i}$ koji se ne nalazi u drugoj.

Primjer 5. Konjunkcije $p_2\overline{p}_3$, p_2, p_4, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_2 p_3$ su u parovima različite elementarne konjunkcije nad skupom propozicijskih varijabli $\{p_2, p_3, p_4, p_6\}$, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $\{p_2, p_3, p_4\}$ itd.

Propozicijsku formulu $\overset{s}{\underset{j=1}{\vee}} H_j$ (odnosno $\overset{s}{\underset{j=1}{\wedge}} H_j$) u kojoj su $H_1, H_2, \ldots, H_s$ u parovima različite elementarne konjunkcije (odnosno disjunkcije) nad skupom varijabli $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$ i, osim toga je rang svake konjunkcije H_j (odnosno disjunkcije H_j) jednak n, nazivamo *savršeno potpuno disjunktivnom* (odnosno *konjunktivnom*) *normalnom formom* nad skupom $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$. Dvije savršeno disjunktivne (odnosno konjunktivne) normalne forme smatramo *jednakima*, ako se podudaraju skupovi elementarnih konjunkcija (odnosno disjunkcija) koje ulaze u te forme.

Vrijedi **teorem.** Svaka propozicijska formula $H(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n})$, u kojoj se pojavljuju samo proporcijske varijable $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}$ koje pripadaju skupu $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$ ili je ekvivalentna sa L (odnosno I) ili je ekvivalentno točna jednoj savršenoj disjunktivnoj (savršeno konjunktivnoj) normalnoj formi nad skupom varijabli $\{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}\}$.

Primjer 6. Propozicijska formula $H \equiv \overline{p_2 \rightarrow p_3} \vee \overline{p}_2 p_3$ ekvivalentna je savršeno disjunktivnoj normalnoj formi $p_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_2 p_3$, a također i

savršeno konjunktivnoj normalnoj formi $(p_2 \vee p_3)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3)$. Nad skupom varijabli $\{p_2, p_3, p_5\}$ formula H ekvivalentna je savršenoj disjunktivnoj normalnoj formi

$$p_3\bar{p}_3p_5 \vee p_2\bar{p}_3\bar{p}_5 \vee \bar{p}_2p_3p_5 \vee \bar{p}_2p_3\bar{p}_5$$

i savršenoj konjunktivnoj normalnoj formi

$$(p_2 \vee p_3 \vee p_5)(p_2 \vee p_3 \vee \bar{p}_5)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3 \vee p_5)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3 \vee \bar{p}_5).$$

Ako u definiciji elementarne konjunkcije (i disjunkcije) zamijenimo propozicijske formule $p_{i_k}^{\sigma_k}$ sa Booleovim funkcijama $x_{i_k}^{\sigma_k}$, onda dobijemo definiciju elementarne konjunkcije (osnosno disjunkcije) u klasi Booleovih funkcija. Analogno možemo dobiti za Booleove funkcije definicije savršeno disjunktivnih i konjunktivnih normalnih formi.

Neka je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Booleova funkcija koja nije posvema jednaka nuli. Tada se ta funkcija može napisati u obliku savršene disjunktivne normalne forme, koja ima oblik

$$\bigvee_{\substack{\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\tilde{\sigma})=1}} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Ovdje se disjunkcija uzima po svim slogovima $\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ vrijednosti varijabla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na kojima je funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jednaka 1.

Ako Booleova funkcija $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nije identički jednaka 1, onda se ona može prikazati u obliku savršene konjunktivne normalne forme primijenivši, na primjer, slijedeću metodu: najprije se konstruira savršena disjunktivna normalna forma za funkciju $\bar{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a zatim se negacija dobivene disjunktivne forme transformira primjenjujući de Morganova pravila.

Primjer 7. Implikacija $x_1 \to x_2$ jednaka je 1 na slogovima (0, 0), (0, 1) i (1, 1). Stoga savršena disjunktivna normalna forma za nju ima oblik: $x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^1 \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2$. Savršena disjunktivna normalna forma za negaciju implikacije ima oblik $x_1\bar{x}_2$. Znači da je $x_1 \to x_2 = \overline{\overline{x_1 \to x_2}} = \overline{x_1\bar{x}_2} = \bar{x}_1 \vee x_2$ savršena konjunktivna forma funkcije $x_1 \to x_2$.

2. PREDIKATI

Iskazi koji se primijenjuju u matematici obično predstavljaju opise svojstava matematičkih objekata ili opise odnosa (međusobnih povezanosti) koji postoje između tih objekata. Za analizu zakonomjernosti svojstvenih takvim iskazima, sredstva algebre sudova nisu dovoljna. Pojavljuje se neophodnost uvođenja pojma „izjavne funkcije" ili predikata.

Neka je I skup promatranih objekata. Taj ćemo skup nazivati *predmetnim područjem* (ili *skupom individuuma*). Elemente koji pripadaju skupu I nazvati ćemo *individuumima.*

Primjer 8. I je skup realnih brojeva i svih unarnih svagdje definiranih realnih funkcija realne varijable.

Znakove (simbole) i nizove znakova kojima su označeni individuumi nazivati ćemo *individnim* (ili *predmetnim*) *konstantama.*

Primjedba. Vrlo često se individne konstante poistovjećuju s odgovarajućim individuumima.

Primjer 9. „Brojevne" konstante: 3; π; $-\sqrt{2}$; „funkcionalne" konstante: ln, sin, tg.

Individuumna (ili *predmetna*) *varijabla* predstavlja znak kojim se oznavača proizvoljni individuum iz nekog nepraznog podskupa skupa individuuma. Sam taj podskup nazivamo *područjem mijenjanja* zadane varijable.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ individuumi iz područja I. Promotrimo neki iskaz o tim individuumima i označimo ga sa $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ako je $n=1$, onda $P(a_1)$ označava svojstvo individuuma a_1. Ako je $n \geqslant 2$, onda zadani iskaz opisuje neku *relaciju* između individuuma a_1, $a_2, \ldots, a_n$ (poredak individuuma je bitan!). Uzmimo predmetne varijable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (definirane na područjima $I_1, I_2, \ldots, I_n$); ovdje je I_k podskup skupa I, $k=1, 2, \ldots, n$. Izraz $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ili *logička funkcija* ili *predikat*, ako pri svakoj zamjeni varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ individuama (iz odgovarajućih skupova I_k) dobivamo iskaz. Simbol P je ovdje upotrijebljen za oznaku konkretnog, *individualnog* predikata, tj. u danom slučaju simbol P je *predikatna konstanta* (*konstantni predikatni simbol*). *Promjenljivi predikatni simbol* predstavlja znak (ili niz znakova), koji označava proizvoljnu predikatnu konstantu iz nekog (odgovarajućeg) skupa predikatnih konstanata. Ako je P promjenljivi predikatni simbol, onda $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazivamo *promjenljivim predikatom* (ili naprosto *predikatom*). Predikat koji zavisi od n različitih predmetnih varijabli nazivamo *n-arnim predikatom.* Izjave možemo interpretirati kao nul-arne predikate, tj. kao predikate koji ne ovise o predmetnim varijablama. Za binarne predikate često se umjesto zapisa $P(x_1, x_2)$ primjenjuje zapis x_1Px_2.

Primjer 10. „x, paran broj" je unarni predikat, „x je djelitelj od y" je binarni predikat. Oba predikata su individualna.

Neka je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predikat, a y_j individna konstanta ili predmetna varijabla, $j=1, 2, \ldots, n$, tada $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nazivamo *elementarnom formulom.*

Primjer 11. Promotrimo binarne individualne predikate $x_1>x_2$, $x_1|x_2$ i $x_1=x_2$. Simboli $>$, $|$ i $=$ neka kao i obično označavaju „veće", „je djelitelj" i „jednako". Izrazi $x_1>3$, $7|5$ i $x_3=x_{10}$ jesu elementarne formule.

S elementarnim formulama može se operirati isto kao i s proporcijskim varijablama: na njih su primjenljive sve operacije logike sudova. Pomoću logičkih veznika iz elementarnih formula izvode se nove *predikatne formule.* Same elementarne formule također smatramo predikatnim.

Primjer 12: $\neg(7|5 \wedge x>3)$ i $\neg(3|9 \vee \neg(x=y))$ su predikatne formule. Njih se može „pročitati" na ovaj način:

prvu — „nije istina da je 7 djelitelj od 5 i x veće od 3",

drugu — „3 ne dijeli 9 ili x nije jednak y".

Upotrebom samo elementarnih formula i operacija logike sudova nije moguće svladati poteškoće koje nastaju pri pokušaju formuliranja na formalnom logičko-matematičkom jeziku slijedeći teorem: „jednadžba $x+3=8$ ima cjelobrojno rješenje". U vezi s time uvodimo pojam *kvantora* (*kvantifikatora*). Prije svega ograničimo se *kvanfitikatorom sveobuhvatnosti* (oznaka: $\forall$, čita se *„za sve..."*) i *kvantifikatorom egzistencije* (oznaka: $\exists$ čita se *„postoji..."*).

Proširimo pojam predikatne formule. Smatrat ćemo da se predikatne formule izvode iz elementarnih formula pomoću logičkih veznika i kvantifikatora sveobuhvatnosti i egzistencije.

Primjena kvantifikatora na konstrukciju formula obavlja se po slijedećoj shemi.

Neka je H predikatna formula i x predmetna varijabla, (promjenljiva), koja može i ne biti u formuli H. Tada izkaze $(\forall xH)$ i $(\exists xH)$ smatramo predikatnim formulama (u tom slučaju se kaže, da je H područje djelovanja odgovarajućeg kvantifikatora $\forall x$ ili $\exists x$).

Pripisivanjem sprijeda predikatnoj formuli nekog kvantifikatora nazivamo *operacijom vješanja kvantifikatora* (ili *vezanja kvantifikatorom*).

Konkretni ulazak varijable x u formulu H nazivamo *vezanim*, ako on neposredno slijedi za nekim kvantifikatorom, ili je sadržan u području djelovanja nekog kvantifikatora $\forall x$ ili $\exists x$. Ako ulazak varijable u formulu nije vezan, tada ga nazivamo *slobodnim.* Varijablu, koja ulazi u formulu H, nazivamo *vezanom* (*slobodnom*), ako u H postoji vezan (odnosno slobodan) ulazak te varijable. Na taj način varijabla može istovremeno biti slobodna i vezana (u danoj formuli).

Primjer 13. Neka je Z skup cijelih brojeva. U predikatnoj formuli $(\forall x\,(x\in Z \rightarrow 2|2x)) \wedge (x>5)$ varijabla x je vezana (tri su njena ulaska u prvi član konjunkcije vezana) i slobodna (ulazak x u formulu $x>5$ je slobodan). Područje djelovanja kvantifikatora $\forall x$ je formula $x\in Z \rightarrow 2|2x$. U formuli $\exists x\,(x\in Z \wedge x+3=8)$, koja je istinita izjava, sva tri ulaska varijable x su vezana.

Predmetne varijable, koje ulaze u predikatne formule, mogu se preimenovati u skladu sa slijedećim pravilima.

Vezano preimenovanje. Neka je x vezana varijabla u formuli H. Proizvoljni ulazak varijable x, koji neposredno slijedi za nekim kvantifikatorom, i sve ulaske x, koji pripadaju području djelovanja promatranog kvantifikatora, možemo istovremeno zamijeniti bilo kojom varijablom y koja ne ulazi u formulu H.

Slobodno preimenovanje. Neka je x slobodna varijabla u formuli H. Sve slobodne ulaske te varijable u formuli H možemo istovremeno zamijeniti bilo kojom varijablom y koja ne ulazi u formulu H.

Pomoću vezanog preimenovanja možemo proizvoljnu predikatnu formulu pretvoriti u takvu predikatnu formulu koja ne sadrži ni jednu istovremeno i vezanu i slobodnu predmetnu varijablu.

Primjer 14. Formulu $\exists x\,(x>1 \rightarrow \forall x\,(x>y \wedge \exists x\,(x|10))$ možemo pretvoriti u ove formule:

$$\exists x_1\,(x_1>1 \rightarrow \forall x_2\,(x_2>y \wedge \exists x_3\,(x_3|10))),$$

$$\exists x_1\,(x_1>1 \rightarrow \forall x_2\,(x_2>y \wedge \exists x_2\,(x_2|10))),$$

$$\exists x_1\,(x_1>1 \rightarrow \forall x_1\,(x_1>y \wedge \exists x_2\,(x_2|10))).$$

Omeđeni kvantori. Često je pri operiranju s kvantifikatorima zgodno promatrati samo elemente nekog zadanog nepraznog skupa M, tj. upotrijebiti konstrukcije oblika: „za sve $x\in M$" i „postoji $x\in M$..." (simbolički ih možemo zapisati ovako: „$\forall x\in M$..." i „$\exists x\in M$..."). Ove omeđene kvantifikatore treba interpretirati samo kao kratice pri zapisivanju formula koje sadrže obična sredstva izražavanja:

$\forall x\in M\,(H(x))$ je kratica formule $\forall x\,(x\in M \rightarrow H(x))$.

$\exists x\in M\,(H(x))$ je kratica formule $\exists x\,(x\in M \wedge H(x))$.

B. OSNOVNI POJMOVI TEORIJE SKUPOVA

3. SKUPOVI, ELEMENTI

Pod *skupom* razumijevamo svaki zbir različitih objekata koje nazivamo *elementima* tog skupa. Ako je a element skupa M, tada to

označavamo ovako: $a \in M$ (to čitamo: „a pripada skupu M“ ili „a je element od M“. Da a nije element od M, označavamo ovako: $a \notin M$ (ili $a \bar{\in} M$). Dva skupa A i B su jednaka (oznaka: $A = B$), ako se oni sastoje od jednih te istih elemenata, tj.

$$A = B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Skup se može opisati i tako da se navede svojstvo koje moraju imati njegovi i samo njegovi elementi. Skup svih objekata x koji imaju svojstvo $H(x)$ označavamo ovako:

$$\{x \mid H(x)\} \text{ ili } \{x : H(x)\}.$$

Ako se za svojstvo $H(x)$ odabere neko svojstvo koje nema nijedan objekt, npr. svojstvo $x \neq x$ onda ni za jedan objekt a ne može biti $a \in \{x \mid H(x)\}$ i prema tome je $\forall a\,(a \notin \{x \mid H(x)\})$. Skup koji nema elemenata nazivamo *praznim skupom* i označavamo simbolom $\varnothing$.

4. PODSKUPOVI

Ako su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B onda kažemo da je A *sadržan* (ili *uključen*) u B ili da B *sadrži* (ili *uključuje*) A, i to označavamo ovako:

$$A \subseteq B \text{ (ili } B \supseteq A).$$

Ako je $A \subseteq B$, onda kažemo da je A *podskup* skupa B; ako je pri tome još i $A \neq B$, onda kažemo da je A *pravi podskup* od B i to zapisujemo ovako:

$$A \subset B.$$

Relacije $\subseteq$ i $\subset$ među skupovima nazivamo *inkluzijom* i *pravom inkluzijom*. Čest je slučaj da nema potrebe razlikovati ta dva tipa inkluzije. U tom se slučaju primjenjuje samo oznaka $\subset$. Zapis $A \nsubseteq B$ (odnosno $A \not\subset B$) označava da skup A nije podskup (odnosno nije pravi podskup) skupa B.

Za skupove A, B i C istinite su slijedeće tvrdnje:

$$A \subseteq A,$$
$$A \not\subset A,$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C,$$
$$A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C.$$

Između inkluzije i jednakosti skupova postoji slijedeća veza:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Ova se činjenica često koristi kada se dokazuje da su dva skupa jednaka: da bi dokazali jednakost skupova A i B dovoljno je dokazati da vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

C. OPERACIJE SA SKUPOVIMA

5. UNIJA I PRESJEK SKUPOVA

Unija $A \cup B$ skupova A i B je skup sastavljen od elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova A i B. Presjek $A \cap B$ skupova A i B je skup sastavljen od elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B. Skupove A i B, koji imaju prazan presjek, tj. $A \cap B = \varnothing$, nazivamo *disjunktnim* skupovima.

Za skupove A, B i C istiniti su slijedeći iskazi:

$$A \cup A = A \cap A = A,$$
$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (A \cap B) = A,$$
$$A \cap (A \cup B) = A,$$
$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B,$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B,$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A,$$
$$A \subseteq B \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C,$$
$$A \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C,$$
$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \rightarrow A \cup B \subseteq C,$$
$$A \subseteq B \wedge A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C.$$

6. RAZLIKA, SIMETRIČNA RAZLIKA, KOMPLEMENTI SKUPOVA

Razlika $A \setminus B$ skupova A i B (poredak tih skupova je bitan!) jest skup sastavljen samo od onih elemenata koji pripadaju skupu A i ne pripadaju skupu B. *Simetrična razlika* $A \triangle B$ skupova A i B je skup sastavljen od elemenata koji pripadaju samo jednom od skupova A i B, tj. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ako je $A \subseteq E$, onda se *komplement* $C_E A$ skupa A s obzirom na skup E ovako definira:

$$C_E A = E \setminus A.$$

Za skupove A, B, i C istiniti su slijedeći iskazi:

$A \setminus B \subseteq A$,
$A \setminus A = \emptyset$,
$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,
$A \triangle B = B \triangle A$,
$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,
$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
$A \subseteq B \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$,
$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A \setminus B = A$.

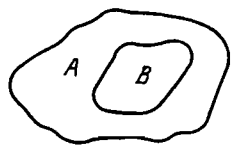
Ako su A i B podskupovi skupa E, tada je

$A \cup C_E A = E$,
$A \cap C_E A = \emptyset$,
$C_E E = \emptyset$,
$C_E \emptyset = E$,
$C_E C_E A = A$,
$C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$,
$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$,
$A \subseteq B \leftrightarrow C_E B \subseteq C_E A$.

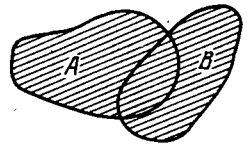
7. EULER-VENNOVI DIJAGRAMI

Da se objasne svojstva operacija sa skupovima i različite veze između skupova, zgodno je poslužiti se Euler-Vennovim dijagramima u kojima se promatrani skupovi skiciraju u obliku skupa točaka u

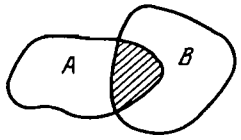
ravnini (vidi slike 414 do 419). Slika 414 prikazuje inkluziju $B \subseteq A$; na sl. 415, 416, 417, 418 i 419 osjenčani dijelovi ravnine ilustriraju uniju $A \cup B$, presjek $A \cap B$, razliku $A \setminus B$, simetričnu razliku $A \triangle B$ i



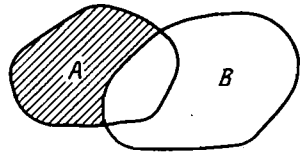
Sl. 414



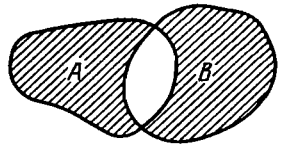
Sl. 415



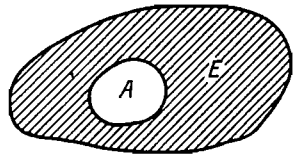
Sl. 416



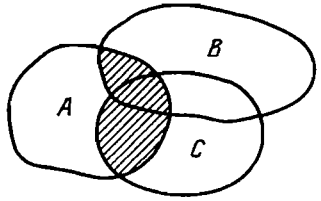
Sl. 417



Sl. 418



Sl. 419



Sl. 420

komplement $C_E A$. Osjenčeno područje ravnine prikazano na slici 420 ilustrira skup $A \cap (B \cup C)$. Ista ta slika može poslužiti i kao ilustracija jednakosti $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

8. KARTEZIJEV (DESCARTESOV) PRODUKT SKUPOVA

Uređenim parom (a, b) dvaju elemenata a, b nazivamo skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Za sve elemente a, b, c i d vrijedi

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Ako je $a = b$, onda je $(a, a) = \{\{a\}, \{a\}\}$. Ako su elementi a i b različiti onda vrijedi $(a, b) \neq (b, a)$. *Uređena* n-torka $(a_1, \ldots, a_n)$ n elemenata $a_1, \ldots, a_n$ definira se induktivno:

za $n = 2$ $(a_1, \ldots, a_n)$ je (a_1, a_2),

za $n > 2$ $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ je $((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Vrijedi:

$$(a_1, \ldots, a_n)=(b_1, \ldots, b_n)\leftrightarrow a_1=b_1 \wedge \ldots \wedge a_n=b_n.$$

Kartezijev produkt $A\times B$ dvaju skupova A i B je skup svih uređenih parova (a, b) gdje je $a\in A$ i $b\in B$, tj.

$$A\times B=\{(a, b)\,|\,a\in A \wedge b\in B\}.$$

Za skupove A, B, C, D istiniti su slijedeći iskazi:

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C),$$
$$(A\cap C)\times C=(A\times C)\cap(B\times C),$$
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$
$$(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D),$$
$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D),$$
$$A\times B=\varnothing\leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing,$$
$$A\subseteq C \wedge B\subseteq D\rightarrow A\times B\subseteq C\times D.$$

Kartezijevo množenje skupova je nekomutativno i nesocijativno.

Kartezijev produkt $A_1\times \ldots \times A_n$ n skupova (kraći zapis je $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} A_i$) jest skup

$$\{(a_1, \ldots, a_n)\,|\,a_1\in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n\in A_n\}.$$

Ako je $A_1=\ldots=A_n=A$, onda se umjesto zapisa $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} A_i$ upotrebljava zapis A^n i tako dobiveni produkt nazivamo *n-tom kartezijevom potencijom skupà A*.

9. POOPĆENA UNIJA I PRESJEK

Neka je K neki skup kojeg ćemo nazvati *skupom indeksa* i neka je za svaki $k\in K$ A_k podskup skupa A. Tada skup $\{A_k\,|\,k\in K\}$ nazivamo *porodicom podskupova* skupa A. *Unija* porodice skupova $\{A_k\,|\,k\in K\}$ je skup $\{x\,|\,\exists k(k\in K \wedge x\in A_k)\}$; taj skup označavamo sa

$$\bigcup_{k\in K} A_k \text{ (ili } \bigcup_K A_k).$$

Presjek porodice podskupova uvodi se samo za neprazne porodice. Ako je $K\neq\varnothing$, onda je presjek porodice podskupova $\{A_k\,|\,k\in K\}$ skup $\{x\,|\,\forall k(k\in K\rightarrow x\in A_k)\}$; taj presjek označavamo sa

$$\bigcap_{k\in K} A_k \text{ (ili } \bigcap_K A_k).$$

Ako porodicu podskupova označimo jednim slovom, na primjer sa M, onda se unija (presjek) svih podskupova te porodice zapisuje u obliku $\cup M$ (odnosno $\cap M$).

Za porodicu podskupova M, N, za koje pri promatranju presjeka pretpostavljamo da su neprazni, vrijede slijedeći iskazi:

$$\cup(M\cup N)=\cup M\cup\cup N,$$
$$\cap(M\cap N)=\cap M\cup\cap N,$$
$$\cup(M\cap N)=\cup M\cap\cup N,$$
$$\cap(M\cup N)=\cap M\cup\cap N,$$
$$M\subseteq N\rightarrow\cup M\subseteq\cup N \wedge \cap N\subseteq\cap M.$$

Ispišimo još nekoliko relacija služeći se prvobitnim oznakama za uniju i presjek porodice podskupova. Neka su $\{A_k\,|\,k\in K\}$, $\{B_j\,|\,j\in J\}$ porodice podskupova i C neki skup. Tada vrijede slijedeće jednakosti:

$$C\cap\bigcup_{k\in K} A_k=\bigcup_{k\in K}(C\cap A_k),$$

$$C\cup\bigcap_{k\in K} A_k=\bigcap_{k\in K}(C\cup A_k),$$

$$\bigcup_{k\in K} A_k\cap\bigcup_{j\in J} B_j=\bigcup_{(k, j)\in K\times J}(A_k\cap B_j),$$

$$\bigcap_{k\in K} A_k\cup\bigcap_{j\in J} B_j=\bigcap_{(k, j)\in K\times J}(A_k\cup B_j).$$

Te jednakosti ostaju valjane ako svuda u njima znakove „$\cap$“ i „$\cup$“ zamijenimo sa „$\times$“. Nadalje vrijede ovi iskazi:

$$C\setminus\bigcup_{k\in K} A_k=\bigcap_{k\in K}(C\setminus A_k),$$

$$C\setminus\bigcap_{k\in K} A_k=\bigcup_{k\in K}(C\setminus A_k),$$

$$\bigcup_{k\in K} A_k\setminus C=\bigcup_{k\in K}(A_k\setminus C),$$

$$\bigcap_{k\in K} A_k\setminus C=\bigcap_{k\in K}(A_k\setminus C);$$

posebice jer je $A_k\subseteq A$ za sve $k\in K$, pa vrijedi

$$C_A(\bigcup_{k\in K} A_k)=\bigcap_{k\in K}(C_A A_k),$$

$$C_A(\bigcap_{k\in K} A_k)=\bigcup_{k\in K}(C_A A_k).$$

D. RELACIJE I PRESLIKAVANJA

10. RELACIJE

N-arnom relacijom R na nepraznom skupu A nazivamo podskup skupa A^n, tj. $R \subseteq A^n$. Ako je R n-arna relacija na A i $(a_1, \ldots, a_n) \in R$, tada se kaže da su *elementi* $a_1, \ldots, a_n$ *u relaciji* R i piše se $Ra_1 \ldots a_n$; ako je $(a_1, \ldots, a_n) \notin R$, onda se kaže da elementi $a_1, \ldots, a_n$ *nisu u relaciji* R. Za binarnu (2-arnu) relaciju R umjesto Ra_1a_2 piše se a_1Ra_2.

Na svakom nepraznom skupu A postoje dvije trivijalne n-arne relacije:

a) *potpuna* ili *univerzalna* relacija $\vee$, kod koje je u relaciji svaka n-torka elementa iz A,

b) *prazna* ili *nul relacija* $\wedge$, u kojoj niti jedna n-torka elementa iz A nije u relaciji.

Očito je $\vee = A^n$ i $\wedge = \varnothing$.

Ako je R n-arna relacija na A i B neprazan podskup skupa A, tada *restrikcija* od R na B (oznaka $R|B$) jest skup $R \cap B^n$ i prema tome ta restrikcija je n-arna relacija na B.

Za relacije se na prirodan način može uvesti sve one operacije koje smo prije definirali za skupove. Na primjer, ako su R i S n-arne relacije na A, onda su unija $R \cup S$ i presjek $R \cap S$ tih relacija također n-arne relacije na A (ponekad uniju relacija nazivamo *sumom*, a presjek *apsolutnim produktom*). Ako je R n-arna relacija na A, tada njen komplement s obzirom na skup A^n često nazivamo *negacijom relacije* R i označavamo sa $\overline{R}$.

Za **binarne relacije** koje u matematici igraju važnu ulogu, uveden je čitav niz specijalnih pojmova. Reći ćemo nekoliko riječi o njima.

Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da je *refleksivna* ako za svaki $a \in A$ vrijedi $(a, a) \in R$. Ako za sve $a, b \in A$ $(a, b) \in R$ povlači $(b, a) \in R$, onda kažemo da je R *simetrična*. Ako za $a, b, c \in A$ $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ povlači $(a, c) \in R$, onda kažemo da je R *tranzitivna*.

Produktom $R \cdot S$ (*relativnim produktom*) dviju binarnih relacija R i S na skupu A nazivamo skup

$$\{(x, y) | \exists z\, (z \in A \wedge (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

Obrnutom (*inverznom*, *dualnom*) relacijom relacije R zadanoj na skupu A nazivamo relaciju R^{-1}, koja je definirana na slijedeći način

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}.$$

Uočite da je R simetrična ako i samo ako je $R = R^{-1}$.

Ako su R, S, T binarne relacije na A onda vrijedi:

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T),$$
$$(R \cup S) \cdot T = (R \cdot T) \cup (S \cdot T),$$
$$(R \cap S) \cdot T = (R \cdot T) \cap (S \cdot T),$$
$$(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1},$$
$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1},$$
$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}.$$

Uočite da je R tranzitivna ako i samo ako je $R \cdot R = R$.

Neka je R binarna relacija na A. Tada skup $\{x | \exists y\, ((x, y) \in R)\}$ nazivamo *praslikom* relacije R, a skup $\{y | \exists x\, ((x, y) \in R)\}$ slikom relacije R.

Navedimo u tablici 5 neka važna svojstva binarnih relacija (u tablici R znači binarnu relaciju na A).

Tablica 5.

Svojstvo	Karakterizirajući uvjet
Refleksivnost	$\forall a\, (aRa)$
Antirefleksivnost ili irefleksivnost	$\forall a \neg (aRa)$
Tranzitivnost	$\forall a \forall b \forall c\, (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$
Simetričnost	$\forall a \forall b\, (aRb \rightarrow bRa)$
Antisimetričnost	$\forall a \forall b\, (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$
Asimetričnost	$\forall a \forall b\, (aRb \rightarrow \neg bRa)$
Linearnost	$\forall a \forall b\, (aRb \vee bRa)$
Povezanost	$\forall a \forall b\, (aRb \vee bRa \vee a = b)$
Jednakost trećemu	$\forall a \forall b \forall c\, (aRc \wedge bRc \rightarrow aRb)$
Trihotomija	$\forall a \forall b\, (aRb \vee bRa \vee a = b) \wedge$ $\wedge \neg((aRb \wedge bRa) \wedge (aRb \wedge a = b) \wedge$ $\wedge (bRa \wedge a = b))$.

11. RELACIJA EKVIVALENCIJE

Binarnu relaciju nazivamo *relacijom ekvivalencije* ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna. Ako je R relacija ekvivalencije, onda umjesto aRb pišemo $a \sim_R b$ (čita se: a je ekvivalentan sa b s obzirom na R). Ako je na A zadana relacija ekvivalencije R, onda elemente skupa A možemo rastaviti na u parovima disjunkte klase. Svaku klasu tvore međusobno ekvivalentni elementi u relaciji R. Te klase nazi-

vamo *klasama ekvivalencije*, a element iz jedne klase nazivamo *predstavnikom* te klase. Ako je a predstavnik neke klase ekvivalencije, onda se ta klasa označava sa $[a]_R$. Skup svih klasa ekvivalencije na skupu A s obzirom na relaciju R nazivamo *kvocijentnim prostorom* skupa A s obzirom na R i označavamo sa $A|R$.

Presjek relacija ekvivalencije zadanih na skupu A također je relacija ekvivalencije na A.

12. RELACIJA UREĐAJA

Binarnu relaciju nazivamo relacijom nestrogog (strogog) *kvaziuređaja* ako je ona refleksivna (odnosno antirefleksivna) i tranzitivna. Umjesto termina kvaziuređaj često upotrebljavamo i druge termine: *preuređaj*, *kvaziuređenost*, *preduređenost*. Kvaziuređaj R na skupu A nazivamo *usmjerenim* (ili *desnousmjerenim*) ako za svaka dva elementa $a, b \in A$ postoji element $c \in A$ tako da je zadovoljen uvjet $aRc \wedge bRc$; kvaziuređaj R na A nazivamo *obrnuto usmjerenim* (ili *lijevo usmjerenim*) ako za svaka dva elementa $a, b \in A$ postoji element $c \in A$, takav da je konjunkcija $cRa \wedge cRb$.

Svaki nestrogi kvaziuređaj R na skupu A inducira relaciju ekvivalencije S na A ovako:

$$aSb \leftrightarrow aRb \wedge bRa,$$

gdje je $a, b \in A$.

Nestrogi (strogi) kvaziuređaj nazivamo *nestrogim* (odnosno *strogim*) *parcijalnim uređajem*, ako je on antisimetrična (odnosno asimetrična) relacija. Umjesto termina *parcijalni uređaj* upotrebljavamo također termine *poluuređaj*, *poluuređenje*, *parcijalno uređenje* (a katkad naprosto *uređaj*, *uređenje*).

Ako je R nestrogi kvaziuređaj na A i S relacija ekvivalencije na A inducirana tim kvaziuređajem, onda je binarna relacija R^* na kvocijentnom prostoru $A|S$ definirana sa

$$[a]_S R^* [b]_S \leftrightarrow aRb,$$

nestrogi parcijalni uređaj na $A|S$.

Ako je R nestrogi (strogi) parcijalni uređaj, tada se umjesto aRb piše $a \leq_R b$ ili $a \leq b$ (odnosno $a <_R b$ ili $a < b$) i kaže se „b je veći (odnosno strogo veći) od a“ ili „a je manji (odnosno strogo manji) od b“. Ako je R nestrogi parcijalni uređaj na A onda je iskazom

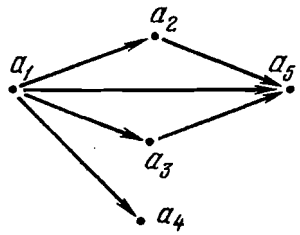
$$a < b \leftrightarrow a \leqslant_R b \wedge a \neq b$$

($a, b \in A$) zadan na A strogi parcijalni uređaj. S druge strane, ako je R strogi parcijalni uređaj na A, onda je formulom

$$a \leqslant b \leftrightarrow a <_R b \vee a = b$$

($a, b \in A$) na A definira jedan nestrogi parcijalni uređaj.

Ponekad je svrsishodno parcijalni uređaj na konačnom skupu predočiti pomoću specijalnih dijagrama koje nazivamo *Hasseovim dijagramima*. Ako je R parcijalni uređaj na A, onda se Hasseov dijagram za relaciju R konstruira ovako: elementi skupa A predočuju se točkama u ravnini i zatim se dva elementa spoje dužinom ili lukom neke krivulje, ako je aRb i $\exists x (x \neq a \wedge x \neq b \wedge aRx \wedge xRb)$. Kako bismo razlikovali aRb od bRa, to u prvom od njih dužinu ili luk koji spaja a i b orijentiramo strelicom od a prema b (ili naprosto nacrtamo točku b više od točke a ili desno od nje).



Sl. 421

Primjer 15. Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ i $R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_5), (a_3, a_5)\}$. Tada je R nestrogi parcijalni uređaj na A. Hasseov dijagram od R prikazan je na slici 421 („veći elementi nacrtani su desno od „manjih“).

Ako je na skupu A zadan parcijalni uređaj R, tada kažemo da je A *parcijalno uređen*. Za element $a \in A$ kažemo da je *neposredni prethodnik* elementa $b \in A$ (i element b nazivamo *neposrednim sljedbenikom* elementa a), ako vrijedi $aRb \wedge \neg \exists x (x \neq a \wedge x \neq b \wedge aRx \wedge xRb)$. Dva elementa a i b parcijalno uređenog skupa A relacijom R nazivamo *usporedivim*, ako je $aRb \vee bRa$; u protivnom kažemo da su a i b *neusporedivi*.

Neka je A parcijalno uređen relacijom R. Element $a \in A$ nazivamo *minimalnim* (*maksimalnim*) *elementom* skupa A, ako u A ne postoji element x različit od a koji zadovoljava uvjet xRa (odnosno aRx).

Neka je B podskup skupa A koji je parcijalno uređen relacijom R. *Gornjom međom* ili *majorantom* (odnosno *donjom međom* ili *minorantom*) podskupa B u skupu A nazivamo svaki element $x \in A$ koji zadovoljava uvjet $\forall y (y \in B \rightarrow yRx \vee y = x)$ (odnosno $\forall y (y \in B \rightarrow xRy \vee y = x)$). Ako skup B ima bar jednu majorantu (minorantu) u A, onda za skup B kažemo da je *omeđen odozgo* (*odozdo*) u A. Ako sam skup A ima majorantu (minorantu), onda je ona jedinstvena i nazivamo je *najvećim* (*najmanjim*) *elementom* skupa A. Najmanja gornja međa podskupa B, ako ona postoji, nazvana je *točna gornja međa* skupa B i označava se sa $\sup B$ (čita se: „supremum od B“). Analogno najveću donju među podskupa B, ako ona postoji, nazivamo *točnom donjom međom* podskupa B i označavamo sa $\inf B$ (čita se: „infimum od B“).

Element parcijalno uređenog skupa, koji nema neposrednog prethodnika, nazivamo *graničnim elementom*.

Skup A, koji je parcijalno uređen relacijom R, nazivamo *linearno* (savršeno, prosto) *uređenim* (ili *lancem*), ako su u njemu svaka dva elementa usporediva. Relaciju R tada nazivamo *linearnim* (*savršenim*) *uređajem*.

Linearno uređen skup A nazivamo *potpuno uređenim*, ako svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element. Uređen skup A tada nazivamo *potpunim*.

Parcijalni uređaj R na skupu A nazivamo *induktivnim* ili *desnoinduktivnim* (odnosno *lijevoinduktivnim*), ako u odnosu na R svaki lanac skupa A ima supremum (odnosno infimum).

Primjer 16.

1) Svaka relacija ekvivalencije je nestrogi parcijalni uređaj.

2) Neka je M porodica podskupova (nekog skupa) i $R_{\subseteq}$ relacija *inkluzije* na M, tj.

$$R_{\subseteq}=\{(A_1, A_2)\,|\,A_1\in M\wedge A_2\in M\wedge A_1\subseteq A_2\}.$$

Relacija $R_{\subseteq}$ predstavlja nestrogi parcijalni uređaj.

3) Relacija prave inkluzije $R_{\subset}$ na porodicu podskupova od M je strogi parcijalni uređaj.

4) Relacija $\leq$ je linearni (nestrogi) uređaj u skupu $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva i totalni uređaj u skupu $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva.

Zornov slabi princip maksimalnosti. Ako je R induktivni uređaj na skupu A, onda u A postoji maksimalni element u odnosu na relaciju R.

Zornov jaki princip maksimalnosti. Ako je R parcijalni uređaj na skupu A i ako svaki potpuno uređen (s obzirom na R) lanac u A ima gornju među, onda u A postoji maksimalni (s obzirom na R) element.

Oba su ova principa međusobno ekvivalentna, a također su ekvivalentni sa slijedećim dvama principima.

Princip maksimalnih lanaca (Hausdorff-Birkhoff).

1) U svakom parcijalno uređenom skupu postoji lanac koji je maksimalan s obzirom na skupovnu inkluziju $\subseteq$.

2) Svaki je lanac parcijalno uređenog skupa sadržan u nekom maksimalnom (u odnosu na inkluziju $\subseteq$) lancu toga skupa.

13. PRESLIKAVANJA

Preslikavanjem skupa A u skup B (*funkcijom* na A sa vrijednostima u B) nazivamo pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje jedan ili više elemenata skupa B. Za oznaku preslikavanja φ skupa A u skup B upotrebljava se zapis $\varphi\colon A\to B$. Ako je $x\in A$, onda se skup svih

elemenata iz B, koji su pri preslikavanju φ pridruženi elementu x, označava sa $\varphi(x)$ i naziva *slikom elementa* x. *Slikom podskupa* A_1 skupa A pri preslikavanju φ (oznaka: $\varphi(A_1)$) nazivamo uniju slika svih elemenata x iz A_1. Slika čitavog skupa A, tj. $\varphi(A)$ naziva se *područje vrijednosti* preslikavanja φ. Ako je $y\in B$, onda njegovom *potpunom praslikom* pri preslikavanju φ (oznaka $\varphi^{-1}(y)$) nazivamo skup svih onih elemenata iz A koji se pri preslikavanju φ preslikavaju u element y. Svaki element skupa $\varphi^{-1}(y)$ nazivamo *praslikom* elementa y pri preslikavanju φ. Ako preslikavanje $\varphi\colon A\to B$ svakom elementu iz A pridružuje točno jedan element iz B, onda to preslikavanje (funkciju) φ nazivamo *jednoznačnim*. Preslikavanje koje nije jednoznačno nazivamo *višeznačnim*. Ako je $\varphi\colon A\to B$ jednoznačno preslikavanje, onda preslikavanje $\varphi^{-1}\colon B\to A$, koje svakom elementu $y\in B$ pridružuje njegovu prasliku $\varphi^{-1}(y)$, nazivamo *inverznim* preslikavanjem preslikavanja φ. Preslikavanje φ^{-1} je u općem slučaju *djelomično*, tj. ono ne mora biti definirano na čitavom B. Osim toga preslikavanje φ^{-1} može biti i višeznačno.

Preslikavanje $\varphi\colon A\to B$ može se interpretirati kao *relacija između skupova* A i B, tj. interpretirati kao podskup M Kartezijeva produkta $A\times B$, koji nazivamo *grafom* preslikavanja φ, a koji je određen sa:

$$M=\{(x, y)\,|\,\exists y\,(y\in B\wedge\varphi(x)=y)\}.$$

Jednoznačno preslikavanje $\varphi\colon A\to B$ nazivamo

surjektivnim (*surjekcijom*), ako je $\varphi(A)=B$ (preslikavanje „na“);

injektivnim (*injekcijom*), ako su slike različitih elemenata različite (preslikavanje „u“);

bijektivnim (*bijekcijom, obostrano jednoznačnim*), ako je ono surjektivno i injektivno.

Neka su $\varphi_1\colon A\to B$ i $\varphi_2\colon B\to C$ dva preslikavanja. Tada preslikavanje $\varphi\colon A\to C$, koje svakom elementu $x\in A$ pridružuje element $\varphi_2(\varphi_1(x))\in C$, nazivamo *kompozicijom*, (*produktom*, *superpozicijom*) preslikavanja φ_1 i φ_2 i označavamo ga sa $\varphi_1\circ\varphi_2$*).

Sa id_A označimo *istovjetno* preslikavanje skupa A na sama sebe, tj. preslikavanje koje svakom elementu iz A pridružuje sam taj element.

Preslikavanje $\varphi\colon A\to B$ je bijekcija onda i samo onda kada postoji preslikavanje $\psi\colon B\to A$, koje zadovoljava uvjete

$$\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_A\ \text{ i }\ \psi\circ\varphi=\mathrm{id}_B.$$

Preslikavanje $\varphi\colon A\to B$ je injekcija onda i samo onda kada postoji preslikavanje $\psi\colon \varphi(A)\to A$, koje zadovoljava uvjet: $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_A$.

---

* U našoj se literaturi ta kompozicija označava sa $\varphi_2\circ\varphi_1$.

Preslikavanje φ: $A \to B$ je surjekcija onda i samo onda, kada postoji preslikavanje ψ: $B \to A$, koje zadovoljava uvjet $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_B$.

14. NIZOVI I PORODICE SKUPOVA

Konačni i beskonačni nizovi mogu se interpretirati kao funkcije (preslikavanja): konačni niz koji ima m elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jest funkcija φ: $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ takva da je $\varphi(i) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; beskonačni niz $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ jest funkcija φ: $\mathbf{N} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots\}$ takva da je $\varphi(i) = a_i$ za svaki $i \in \mathbf{N}$ (tu je $\mathbf{N}$ skup prirodnih brojeva).

Porodica skupova se također može interpretirati primjenom pojma funkcije. Neka je J skup indeksa. Tada funkcija φ: $J \to M$, kojoj su vrijednosti skupovi, jest porodica skupova. Ako je φ porodica podskupova nekog skupa i ako za svaki $j \in J$ vrijedi: $\varphi(j) = A_j$, onda tu porodicu označavamo ovako $(A_j)_{j \in J}$.

Neka je $(A_j)_{j \in J}$ porodica skupova. Funkcija φ: $J \to \bigcup_j A_j$, koja je $\forall_j (j \in J \to \varphi(j) \in A_j)$, nazivamo *funkcijom izbora* za porodicu $(A_j)_{j \in J}$.

Skup svih funkcija izbora za porodicu skupova $(A_j)_{j \in J}$ jest *Kartezijev produkt* porodice $(A_j)_{j \in J}$:

$$\underset{j \in J}{\mathsf{X}} A_j = \{\varphi \mid \varphi \text{ — funkcija izbora za } (A_j)_{j \in J}\}.$$

Naravno da ako je $A_j = \varnothing$ za neki $j \in J$, onda je $\underset{j \in J}{\mathsf{X}} A_j = \varnothing$. Obrat ove tvrdnje je slijedeći

Aksiom izbora. Za svaku nepraznu porodicu nepraznih skupova postoji funkcija izbora.

Taj je princip ekvivalentan Zornovom principu maksimalnosti (Zornovoj lemi).

15. OPERACIJE I ALGEBRE

n-arna operacija ω na skupu M (za $n > 0$) jest jednoznačna funkcija sa skupa M^n u skup M; pri tome se, općenito govoreći, ne pretpostavlja da je funkcija ω definirana za svaki element skupa M^n. Ako operacija nije definirana na čitavom M^n, onda je nazivamo *n-arnom parcijalnom operacijom.* Pod *nul-arnom* operacijom na M razumijevamo izdvajanje elementa iz M. Ako su $a_1, \ldots, a_n$ elementi iz M, onda se rezultat primjene ω na te elemente, tj. $\omega(a_1, \ldots, a_n)$, često zapisuje u obliku: $\omega a_1 \ldots a_n$; za $n = 2$ također se upotrebljava zapis $a_1 \omega a_2$.

Primjer 17.

1) Zbrajanje realnih brojeva je binarna (2-arna) operacija na skupu $\mathbf{R}$ realnih brojeva.

2) Dijeljenje realnih brojeva je parcijalna binarna operacja na $\mathbf{R}$.

3) Izdvajanje proizvoljnog elementa iz $\mathbf{R}$ (na primjer 1) je nul-arna operacija u $\mathbf{R}$.

Univerzalnom algebrom (ili kraće, *algebrom*) nazivamo par $\langle M; \Omega \rangle$, gdje je M neki neprazan skup (elemenata) i Ω neki neprazan skup operacija koje su definirane na M. Skup M nazivamo *nosiocem* ili *osnovnim skupom* algebre. Ako je neka od operacija iz skupa Ω parcijalna, onda algebru nazivamo *parcijalnom* (*djelomičnom*). Vrlo često se umjesto „algebra $\langle M; \Omega \rangle$" koristi naziv „algebra M".

Polugrupom nazivamo algebru $\langle M; \top \rangle$ s jednom binarnom operacijom $\top$, koja zadovoljava *zakon asocijacije*:

za bilo koje elemente a, b, c iz M vrijedi

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c).$$

Za operaciju $\top$, koja zadovoljava zakon asocijacije kaže se da je *asocijativna. Grupom* nazivamo polugrupu, koja zadovoljava slijedeće uvjete:

a) u M postoji takav element e (*lijeva jedinica*) da za svaki element $a \in M$ vrijedi jednakost $e \top a = a$;

b) za svaki element $a \in M$ postoji takav element b (koji nazivamo *lijevim inverzom* os a), da je $b \top a = e$.

Grupu $\langle M, \top \rangle$ nazivamo *Abelovom* ako je operacija $\top$ *komutativna*, tj. za sve $a, b \in M$ vrijedi jednakost $a \top b = b \top a$.

Prstenom nazivamo algebru $\langle M; \top, \bot \rangle$ s dvije binarne operacije $\top$ i $\bot$ koje zadovoljavaju slijedeće uvjete:

a) u odnosu na operciju $\top$ skup M je Abelova grupa,

b) vrijede zakoni *distribucije*:

$$a \bot (b \top c) = (a \bot b) \top (a \bot c), \quad (b \top c) \bot a = (b \bot a) \top (c \bot a)$$

za sve a, b, c iz M.

Operaciju $\top$ često nazivamo *zbrajanjem*, a $\bot$ *množenjem. Nul-elementom* (*nulom*) prstena nazivamo takav element a, za koji vrijedi $a \bot b = b$ i $b \bot a = b$ za svaki $b \in M$. Nula u prstenu je jedinstvena.

Prsten nazivamo *asocijativnim*, ako je operacija $\bot$ asocijativna. Ako je operacija $\bot$ asocijativna i komutativna, onda prsten nazivamo *asocijativno-komutativnim.*

Ako u prstenu svi elementi različiti od nule tvore grupu u odnosu na operaciju $\perp$, onda prsten nazivamo *tijelom*. Ako je osim toga operacija $\perp$ još i komutativna, onda tijelo nazivamo *poljem*.

E. POTENTNOST SKUPA

16. EKVIPOTENTNOST

Za dva skupa A i B kažemo da su *ekvipotentni* (oznaka: $A \sim B$), ako postoji bar jedna bijekcija φ: $A \to B$. *Relacija ekvipotentnosti*, na bilo kojoj kolekciji skupova, je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ona je relacija ekvivalencije.

Skup A nazivamo *konačnim*, ako postoji prirodni broj n takav, da je $A \sim \{k \mid k \in \mathbf{N} \wedge k \leqslant n\}$, gdje je $\mathbf{N}$ skup prirodnih brojeva; pri tome kažemo da skup A ima n elemenata.

Skup koji nije konačan nazivamo *beskonačnim*.

Svaki neprazan podskup konačnog skupa je konačan. Skup svih podskupova konačnog skupa je konačan.

Svaki skup koji sadrži beskonačan podskup je beskonačan. Skup svih podskupova beskonačnog skupa je beskonačan.

Skup $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva je beskonačan; prema tome su beskonačni i skupovi $\mathbf{Z}$ (skup cijelih brojeva), $\mathbf{Q}$ (skup racionalnih brojeva), $\mathbf{R}$ (skup realnih brojeva), $\mathbf{C}$ (skup kompleksnih brojeva).

Svaki beskonačan skup ima pravi podskup kojemu je on ekvipotentan; i obrnuto, ako je skup ekvipotentan sa svojim pravim podskupom, onda je on beskonačan.

Nijedan skup nije ekvipotentan skupu svih svojih podskupova.

17. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

Za skup A kažemo da je *prebrojiv*, ako je on konačan ili ekvipotentan skupu $\mathbf{N}$. Za skup A kažemo da je *prebrojivo beskonačan* ako je $A \sim \mathbf{N}$. Vrlo često *prebrojive* skupove nazivamo *prebrojivo beskonačnim* skupovima.

Za skup koji nije prebrojiv kažemo da je *neprebrojiv*.

Svaki neprebrojiv skup je beskonačan; svaki beskonačan skup sadrži prebrojivo beskonačan podskup. Svaki neprazan podskup prebrojivog skupa je prebrojiv. Unija i neprazan presjek prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Skupovi $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Q}$ su prebrojivo beskonačni.

Skupovi $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$ su neprebrojivi.

IV. VARIJACIJSKI RAČUN I OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Varijacijski račun je matematička disciplina koja se bavi određivanjem ekstremalnih (najvećih ili najmanjih) vrijednosti funkcionala. Pod *funkcionalom* razumijevamo preslikavanje sa nekih klasa funkcija u skup realnih brojeva. Funkcional pridružuje svakoj funkciji iz promatrane klase neki realni broj. Ako se klasa funkcija podudara s konstantnim funkcijama, onda je tako dobiveni funkcional naprosto realna funkcija. Drugi primjer funkcionala je integral

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t,$$

gdje je $x(t)$ neprekinuta realna funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Varijacijski račun je prirodni razvitak onog dijela matematičke analize koji se bavi određivanjem ekstrema funkcija. Postanak i razvoj varijacijskog računa je u uskoj vezi sa zadacima mehanike, fizike itd. U XX stoljeću pojavio se niz novih smjerova u varijacijskom računu koji su povezani s intenzivnim razvojem tehnike, graničnih područja matematike i numeričke tehnike. Jedan od osnovnih smjerova razvoja varijacijskog računa u drugoj polovini XX stoljeća su razmatranja neklasičnih zadaća varijacijskog računa. Ovaj smjer je nazvan optimalno upravljanje. U osnovama rješavanja zadaća optimalnog upravljanja je opća matematička metoda nazvana *princip maksimuma L. S. Pontrjagina*. Valja napomenuti da svi osnovni nužni uvjeti klasičnoga varijacijskog računa s običnim derivacijama slijede iz principa maksimuma Pontrjagina.

A. VARIJACIJSKI RAČUN

1. FORMULIRANJE ZADAĆE, PRIMJERI I OSNOVNI POJMOVI

Primjer 1. Bitni impuls razvoju varijacijskog računa dala je slijedeća zadaća, koju je 1696. godine postavio Johann Bernoulli. Ta se zadaća (problem) obično naziva zadaća o *brahistokroni*.

Dvije točke P_0 i P_1, koje se nalaze na različitim visinama, treba spojiti krivuljom tako da vrijeme padanja tijela duž te krivulje iz P_0 u P_1 bude minimalno, uz uvjete da na tijelo djeluje samo sila teže i da

se gibanje odvija bez trenja. Za rješavanje te zadaće koristi se Kartezijev koordinatni sustav kojemu je ishodište u točki P_0, a os y je usmjerena prema nižoj točki P_1. Ako je tijelo u početnom času gibanja mirovalo u točki P_0, onda iz zakona očuvanja energije slijedi da je

$$mgy=\frac{mv^2}{2}.$$

Brzina je $v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$, a samim tim se vrijeme padanja t (uzevši da je $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$) izražava integralom

$$t=\int_{P_0}^{P_1}\frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

Treba naći funkciju $y(x)$ koja minimizira navedeni integral, a čiji graf spaja obje točke $P_0(0, 0)$ i $P_1(x_1, y_1)$, tj. vrijedi $y(0)=0$ i $y(x_1)=y_1$.

Primjer 2. Treba naći najkraću krivulju koja spaja točke $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$ u ravnini x, y, tj. naći funkciju $y(x)$ za koju integral

$$I=\int_{P_0}^{P_1}ds=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

poprima najmanju vrijednost; pri tome funkcija $y(x)$ mora zadovoljavati uvjete $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

U oba primjera traže se funkcije $y(x)$ koje minimiziraju funkcional oblika

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}f(x, y, y')\,dx;$$

pri čemu se još zadaju granični (rubni) uvjeti $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. To je tzv. *prosta zadaća varijacijskog računa.* Skup svih funkcija koje zadovoljavaju zadane granične uvjete označavat ćemo sa $D(I)$.

Od svih klasa funkcija za koje se traži ekstrem ovdje ćemo razmotriti samo klasu neprekinutih i klasu neprekinuto diferencijabilnih funkcija na segmentu $[a, b]$, koje ćemo pripadno označavati sa C_0 i C_1. Valja primijetiti da je veoma bitno u kakvoj se klasi funkcijâ traži ekstrem, jer ekstrem u jednoj klasi funkcija može postojati, a u drugoj ne mora.

Analogon udaljenosti između dviju funkcija u svakoj od promatranih klasa je pojam norme koja se u tim klasama definira na slijedeći način:

$$\text{u } C_0 \quad \|y\|=\max_{a\le x\le b}|y(x)|,$$

$$\text{u } C_1 \quad \|y\|=\max_{a\le x\le b}|y(x)|+\max_{a\le x\le b}|y'(x)|.$$

Pod ε-okolinom $U_\varepsilon(y^1)$ funkcija y^1 razumijevamo skup

$$U_\varepsilon(y^1)=\{y\,|\,y\in C_i,\ \|y-y^1\|_{C_i}<\varepsilon\},\quad i=0, 1.$$

Ako za funkciju $y^0\in D(I)$ postoji okolina $U_\varepsilon(y^0)$ takva da vrijedi

$$I(y^0)\le I(y)\quad\text{ili}\quad I(y^0)\ge I(y)\quad\forall y\in U_\varepsilon(y^0)\cap D(I),$$

onda $I(y^0)$ nazivamo (lokalnim) minimumom ili maksimumom. Elemente iz $U_\varepsilon(y^0)\cap D(I)$ nazivamo *funkcijama usporedbe.*

Pojam ekstrema funkcionala moramo utočniti. Govoreći o maksimumu ili minimumu, točnije, o relativnom maksimumu ili minimumu, imali smo u vidu najveće ili najmanje značenje funkcionala samo u odnosu na vrijednosti funkcionala na bliskim krivuljama. Međutim, bliskost krivulja može se shvaćati na različite načine, kao što se to vidi iz definicije norme. Stoga u definiciji maksimuma ili minimuma treba ukazati na kakvu se bliskost misli (u smislu klase C_0 ili klase C_1). Ako funkcional $I[y(x)]$ postiže na krivulji $y=y_0$ svoj maksimum ili minimum u odnosu na sve krivulje za koje je modul razlike $y(x)-y_0(x)$ malen, tj. s obzirom na krivulje koje su bliske krivulji $y=y_0(x)$ u smislu norme prostora C_0, onda taj maksimum ili minimum nazivamo *jakim.* Ako funkcional $I[y(x)]$ postiže maksimum ili minimum samo u odnosu na krivulje $y=y(x)$ koje su bliske krivulji $y=y_0(x)$ u smislu norme klase C_1, tj. u odnosu na krivulje bliske k $y=y_0(x)$ ne samo po ordinatama već i po smjeru tangenata, onda taj maksimum ili minimum nazivamo *slabim.*

Analogno, kao i za realne funkcije, realne varijable $I(y^0)$ nazivamo najmanjom (*apsolutnim minimumom*) ili najvećom (*apsolutnim maksimumom*) vrijednošću, ako je

$$I(y^0)\leqslant I(y)\quad\text{ili}\quad I(y^0)\geqslant I(y)\quad\forall y\in D(I).$$

Iz definicije norme u prostorima C_0 i C_1 odmah slijedi da je jaki ekstrem ujedno i slabi, ali obrnuto ne vrijedi.

Osnovni pojam koji se proučava u varijacijskom računu je pojam 1. i 2. varijacije funkcionala.

Uvedimo oznaku $F(\varepsilon)=I(y^0+\varepsilon h)$ i promotrimo prvu i drugu derivaciju funkcije $F(\varepsilon)$ po parametru ε za $\varepsilon\to 0$. Ovdje je h bilo koja funkcija promatrane klase takva da je $y^0+\varepsilon h\in D(I)$.

Veličine $F'(0)$ i $F''(0)$ nazivamo prvom i drugom varijacijom funkcionala $I(y)$ i označavamo ih sa $\delta I(y^0, h)$ i $\delta^2 I(y^0, h)$.

Uvjetima $\delta I(y^0, h)=0$ i $\delta^2 I(y^0, h)\geqslant 0$ ili $\delta^2 I(y^0, h)\leqslant 0$ poslužit ćemo se u slijedećem paragrafu pri formulaciji nužnih uvjeta ekstrema funkcionala $I(y)$.

2. EULER-LAGRANGEOVA TEORIJA

Lagrangeovom zadaćom u varijacijskom računu nazivamo gore opisanu zadaću određivanja ekstrema za

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx. \tag{1}$$

Pri tome se zahtijeva da tražene funkcije $y(x)$ zadovoljavaju rubne (granične) uvjete $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

Ako se posebno ne ističe, onda smatramo da funkcija $y(x)$ ima neprekinutu derivaciju $y'(x)$.

Nužni uvjeti ekstrema. Euler-Lagrangeova diferencijalna jednadžba. Ako funkcija $y^0(x)$ predstavlja slabi (lokalni) ekstrem funkcionala $I(y)$, onda ona mora biti rješenje *Euler-Lagrangeove diferencijalne jednadžbe*

$$f_y'-\frac{d}{dx}f_{y'}'=0 \tag{2}$$

ili u drugom obliku

$$f_y'-f_{y'x}''-f_{y'y}''y'-f_{y'y'}''y''=0$$

(pretpostavlja se da je f dva puta neprekinuto diferencijabilna funkcija). Kako je jaki (lokalni) ekstrem ujedno i slabi (lokalni) ekstrem, to Euler-Lagrangeova diferencijalna jednadžba predstavlja i nužan uvjet za jaki (lokalni) ekstrem.

Euler-Langrangeova diferencijalna jednadžba je jednadžba drugog reda. Rješenja te jednadžbe nazivamo *ekstremalama*. Tu se pojavljuju dvije integracijske konstante koje su određene rubnim uvjetima $y(x_0)=y_0$ i $y(x_1)=y_1$, pa se tu dakle radi o rješavanju zadaće s rubnim uvjetima.

Neka je $y^0(x)$ rješenje zadaće (1), tj. pretpostavlja se da ekstrem postoji. Za krivulje usporedbe

$$y_\varepsilon(x)=y^0(x)+\varepsilon h(x),\quad h(x_0)=h(x_1)=0$$

(ε je mali parametar) imamo

$$I(y_\varepsilon)=F(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y^0(x)+\varepsilon h(x), y^{0\prime}(x)+\varepsilon h'(x))\,dx.$$

Prema tome, funkcional $F(\varepsilon)$ je funkcija samo parametra ε. Prema pretpostavci da je $y^0(x)$ rješenje, mora vrijediti

$$\delta I\equiv F'(0)=0), \tag{3}$$

Izračunajmo $F'(\varepsilon)$:

$$F'(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{df}{d\varepsilon}\,dx=\int_{x_0}^{x_1}(f_y'h(x)+f_{y'}'h'(x))\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[f_y'h(x)-\frac{d}{dx}(f_{y'}')\,h(x)\right]dx+h(x)f_{y'}'\Big|_{x_0}^{x_1}=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}h(x)\left(f_y'-\frac{d}{dx}(f_{y'}')\right)dx.$$

Iz $F'(0)=0$ prema osnovnoj lemi varijacijskog računa* slijedi Euler-Lagrangeova jednadžba.

Iz kratkog opisa dokaza vidi se da je pretpostavljeno postojanje rješenja y^0 zadane varijacijske zadaće. Dok u teoriji ekstremalnih zadaća za neprekinute funkcije (koje su definirane na zatvorenom skupu) Weierstrassov teorem osigurava postojanje rješenja, dotle se u varijacijskom računu pojavljuje poteškoća koja se sastoji u tome da korektno formulirane zadaće ponekad nemaju rješenja. Iz tog je razloga postojanje rješenja u varijacijskom računu uvijek nužno dokazivati.

Do sada smo zahtijevali da funkcije $y(x)$ svakako budu neprekinuto diferencijabilne. Taj se zahtjev može oslabiti. Tako na primjer varijacijska zadaća s podintegralnom funkcijom $f(x, y, y')$ ima smisla već i tada kada se zahtijeva po dijelovima neprekinutost prve derivacije $y(x)$. Preostaje da se odgovori na pitanje, ima li funkcija sama po sebi derivacije viših redova i zadovoljava li Euler-Lagrangeovu jednadžbu.

* Ta lema glasi, ako je $g(x)$ neprekinuta i $\int_{x_0}^{x_1} h(x)\,g(x)\,dx=0$ za neprekinutu funkciju $h(x)$, koja ima neprekinutu derivaciju takvu da je $h(x_0)=h(x_1)=0$, onda je i $g(x)=0$ na $[x_0, x_1]$.

Du Bois-Reymondova lema. Ako iščezavanje prve varijacije funkcije $y(x)$ neprekinute s neprekinutom prvom derivacijom povlači postojanje i neprekinutost druge derivacije, te ako je $f(x, y, y')$ dva puta neprekinuto diferencijabilna i ako vrijedi da je $f''_{y'y'} \neq 0$ (*Legendreov uvjet*), tada $y(x)$ zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu.

Primjer 3. Treba naći ekstrem od $I(y)=\int_0^1 (y^2+y'^2+2ye^x)\,dx$ uz uvjet $y(0)=0$, $y(1)=e$. Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:

$$2(y+e^x)-\frac{d}{dx}(2y')=0, \quad \text{ili} \quad y''-y=e^x.$$

Njezino rješenje je:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{xe^x}{2}.$$

Uz navedene granične uvjete dobivamo:

$$y(x)=\frac{e^2}{2(e^2-1)}(e^x-e^{-x})+\frac{xe^x}{2}.$$

Specijalni slučajevi zadaće (1).

(a) Ako je $f\equiv f(x, y')$, tj. $f'_y=0$, onda Euler-Lagrangeova jednadžba ima oblik

$$\frac{d}{dx}(f'_{y'})=0,$$

tako da je $f'_{y'}=\text{const}$. prvi integral te jednadžbe.

Primjer 4. Treba naći ekstrem:

$$I(y)=\int_{-1}^{1}(x^2+y'^2)\,dx, \quad y(-1)=-1, \quad y(1)=1.$$

Iz $f'_{y'}=\text{const}$ dobivamo $y'=C_1$, i prema tome, $y(x)=C_1x+C_2$. Primjena rubnih uvjeta daje $y(x)=x$.

(b) Ako je $f\equiv(y, y')$, tada je $f'_x=0$ i $\frac{df}{dx}=f'_x+f'_yy'+f'_{y'}y''=f'_yy'+f'_{y'}y''$. Iz Euler-Lagrangeove jednadžbe slijedi:

$$\frac{df}{dx}=y'\frac{df'_{y'}}{dx}+y''f'_{y'}=\frac{d}{dx}(y'f'_{y'}),$$

pa je $\frac{d}{dx}(f-y'f'_{y'})=0$. Prema tome $f-y'f'_{y'}=\text{const}$. je prvi integral.

Primjer 5. **Zadaća o brahistohroni.** Treba naći ekstrem (vidi primjer 1) od

$$I(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1.$$

Iz $f-y'f'_{y'}=\text{const}=C_1$ slijedi:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-y'\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)\,y}}=C_1,$$

i samim tim

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{C_1^2}=2K_1.$$

Supstitucija $y'(x)=\operatorname{ctg}\frac{v(x)}{2}$ daje:

$$y=2K_1\sin^2\frac{v}{2}=K_1(1-\cos v),$$

$$y'=2K_1v'\cos\frac{v}{2}\sin\frac{v}{2}=\operatorname{ctg}\frac{v}{2},$$

tj. $\frac{dx}{K_1}=dv\cdot 2\sin^2\frac{v}{2}$ tako da dobivamo ove parametarske jednadžbe ekstremale:

$$x=K_1(v-\sin v)+K_2, \quad y=K_1(1-\cos v).$$

To su parametarske jednadžbe cikloide. Konstante se određuju iz graničnih uvjeta.

(c) Ako je $f\equiv f(x, y)+a(x)\,y'$, onda je Euler-Lagrangeova jednadžba jednostavnija i ima oblik:

$$f'_y=a'(x) \quad \text{(trivijalni slučaj).}$$

(d) Ako je $f\equiv f(y')$, onda je $f'_{y'}=\text{const}$, pa imamo $y'(x)=\text{const}=C_1$, tj. ekstremale su pravci:

$$y(x)=C_1x+C_2.$$

Treba uočiti da ekstremale ne realiziraju svaki puta (lokalni) minimum ili maksimum funkcionala i to zato jer Euler-Lagrangeova jednadžba daje samo nužni uvjet ekstrema.

Nužni uvjeti ekstrema, koje ćemo sada navesti, dozvoljavaju da se u nekim slučajevima isključe takve ekstremale koje ne daju ekstrem funkcionala.

Legendreov uvjet. Primjenom druge derivacije $\delta^2 I = F''(0)$, dobivamo *Legendreov uvjet ekstrema*: da $y(x)$ daje slabi (lokalni) minimum (maksimum) funkcionala $I(y)$, nužno je da za $\forall x \in [x_0, x_1]$ vrijedi:

$$f'_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geqslant 0 \qquad (f'_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \leqslant 0). \tag{4}$$

Primjer 6. Treba naći minimum funkcionala:

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - 13\sqrt{1+y'^2})\,dx, \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=1.$$

Kako podintegralna funkcija zavisi samo od y', ekstremale su pravci. Rubni uvjeti daju $y(x)=x$. Legendreov uvjet glasi: $f''_{y'y'} = 2-13(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} \geqslant 0$. Za ekstremalu $y(x)=x$ ovaj uvjet nije ispunjen, pa prema tome slabi lokalni minimum ne postoji.

Jacobijev uvjet. Neka je Legendreov uvjet za $y(x)$ strogo ispunjen, tj. $f''_{y'y'}(x, y, y') > 0$. Ako pri tome funkcional $I(y)$ ima za $y(x)$ slabi minimum, onda za točku x_k, *konjugiranu* točki x_0, mora vrijediti $x_k \geqslant x_1$. Pri tome se konjugirana točka x_k definira na slijedeći način: neka je $u(x)$ rješenje *Jacobijeve diferencijalne jednadžbe*:

$$\frac{d}{dx}(f''_{y'y'}, u') - u\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{yy'}\right) = 0, \qquad u(x_0) = 0. \tag{5}$$

Ako $u(x)$ ima desno od x_0 nekoliko korijena, onda se za x_k uzme najmanji od njih. Ako se $u(x)$ ne poništava desno od x_0, onda ćemo staviti $x_k = \infty$.

Primjer 7. Treba naći minimum funkcionala:

$$I(y) = \int_0^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx, \qquad y(0)=y_0, \qquad y_1(x_1)=y_1.$$

Euler-Lagrangeova jednadžba $y'' + 16y = 0$ ima rješenje

$$y(x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x.$$

Legendreov uvjet je ispunjen u svojem strogom obliku:

$$f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) = 2 > 0.$$

Jacobijeva jednadžba (5) ima oblik:

$$u'' + 16u = 0, \qquad u(0) = 0,$$

a njeno rješenje je $u(x) = C_1 \sin 4x$, i stoga za konjugiranu točku dobivamo $x_k = \frac{\pi}{4}$, tj. Jacobijev uvjet je za $x_1 \leqslant \frac{\pi}{4}$ ispunjen.

Usporedo s nužnim uvjetima za slabi lokalni ekstrem postoje također i nužni uvjeti za jaki lokalni ekstrem. Kao što je prije rečeno, nužni uvjeti za slabi lokalni ekstrem pretpostavljaju ujedno nužne uvjete za jaki ekstrem, ali obrnuto ne slijedi.

Weierstrassov uvjet. Za postojanje jakog minimuma funkcionala $I(y)$ nužno je da *Weierstrassova E-funkcija*

$$E(x, y, y', k) = f(x, y, k) - f(x, y, y') - (k-y')f'_{y'}(x, y, y') \tag{6}$$

u svim točkama ekstremale $y(x)$ za svaki k zadovoljava uvjet:

$$E(x, y, y', k) \geqslant 0. \tag{7}$$

Primjer 8. Treba naći minimum funkcionala

$$I(y) = \int_0^1 y'^3\,dx, \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=1.$$

Rješenje Euler-Lagrangeove jednadžbe daje ekstremalu

$$y(x) = x.$$

Legendreov uvjet je ispunjen:

$$f''_{y'y'} = 6y' = 6 > 0.$$

Rješenje Jacobijeve difrencijalne jednadžbe

$$6u'' = 0, \qquad u(0) = 0$$

ima oblik $u(x) = cx$, tako da za konjugiranu točku vrijedi $x_k = \infty$, tj. taj nužan uvjet je ispunjen na ekstremalama.

Za Weierstrassovu E-funkciju dobivamo:

$$E(x, y, y', k) = k^3 - 1 - 3(k-1) = k(k^2-3) + 2.$$

Očito da ta funkcija nije pozitivna ili jednaka nuli za sve k, jer funkcional može za $y(x)=x$ najviše imati samo slabi lokalni minimum.

Weierstrass-Erdmanov uvjet. Može se dogoditi da promatrani funkcional $I(y)$ u odnosu na klasu neprekinuto diferencijabilnih funkcija nema ekstrem.

Primjer 9. Treba naći minimum funkcionala

$$I(y)=\int_0^2 y^2(1-y')^2\,dx, \qquad y(0)=0, \qquad y(2)=1.$$

Kako podintegralni izraz ne zavisi o x, to je

$$y^2(1-y')^2+2y'y^2(1-y')=\text{const}=C_1,$$

prvi integral Euler-Lagrangeove jednadžbe. Odavde slijedi:

$$y'^2=1-\frac{C_1}{y^2} \qquad \text{ili} \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-C_1}}=dx.$$

Stoga ekstremale imaju oblik

$$y^2-(x+C_2)^2=C_1.$$

Primjena rubnih uvjeta daje

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2=\frac{9}{16}.$$

Krajnje točke, međutim, leže na različitim granama ove hiperbole tako da nema neprekinuto diferencijabilne ekstremale koje povezuju obje točke. Budući da je podintegralna funkcija potpuni kvadrat, vrijednost funkcionala ne može biti manja od nule. Jasno je da se ta donja međa dostiže na funkciji

$$y(x)=\begin{cases}0 & \text{za } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1 & \text{za } 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

koja, iako je i neprekinuta na segmentu [0, 2], ipak u točki $x=1$ nije diferencijabilna.

Funkcija $y(x)$ pripada klasi po dijelovima neprekinuto diferencijabilnih funkcija. Točku $(x, y(x))$ po dijelovima neprekinuto difrencijalne funkcije $y(x)$ nazivamo *točkom loma*, ako u točki x lijeva derivacija $p_1=y'(x)$ i desna derivacija $p_2=y'_+(x)$ funkcije y postoje i nisu međusobno jednake.

Odgovor na pitanje, postoje li ekstremale s točkama loma, daju slijedeća dva *Weierstrass-Erdmanova uvjeta.*

Ako je (x, y) točka loma ekstremale, onda jednadžbe

$$f'_{y'}(x, y, p_1)=f'_{y'}(x, y, p_2), \tag{8}$$

$$(f-y'f'_{y'})_{y'=p_1}=(f-y'f'_{y'})_{y'=p_2} \tag{9}$$

moraju imati bar jedno zajedničko rješenje za koje vrijedi $p_1\neq p_2$.

Primjer 10. Za zadatak iz primjera 9 uvjeti za točku loma daju

$$-2y^2(1-p_1)=-2y^2(1-p_2),$$

$$y^2(1-p_1)^2+2y^2p_1(1-p_1)=y^2(1-p_2)^2+2y^2p_2(1-p_2),$$

tj. točke loma se mogu pojaviti samo ako je $y=0$.

Prirodni rubni uvjeti; uvjeti transverzalnosti. Usporedno sa zadavanjem rubnih uvjeta $y(x_0)$ i $y(x_1)$ mogu se susresti slučajevi kada: 1) postoji samo jedan (na primjer, $y(x_0)$) ili uopće ne postoje rubni uvjeti; 2) rubni uvjet zadaje se time, da u točki x_1 (nepoznanice) vrijedi $y(x_1)=\varphi(x_1)$, tj. točka $(x_1, y(x_1))$ mora ležati na zadanoj krivulji.

Izjednačavanje s nulom prve derivacije funkcionala $I(y)$ daje usporedno s Euler-Lagrangeovom jednadžbom uvjete za nedostajuće rubne vrijednosti:

(a) Ako je od prije poznata samo vrijednost funkcije $y(x_0)$ u rubnoj točki x_0, onda se rubni uvjet u točki x_1 određuje iz jednadžbe

$$f'_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))=0 \tag{10}$$

Analogni se izrazi dobiju ako u točki x_0 nije unaprijed zadana vrijednost funkcije. Formulu (10) nazivamo *prirodnim rubnim uvjetom.*

(b) Neka je u točki x_0 zadan rubni uvjet u obliku $y(x_0)=y_0$, tada se kao u točki x_1 (nepoznanice) zahtijeva, da točka $(x_1, y(x_1))$ leži na zadanoj krivulji. U ovom se slučaju dobiva uvjet transverzalnosti

$$f(x_1, y(x_1), y'(x_1))+(\varphi'(x_1)-y'(x_1))f'_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))=0, \tag{11}$$

pomoću kojeg se određuje vrijednost funkcije $y(x_1)$.

Analogna se relacija dobiva ako točka $(x_0, y(x))$ mora ležati na zadanoj krivulji.

Primjer 11. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I(y)=\int_0^1\left(\frac{y'^2}{2}+yy'+y'+y\right)dx \qquad y(0)=\frac{1}{2}.$$

Euler-Lagrangeova jednadžba ima oblik $y''=1$ tako da su ekstremale funkcije

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2.$$

Iz $y(0)=1/2$ slijedi da je $C_2=1/2$. Konstanta C_1 dobije se iz (10):

$$f_{y'}(1, y(1), y'(1))=y'(1)+y(1)+1=1+C_1+0{,}5+C_1+0{,}5+1=2C_1+3=0,$$

tj. $C_1=-3/2$. Dakle, ekstremala je oblika

$$y(x)=\frac{x^2-3x+1}{2}.$$

Primjer 12. Treba odrediti najkraću udaljenost od točke (x_0, y_0) do krivulje $y=f(x)$. Ovaj se zadatak svodi na to da se nađe minimum funkcionala

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=f(x_1),$$

pri čemu je x_1 nepoznanica. Ekstremale ovog funkcionala su prayci

$$y(x)=a(x-x_0)+y_0,$$

jer podintegralni izraz ovisi samo od y'. Točka x_1 određuje se iz *uvjeta transverzalnosti*:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2(x_1)}+f'(x_1)-y'(x_1))\,y'(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}}=0,$$

iz kojeg se dobiva poznati uvjet ortogonalnosti

$$y'(x_1)\cdot f'(x_1)=-1.$$

Hamiltonovo načelo. Varijacijski račun ima fundamentalnu ulogu pri izvođenju osnovnih jednadžbi mehanike i teorijske fizike. Većina tih jednadžbi može se dobiti na osnovu *varijacionog principa* uz pomoć pojma energije. Tako na primjer *Hamiltonovo načelo* u mehanici sistema točaka ima slijedeće značenje.

Prijelaz iz jednog stanja u drugo za zadani interval vremena $[t_0, t_1]$ dobiva se za sisteme takvog tipa na taj način da se prva varijacija funkcionala

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt$$

izjednači s nulom: gibanje sistema realizira se funkcijama koje između svih dopustivih gibanja čine prije spomenuti integral stacionarnim, tj. jednadžba gibanja sistema podudara se s Euler-Lagrangeovom jednadžbom za funkcional I. Pri tome T označava kinetičku energiju, U potencijalnu energiju sistema, a $L=T-U$ *Lagrangeovu funkciju.*

Pažnju ovdje treba obratiti u prvom redu na izjednačavanje prve varijacije funkcionala I s nulom, a ne na pitanje o ekstremima. Zadaće tog oblika također nazivamo varijacijskim zadaćama.

Primjer 13. Neka se materijalna točka giba pod utjecajem sile teže (slobodni pad). Pri tome za kinetičku i potencijalnu energiju vrijedi

$$T=\frac{my'^2}{2} \quad \text{i} \quad U=-mgy$$

(m je masa, a $y(t)$ visina točke u momentu t).

Integral za Lagrangeovu funkciju jest ovakav:

$$I(y)=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt=m\int_{t_0}^{t_2}\left(\frac{y'^2}{2}+gy\right)dt.$$

Prema Hamiltonovu načelu jednadžba gibanja sistema je Euler-Lagrangeova jednadžba za funkcional $I(y)$:

$$mg-m\frac{dy'}{dt}=0, \quad tj. \quad y''=g,$$

na taj načina je:

$$y(t)=C_1+C_2t+\frac{gt^2}{2}.$$

Ovo je *jednadžba gibanja za slobodni pad.*

Iz mehanike poznati Hamiltovono načelo može se prenijeti i na druge fizikalne procese, pa tako varijacijsko načelo predstavlja opću metodu sastavljanja jednadžbi u matematičkoj fizici.

Druge zadaće. Usporedno sa zadaćama za funkcionale oblika

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}f(x, y, y')\,dx$$

postoje i druge zadaće sličnog tipa.

U svojstvu nužnih uvjeta za postojanje ekstrema u literaturi se obično navode Euler-Lagrangeove diferencijalne jednadžbe. Postoje međutim i drugi nužni uvjeti, analogni onima koje smo malo prije naveli.

Zadaće s derivacijama viših redova. Za određivanje ekstrema funkcionala

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

s rubnim uvjetima

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0,\ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1)=y_1, \qquad y'(x_1)=y'_1,\ldots, y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)},$$

Euler-Lagrangeova jednadžba ima oblik:

$$f'_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f'_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f'_{y(n)}=0.$$

Primjer 14. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I(y)=\int_0^1 (y''-y)^2\,\mathrm{d}x.$$

Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:

$$f'_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f'_{y''}=2y-4y''+2y^{(4)}=0,$$

tj.

$$y^{(4)}-2y''+y=0;$$

Njezino rješenje je:

$$y(x)=e^x(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3+C_4x).$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete, dobije se tražena ekstremala.

Zadaća za funkcionale s više varijabli. Za određivanje ekstrema funkcionala

$$I(y_1,\ldots,y_n)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1,\ldots, y_n, y'_1,\ldots, y'_n)\,\mathrm{d}x$$

s rubnim uvjetima

$$y_i(x_0)=y_{i0}, \qquad y_i(x_1)=y_{i1} \qquad (i=1,\ldots,n),$$

Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:

$$f'_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x f'_{y'_i}}=0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Zadaća u parametarskom obliku. Zahtjev da se tražena krivulja nađe u eksplicitnom obliku $y=y(x)$, može zadaću bitno suziti. Najopćenitija razmatranja dobijemo kada ekstremalu tražimo u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Funkcional

$$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

pri tome prima oblik

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t,$$

gdje su sa $\dot{x}$ i $\dot{y}$ označene derivacije od x i y po t; pri tome podintegralni izraz ne sadrži eksplicitno nezavisnu varijablu t, i on je homogena funkcija prvog stupnja s obzirom na $\dot{x}$ i $\dot{y}$.

U općem se slučaju promatra funkcional oblika

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,\mathrm{d}t,$$

pri čemu je podintegralni izraz (integrand) pozitivna homogena funkcija prvog stupnja u odnosu na $\dot{x}$ i $\dot{y}$, tj.

$$f(x, y, k\dot{x}, k\dot{y})=kf(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \qquad \text{za} \qquad k>0.$$

Pri ovoj pretpostavci vrijednost funkcionala zavisi samo o krivulji

$$x=x(t), \qquad y=y(t)$$

i ne zavisi o odabranoj parametrizaciji. Euler-Lagrangeova jednadžba pri tome ima oblik:

$$f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{\dot{x}}=0, \qquad f'_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{\dot{y}}=0.$$

Te jednakosti nisu međusobno nezavisne, jer prema Eulerovu teoremu za homogene funkcije vrijedi:

$$\dot{x}\left(f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{\dot{x}}\right)+\dot{y}\left(f'_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{\dot{y}}\right)=0,$$

pa je stoga dovoljno riješiti samo jednu od navedenih jednadžbi.

Primjer 15. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I=\int_0^1 \frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}}\,\mathrm{d}t, \qquad x(0)=y(0)=0, \qquad x(1)=y(1)=1.$$

Euler-Lagrangeove jednadžbe glase:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}=0, \qquad \frac{2y\dot{y}^2}{\dot{x}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2y^2\dot{y}}{\dot{x}}=0.$$

Za određivanje ekstremale dovoljno je riješiti samo jednu od tih jednadžbi. Najjednostavnije je riješiti prvu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}=0, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}=y^2y'^2=(yy')^2=\text{const},$$

i na taj način dobijemo:

$$\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2.$$

Pomoću navedenih rubnih uvjeta konačno dobivamo $y^2=x$.

Zadaće s dodatnim uvjetima u obliku jednadžbi. Pri određivanju ekstrema funkcionala

$$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1,\ldots, y_n, y_1',\ldots, y_n')\,\mathrm{d}x$$

s rubnim uvjetima

$$y_i(x_0)=y_{i0}, \qquad y_i(x_1)=y_{i1}$$

i dodatnim uvjetima

(a) $g_j(x, y_1,\ldots, y_n)=0 \qquad (j=1,\ldots, m<n),$

ili (*izoperimetrijski problem*)

(b) $\int_{x_0}^{x_1} g_j(x, y_1,\ldots, y_n, y_1',\ldots, y_n')\,\mathrm{d}x=0 \qquad (j=1,\ldots, m<n),$

ili

(c) $g_j(x, y_1,\ldots, y_n, y_1',\ldots, y_n')=0 \qquad (j=1,\ldots, m<n)$

Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:

$$L'_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L'_{y_j'}=0 \qquad (j=1,\ldots, n),$$

pri čemu tzv. *Lagrangeova funkcija* L za različite dodatne uvjete ima slijedeći oblik ($y=(y_1,\ldots, y_n)$):

(a) $L(x, y, y', \lambda)=f(x, y, y')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\,g_j(x, y);$

(b) $L(x, y, y', \lambda)=f(x, y, y')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,g_j(x, y, y');$

(c) $L(x, y, y', \lambda)=f(x, y, y')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\,g_j(x, y, y').$

Pri tome ekstremale $y_j(x)$ i konstante λ_j ili funkcije $\lambda_j(x)$ (*Langrangeovi multiplikatori*) moraju biti određeni tako da budu zadovoljeni dodatni uvjeti (a), (b), (c) i Eulerove jednadžbe.

Formule za Lagrangeove funkcije pokazuju da se tu radi o poopćenju metode Lagrangeovih multiplikatora.

Dovoljni uvjeti za ekstrem. Kod funkcija jedne varijable uvjeti $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$) dovoljni su za postojanje minimuma (maksimuma) funkcije $f(x)$ u točki x_0. Analogni uvjeti za drugu varijaciju δ^2I (tj. $\delta^2I>0$ ili <0) ne postoje. Da se dođe do dovoljnih uvjeta, neophodna su dodatna razmatranja i uvođenje pojma polja ekstremala. Razmotrit ćemo u daljnjem dovoljne uvjete za slabi i jaki ekstrem samo za Lagrangeovu zadaću određivanja ekstrema od funkcije

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \qquad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$$

Reći ćemo da se ekstremala $y=y(x)$ može uložiti u polje ekstremala ako postoji porodica ekstremala $y=y(x, C)$ (C je parametar) tako da:

— pokriva određeno područje D ravnine x, y tako da pri tome svakom točkom od D prolazi samo jedna krivulja porodice;

— za zadani $C=C_0$ postoji ekstremala $y(x)$ i pri tome $y=y(x)$ ne leži na rubu područja D.

Polje ekstremala nazivamo *centralnim*, ako postoji točka $(x_0, y_0)\notin D$ (centar porodice ekstremala) iz koje izlaze sve krivulje promatrane porodice. Koeficijent smjera ekstremale u točki (x, y) nazivamo *gradijentom* polja u točki (x, y) i označavamo sa $p(x, y)$. Funkcija $p(x, y)$ nazvana je *gradijentna funkcija.*

Dovoljan uvjet za ulaganje ekstremale u polje ekstremale (s centrom (x_0, y_0)) je Jacobijev uvjet $x_k>x_1$.

Pri primjeni Weierstrassove E-funkcije definirane sa

$$E(x, y, p, y')=f(x, y, y')-f(x, y, p)-(y'-p)f'_y(x, y, p)$$

(gdje je $p=p(x, y)$ gradijentna funkcija), dobivaju se slijedeći dovoljni uvjeti za ekstrem:

(a) funkcija $y(x)$ je slabi (lokalni) ekstrem funkcionala $I(y)$, ako:

(a1) je $y(x)$ ekstremala, tj. zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu i rubne uvjete $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$;

(a2) se $y(x)$ može uključiti u polje ekstremala;

(a3) se predznak funkcije $E(x, y, p, y')$ ne mijenja u onim točkama (x, y) koje su dovoljno blizu ekstremale $y(x)$ i za sve y' koji su blizu $p(x, y(x))$. Funkcija y minimizira za $E\geqslant 0$ zadani funkcional, a za $E\leqslant 0$ dobiva se maksimum.

(b) Funkcional $I(y)$ poprima za funkciju $y(x)$ jaki (lokalni) ekstrem, ako:

(b1) su ispunjeni uvjeti a1) i a2),

(b2) funkcija $E(x, y, p, y')$ ne mijenja predznak u točkama (x, y) koje su dovoljno blizu od $y(x)$ i za proizvoljne y' ($E\geqslant 0$ daje minimum, $E\leqslant 0$ maksimum).

Primjer 16. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I(y)=\int_0^1 y'^3\,\mathrm{d}x; \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=1.$$

Ovaj smo zadatak riješili u primjeru 8 i našli ekstremalu $y=x$. Ova ekstremala zadovoljava uvjete Legendrea i Jacobija i može se uložiti u polje ekstremala $y=Cx$; funkcija E ima oblik:

$$E(x, y, p, y')=y'^3-p^3-3p^2(y'-p)=(y'-p)^2(y'+2p).$$

Iz tog se izraza vidi da je prvi multiplikator uvijek pozitivan, a drugi je pozitivan za one y' koji su blizu jedinice, tj. $y=x$ je slabi (lokalni) minimum funkcionala. Za $y'<-2$ funkcija E mijenja predznak pa uvjet za jaki ekstrem nije ispunjen.

Primjer 17. Treba naći ekstrem funkcionala:

$$I(y)=\int_0^1 \frac{x+2y+y'^2}{2}\,\mathrm{d}x, \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=0.$$

Ekstremala tog funkcionala ima oblik:

$$y=x^2+C_1x+C_2.$$

Primjena rubnih uvjeta daje $y=x^2-x$. Ponovo su zadovoljeni uvjeti Legendrea i Jacobija. Ekstremala $y=x^2-x$ može se uložiti u polje $y=x^2+Cx$.

Iz $E(x, y, p, y')=\dfrac{(y'-p)^2}{2}$ se vidi da je $E\geqslant 0$ za sve y' pa za $y=x^2-x$ imamo jaki (lokalni) minimum.

Zadaće za funkcije više varijabli.

Primjer 18. Treba naći ekstrem funkcionala:

$$I(u)=\iint_G f(x, y, u, u'_x, u'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12}$$

$$u(x, y)=u_0(x, y) \quad \text{za} \quad (x, y)\in\delta G. \tag{13}$$

Ovdje se, dakle, traži funkcija $u(x, y)$ koja je definirana u nekom području G ravnine xy i koja prima zadane vrijednosti $u_0(x, y)$ na rubu δG tog područja. Osim toga zahtijeva se da $u(x, y)$ ima neprekinute parcijalne derivacije $u'_x(x, y)$ i $u'_y(x, y)$.

Većina prije navedenih uvjeta ekstrema za funkcije jedne varijable može se neposredno poopćiti i na taj slučaj.

Tako se, na primjer, za nužan uvjet slabog (lokalnog) ekstrema funkcionala (12) dobiva slijedeća Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$f'_u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_{u'_x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f'_{u'_y}=0. \tag{14}$$

To je parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda. Kako su vrijednosti funkcije u zadane na rubu područja δG, to se rubni problem može riješiti. Zahtjev da funkcija u ima neprekinute derivacije u'_x i u'_y može se oslabiti pomoću slijedećeg Haarovog teorema.

Iščezavanje prve varijacije od $I(y)$ iz (12) neprekinuti u i po dijelovima neprekinute derivacije u'_x i u'_y je ekvivalentno jednadžbi

$$\iint_S f'_u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_L (f'_{u'_x}\,\mathrm{d}y-f'_{u'_y}\,\mathrm{d}x),$$

gdje je S proizvoljno jednostruko suvisli dio skupa G (omeđeno po dijelovima glatkim krivuljama), a L je rub od S (pri ophodu u pozitivnom smislu).

Integralna jednakost u Haarovom teoremu, prema tome, ima istu onu ulogu kakvu je ranije imala Euler-Lagrangeova jednadžba.

Primjer 19. Za funkcional

$$I(u)=\iint_G (u_x'^2+u_y'^2)\,dx\,dy$$

Euler-Lagrangeova jednadžba ima oblik

$$u''_{yy}-u''_{yy}=0 \quad \text{(Laplaceova jednadžba).}$$

Zadaće Mayera i Bolza. Usporedno sa Lagrangeovom zadaćom u praksi se susreću također i zadaće određivanja ekstremala funkcionala

$$I(y)=F(y_0(x)), \tag{15}$$

ili

$$I(y)=F_1(y_0(x))+\int_{x_0}^{x_1} F_2(x, y_0,\ldots, y_n, y_0',\ldots, y_n')\,dx \tag{16}$$

s uvjetima

$$\begin{aligned} &f_i(x, y_0,\ldots, y_n, y_0',\ldots, y_n')=0 \qquad (i=0, 1,\ldots, m<n),\\ &y_i(x_0)=y_{i0} \qquad (i=0, 1,\ldots, n),\\ &y_i(x_1)=y_{i1} \qquad (i=1,\ldots, n). \end{aligned} \tag{17}$$

Zadaće ovoga tipa nazivamo *zadaćama Mayera* (15), (17) ili *Bolza* (16), (17). Kako je Mayerova zadaća posebni slučaj Bolzove zadaće ($F_2=0$), razmatrati ćemo samo ovu drugu zadaću. Funkcional $F_1(y_0(x_1))$ iz (16) može se pomoću supstitucije

$$y_{n+1}(x)=F_1(y_0(x)),$$

tj.

$$y'_{n+1}(x)=F'_{1y_0}(y_0(x))\,y_0'(x) \qquad y_{n+1}(x_0)=F_1(y_{00}),$$

svesti na oblik

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{1y_0}(y_0(x))\,y_0'(x)\,dx+F_1(y_{00}).$$

Kako je $F_1(y_{00})$ poznata konstanta koja ne utječe na definiciju ekstrema, to je Bolzova zadaća ekvivalentna slijedećoj *zadaći Lagrangea* određivanja ekstrema funkcionala:

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} (F'_{1y_0}(y_0)\,y_0'+F_2(x, y_0,\ldots, y_n, y_0',\ldots, y_n')\,dx,$$

$$\begin{aligned} &f_i(x, y_0,\ldots, y_n, y_0',\ldots, y_n')=0 \qquad (i=0, 1,\ldots, m),\\ &y_i(x_0)=y_{i0} \qquad (i=0, 1,\ldots, n),\\ &y_i(x_1)=y_{i1} \qquad (i=1,\ldots, n). \end{aligned}$$

3. HAMILTON-JACOBIJEVA TEORIJA

Između Euler-Lagrangeove jednadžbe i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda postoji veoma važna veza koju je otkrio Hamilton, a razvio Jacobi.

U nastavku ćemo promatrati samo funkcionale oblika

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx, \qquad y(x_0)=y_0 \qquad y(x_1)=y_1.$$

Neka je J minimalna vrijednost funkcionala $I(y)$, tj.

$$J=\min I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f((x, y^0, y^{0\prime})\,dx.$$

Neka tražena krivulja $y^0(x)$ spaja točke $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$ tj.

$$y^0(x_0)=y_0, \qquad y^0(x_1)=y_1.$$

Pretpostavljamo, dakle, da ekstremalna vrijednost funkcionala postoji. J je također nazvan *karakterističnom funkcijom Hamiltona.* Ako pretpostavimo da je funkcija $y^0(x)$ već određena, onda J zavisi samo o granicama integracije, tj.

$$J=J(x_0, y_0; x_1, y_1).$$

Pretpostavimo sada da je točka P_0 fiksna, a točka P_1 gibljiva, tj. $P_1=P_1(x, y)$. Tada je

$$J=J(x, y),$$

tj. J je funkcija samo koordinata. Sada se može pokazati da $J(x, y)$ zadovoljava slijedeće Hamiltonove formule:

$$J'_x=f(x, y, p(x, y))-p(x, y)f'_{y'}(x, y, p(x, y)), \tag{18}$$

$$J'_y=f'_{y'}(x, y, p(x, y)), \tag{19}$$

gdje je $p(x, y)=y^{0\prime}$ gradijent.

Ove formule igraju u varijacijskom računu fundamentalnu ulogu. Pomoću njih se može naći čitav niz uvjeta za ekstrem, specijalno Euler-Lagrangeova jednadžba, uz uvjet da je J dva puta neprekinuto diferencijabilna za y i x. Eliminacijom $p(x, y)$ iz Hamiltonovih formula dobivamo *Hamilton-Jacobijevu jednadžbu*

$$J'_x + H(x, y, J'_y) = 0, \tag{20}$$

gdje je

$$H(x, y, J'_y) = (pf'_{y'}(x, y, p) - f(x, y, p))_{p=y'(x, y, J'_y)}$$

(H je Hamiltonova funkcija ili hamiltonijan); $p = y'(x, y, J'_y)$ se pri tome dobiva iz jednadžbe (19) uz pretpostavku da je $f''_{y'y'}\big|_{y'=p} \neq 0$. Hamilton-Jacobijeva jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda i njome je određen ekstrem $J(x, y)$ funkcionala I. Opće rješenje (20) može uz konstante sadržavati i funkcije koje se mogu proizvoljno odabrati. Neka je

$$J = J(x, y, a)$$

jednoparametarska porodica rješenja u kojoj je parametar a bitan tj. a se ne pojavljuje samo u ulozi aditivne konstante. Tada *osnovni teorem Hamilton-Jacobijeve teorije* znači slijedeće.

Funkcija, određena iz jednadžbe $\dfrac{\partial J(x, y, a)}{\partial a} = b$ (b je proizvoljna konstanta), tada je implicitni oblik općeg rješenja Euler-Lagrangeove jednadžbe za funkcional $I(y)$. U mnogim slučajevima je rješenje Hamilton-Jacobijeve jednadžbe jednostavnije od rješenja Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Primjer 20. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)}\, dx, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

Primjena Hamilton-Jacobijeve teorije daje

$$J'_y = p\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$J'_x = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 + p^2)} - p^2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + p^2}},$$

tj. Hamilton-Jacobijeva jednadžba ima oblik

$$J'^2_x + J'^2_y = x^2 + y^2.$$

Stavljajući

$$J(x, y) = \frac{C_1x^2 + 2C_2xy + C_3y^2}{2},$$

nalazimo da je rješenje oblika

$$J(x, y) = \frac{x^2 \sin a - 2xy \cos a - y^2 \sin a}{2},$$

a iz $\dfrac{\partial J}{\partial a} = \dfrac{b}{2}$ dobivamo opće rješenje Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$x^2 \cos a + 2xy \sin a - y^2 \cos a = b.$$

4. OBRAT ZADAĆE VARIJACIJSKOG RAČUNA

Nužan uvjet za funkciju $y(x)$ određuje ekstrem funkcionala $I(y)$ vodi na Euler-Lagrangeovu jednadžbu. *Obratom zadaće varijacijskog računa* nazivamo zadaću određivanja, iz zadane parcijalne diferencijalne jednadžbe, funkcionala $I(y)$, koji predstavlja upravo Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Ta metoda igra značajnu ulogu pri numeričkom rješavanju diferencijalnih jednadžbi uz zadane početne uvjete.

U općem je slučaju, međutim, kompliciranо konstruirati funkcional $I(y)$ iz zadane diferencijalne jednadžbe.

Poseban slučaj. Promotrimo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$Au = f,$$

gdje je A linearni diferencijalni operator, a f poznata funkcija. Pretpostavimo nadalje da je A simetričan operator, tj. da je $(Au, v) = (u, Av)$ i pozitivan, tj. $(Au, u) \geqslant 0$ ($(Au, u) = 0$ ako i samo ako je $u \equiv 0$). Izraz (u, v) označava pri tome skalarni produkt funkcija u i v. Neka operator A ima sva gore navedena svojstva. Ako jednadžba $Au = f$ ima rješenje, onda ono minimizira funkcional

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Obrnuto, ako postoji element koji minimizira taj funkcional, onda je taj element rješenje jednadžbe $Au = f$. Zaključci ovog teorema mogu se primijeniti na konstrukciju funkcionala pomoću zadane parcijalne ili diferencijalne jednadžbe i to tako da se Euler-Lagrangeova jednadžba za taj funkcional podudara sa zadanom jednadžbom. Glavna poteškoća pri tome je u dokazivanju da je A simetrični pozitivni operator.

Primjer 21. Neka je dana jednadžba

$$Au=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)u=f(x)$$

s početnim uvjetima $u(a)=u(b)=0$. Uz pretpostavku da su funkcije $p(x)$, $p'(x)$, $q(x($ i $f(x)$ neprekinute i da vrijedi $p(x)\geqslant p_0>0$, $q(x)\geqslant 0$ za svaki $x\in[a, b]$, operator A je simetričan i pozitivan:

$$(Au, v)=-\int_a^b v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_a^b (p(x)u'(x)v'(x)+q(x)u(x)v(x))\,\mathrm{d}x=(u, Av)$$

(za $v(a)=v(b)=0$), tj. A je simetričan. Uvrstimo li u navedenu jednakost $v=u$, dobit ćemo

$$(Au, u)\geqslant p_0\int_a^b (u')^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{p_0}{(b-a)^2}\int_a^b u^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

tj. operator A je pozitivan. Prema tome jednadžba $Au=f$ je Euler-Lagrangeova jednadžba za funkcional

$$I(u)=\int_a^b\left(\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu\right)u-2fu\right)\mathrm{d}x.$$

Primjer 22. Neka je dana Poissonova jednadžba

$$Au=-\Delta u\equiv -u''_{xx}-u''_{y}=f(x, y)$$

s rubnim uvjetima

$$u(x, y)=0 \qquad \text{za sve} \qquad (x, y)\in\partial G$$

gdje je ∂G rub područja G na kojem se traži rješenje. Tada vrijedi

(a) $$(Au, v)-(Av, u)=\iint_G\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv'_z-vu'_x)+\frac{\partial}{\partial y}(uv'_y-vu'_y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{\partial G}(-(uv'_y-vu'_y)\,\mathrm{d}x+(uv'_x-vu'_x)\,\mathrm{d}y)=0,$$

ako je $v(x, y)=0$ za $(x, y)\in\partial G$, i

(b) $$(Au, u)=\iint_G u(u''_{xx}+u''_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=-\int_{\partial G}(-uu'_y\,\mathrm{d}x+uu'_x\,\mathrm{d}y)+\iint_G (u'^2_x+u'^2_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_G (u'^2_x+u'^2_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

Iz $(Au, u)=0$ slijedi $u'_x=u'_y=0$, tj. $u(x, y)=0$.

Prema tome operator A je simetričan i pozitivan, tako da za funkcional $I(u)$ dobivamo izraz

$$I(u)=\iint_G (u'^2_x+u'^2_y-2fu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. NUMERIČKE METODE

Često se u praksi Euler-Lagrangeova jednadžba ne može egzaktno riješiti pa tada treba primijeniti približne metode računanja. Za rješavanje Euler-Lagrangeove jednadžbe možemo upotrijebiti numeričke metode (prije svega metodu mreža) rješavanja diferencijalnih jednadžbi. Kako se tu, prije svega, radi o rubnim problemima, često se javljaju izvjesne poteškoće. Zbog toga za numeričko rješavanje varijacionih problema primjenjujemo *izravne metode*. Na taj se način izbjegava rješavanje diferencijalnih jednadžbi, a pokušava se konstruirati minimizirajući niz.

Ako je funkcional $I(y)$ omeđen odozdo na svom području definicije $D(I)$, tj.

$$\inf_{y\in D(I)} I(y)=K>-\infty,$$

onda svaki niz $\{y^n\}$ iz $D(y)$ za kojeg vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} I\{y^n\}=K,$$

nazivamo *minimizirajućim nizom*. Pri tome sam niz $\{y^n\}$ ne mora obavezno konvergirati. Pored toga ne postoje uvijek minimalni elementi $y^0\in D(I)$ (tj. $I(y^0)=K$). Često se za $\{y^n\}$ može samo reći da je

$$I(y^{n-1})\leqslant I(y^n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

(*metoda relaksacije*).

Istovremeno se, kao i pri određivanju lokalnog ekstrema pomoću Euler-Lagrangeove jednadžbe, direktnim metodama traži apsolutni

ekstrem. Na taj način neophodna su nova dodatna razmatranja da se ustanovi u kojoj mjeri rješenja dobivena direktnom metodom zadovoljavaju Euler-Lagrangeovu jednadžbu.

Eulerova metoda. Razmotrimo tu metodu na primjeru određivanja ekstrema funkcionala

$$I(y)=\int_a^b f(x, y, y')\,dx, \quad y(a)=y_a, \quad y(b)=y_b.$$

Ako interval $[a, b]$ razbijemo na n jednakih segmenata točkama

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n} \quad (i=0,\ldots, n),$$

onda funkcional $I(y)$ možemo aproksimativno naći metodom pravokutnika u obliku

$$I_n(y)=f(y_1,\ldots, y_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+ih, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right)$$

$(h=b-a)/n$, $y_i\approx y(a-ih)$, tako da se zadaća optimizacije svodi na funkciju od $n-1$ varijabli $y_1,\ldots, y_{n-1}$.

Primjer 23. Treba naći ekstrem funkcionala

$$I(y)=\int_0^1 (y'^2+y^2+2xy)\,dx, \quad y(0)=y(1)=0.$$

Interval [0, 1] razbijemo na pet segmenata

$$y_0=y(0)=0, \qquad y'(0)\approx y'_0=\frac{y_1-0}{0{,}2}$$

$$y_1=y(0{,}2). \qquad y'(0{,}2)\approx y'_1=\frac{y_2-y_1}{0{,}2}$$

$$y_2=y(0{,}4). \qquad y'(0{,}4)\approx y'_2=\frac{y_3-y_2}{0{,}2}$$

$$y_3=y(0{,}6). \qquad y'(0{,}6)\approx y'_3=\frac{y_4-y_3}{0{,}2}$$

$$y_4=y(0{,}8). \qquad y'(0{,}8)\approx y'_4=\frac{0-y_4}{0{,}2}$$

$$y_5=y(1)=0,$$

Na taj način dobivamo aproksimativnu zadaću za određivanje ekstrema funkcionala

$$I_5(y)=f(y_1, y_2, y_3, y_4)=0{,}2\sum_{i=0}^{4}\left(\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{0{,}2}\right)^2+y_i^2+0{,}4\,iy_i\right),$$

koja se rješava metodama diferencijalnog računa:

$$f'_{y_1}=\frac{2y_1}{0{,}04}-\frac{2(y_2-y_1)}{0{,}04}+2y_1+0{,}4=0,$$

$$f'_{y_2}=\frac{2(y_2-y_1)}{0{,}04}-\frac{2(y_3-y_2)}{0{,}04}+2y_2+0{,}8=0,$$

$$f'_{y_3}=\frac{2(y_3-y_2)}{0{,}04}-\frac{2(y_4-y_3)}{0{,}04}+2y_3+1{,}2=0,$$

$$f'_{y_4}=\frac{2(y_4-y_3)}{0{,}04}+\frac{2y_4}{0{,}04}+2y_4+1{,}6=0.$$

U slijedećoj se tablici uspoređuju y_i-ovi dobiveni na osnovu dane aproksimacije, s točnim vrijednostima $y(0{,}2i)$ (koje su zaokružene na četiri decimale):

i	y_i	$y(0{,}2i)$
1	−0,0286	−0,0287
2	−0,0503	−0,0505
3	−0,0580	−0,0583
4	−0,0442	−0,0444

Ritzova metoda. Varijacijska zadaća se primjenom ove metode svodi na traženje ekstrema funkcija.

Osnovna se ideja sastoji u slijedećem. Neka je $u_1, u_2, u_3,\ldots$ potpun sistem funkcija na području definicije $D(I)$ funkcionala $I(y)$, tj. svaka se funkcija y iz $D(I)$ može aproksimirati po volji točno linearnim kombinacijama funkcija u_i

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_iu_i,$$

pri čemu n ovisi o zahtijevanom stupnju točnosti.

Ako sada tu linearnu kombinaciju uvrstimo u funkcional $I(y)$, onda taj funkcional postaje funkcija samo parametara a_i:

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\right)=f(a_1,\ldots, a_n).$$

Nužan uvjet da ta funkcija ima ekstrem, s obzirom na parametre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan je jednakostima

$$f'_{a_1}=0, \quad f'_{a_2}=0, \ldots, \quad f'_{a_n}=0.$$

Iz tog nelinearnog sistema jednadžbi određuju se parametri a_i.

Funkcije u_i nazivamo također i *koordinatnim funkcijama.* One se obično odabiru tako, da funkcija

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

zadovoljava zadane rubne uvjete.

Primjer 24. Riješimo zadaću iz primjera 23 Ritzovom metodom.

Uzmimo da upotrijebimo koordinatne funkcije

$$u_1(x)=x^2-x, \quad u_2(x)=x^3-x^2, \ldots, u_n(x)=x^{n+1}-x^n.$$

Neka je $n=2$, tj.

$$y_2(x)=a_1(x^2-x)+a_2(x^3-x^2), \quad y_2(0)=y_2(1)=0.$$

Na taj način je

$$I(y_2(x))=\int_0^1 (a_1(2x-1)+a_2(3x^2-2x))^2+$$

$$+(a_1(x^2-x)-a_2(x^3-x^2)^2+2x(a_1(x^2-x)+a_2(x^3-x^2)))\,dx=f(a_1, a_2).$$

Iz $f'_{a_1}=0$ i $f'_{a_2}=0$ dobivamo

$$\frac{11}{15}a_1+\frac{11}{30}a_2=\frac{1}{6}, \qquad \frac{11}{30}a_1+\frac{2}{7}a_2=\frac{1}{10},$$

i prema tome $a_1=\frac{69}{473}$, $a_2=\frac{77}{473}$, $y_2(x)=\frac{77x^3-8x^2-69x}{473}$.

Usporedba s točnim rješenjem $y(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})-x$ dana je u tablici

i	$y_2(0{,}2i)$	$y(0{,}2i)$
1	−0,0285	−0,0287
2	−0,0506	−0,0505
3	−0,0585	−0,0583
4	−0,0442	−0,0444

Primjer 25. U primjeru 22 vidjeli smo da je Laplaceova jednadžba

$$v''_{xx}+v''_{yy}=0$$

Euler-Lagrangeova jednadžba za funkcional

$$I(v)=\iint_G (v'^2_x+v'^2_y)\,dx\,dy.$$

Neka je G područje omeđeno pravcima $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. I neka na rubu ∂G tog trokuta vrijedi $v(x, y)=x^2+y^2$. Neka koordinatne funkcije imaju oblik

$$u_0(x, y)=x^2+y^2,$$

$$u_1(x, y)=xy(1-x-y),$$

$$u_2(x, y)=x^2y(1-x-y), \ldots$$

i neka je $n=3$, tj.

$$v_3(x, y)=x^2+y^2+a_1xy(1-x-y)+a_2x^2y(1-x-y)+a_3x^3y(1-x-y).$$

Funkcija $u_0(x, y)$ dodana je zato da bi $v_3(x, y)$ zadovoljavala rubne uvjete. Na taj način je

$$I(v_3)=f(a_1, a_2, a_3).$$

Iz $f'_{a_1}=0$, $f'_{a_2}=0$, $f'_{a_3}=0$ dobivamo da je $a_1=3{,}0401$, $a_2=a_3=-0{,}0562$ i prema tome

$$v_3(x, y)=x^2+y^2+xy(1-x-y)(3{,}0401-0{,}0562(x-x^2)).$$

Metoda gradijentnog pada. Kao i za zadaće nelinearne optimizacije i za numeričko rješavanje varijacijskih zadaća može se primijeniti metoda gradijentnog pada.

Primjer 26. Treba minimizirati funkcional

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$$

pri čemu se na funkciju $y(x)$ ne stavlja nikakav rubni uvjet.

Gradijent funkcionala $I(v)$ definira se u Hilbertovu prostoru na slijedeći način. Ako *Gatov diferencijal*

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(y+th)-I(y)}{t}$$

postoji i jednak je $I'(y, h)$, onda $I'(y)$ nazivamo *gradijentom funkcionala* $I(y)$. Pod skalarnim produktom (u, v) pri tome razumijevamo integral

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Razmatrajući Euler-Lagrangeov teorem dobili smo izraz

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) h(x)\, dx,$$

odakle za gradijent neposredno dobivamo

$$I'(y) = f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}.$$

Ako je $y(x)$ ekstremala, tj. $f_y' - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$, onda za gradijent dobivamo da je $I'(y) = 0$, tj. dobiva se isti izraz kao i za funkcije više varijabli. Pomoću tog gradijenta može se sada dobiti metoda za približno riješavanje navedene zadaće.

Polazeći od neke početne aproksimacije $y^1(x)$ slijedeća se aproksimacija određuje iz jednakosti

$$y^{n+1} = y^n - \beta_n I'(y^n).$$

Veličina koraka β_n može se odrediti na primjer iz formule

$$I(y^n - \beta_n I'(y^n)) = \min_{\beta \geq 0} I(y^n - \beta I'(y^n)),$$

jer je $I(y^n - \beta I'(y^n))$ funkcija samo parametra β. Prema tome, za niz $\{y^n\}$ vrijedi

$$I(y^1) \geq I(y^2) \geq \ldots \geq I(y^n) \geq \ldots$$

Primjer 27. Riješimo iz primjera 23 i 24 zadaću određivanja minimuma funkcionala, ali bez zadavanja rubnih uvjeta:

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)\, dx.$$

Iz Euler-Lagrangeove jednadžbe $y'' - y - x = 0$ slijedi $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, pri čemu se proizvoljne konstante C_1 i C_2 određuju iz prirodnih uvjeta

$$y'(0) = C_1 - C_2 - 1 = 0, \quad y'(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} - 1 = 0,$$

tj.

$$C_1 = \frac{1 - e^{-1}}{e - e^{-1}}, \quad C_2 = \frac{1 - e}{e - e^{-1}}.$$

Za gradijent dobivamo

$$I'(y) = 2x + 2y - 2y''$$

i prema tome

$$y^{n+1} = y^n - \beta_n (2x + 2y^n - 2(y^n)'').$$

Neka je $y^1(x) = 0$ prva aproksimacija. To znači: $I'(y^1) = 2x$ i $I(y^1) = 0$, tako da za prvu iteraciju slijedi

$$y^2 = y^1 - \beta I'(y^1) = -2\beta x,$$

$$I(y^2) = 4 \int_0^1 (\beta^2 + \beta^2 x^2 - \beta x^2)\, dx = 4 \left(\frac{4}{3} \beta^2 - \frac{1}{3} \beta \right) = \min_{\beta \geq 0},$$

tj. $\beta_1 = \frac{1}{8}$, $y^2(x) = -\frac{1}{4} x$, $I(y^2) = -\frac{1}{12}$.

Slijedeći koraci provode se analogno. Proces će se prekinuti ako je $I'(y^n) = 0$, ili ako je na primjer razlika dvaju uzastopnih vrijednosti funkcionala dovoljno mala (na primjer $I(y^n) - I(y^{n+1}) < \varepsilon$).

B. OPTIMALNO UPRAVLJANJE

6. OSNOVNI POJMOVI

Primjer 28. Promotrimo pravocrtno gibanje tijela. Stanje objekta koji se giba možemo okarakterizirati položajem $x_1(t)$ i brzinom $x_2(t)$. Na gibanje se može utjecati izborom ubrzanja $u(t)$. Pri tome jednadžbe gibanja imaju oblik

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u.$$

Bitno je ovdje da se stanje objekta, koji je opisan ukazanim zakonima (sistemom običnih diferencijalnih jednadžbi), mijenja pod vanjskim djelovanjem (upravljanje).

Pri opisu stanja objekta funkcijama $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ kažemo da su one *fazne koordinate objekta.* Vektor $\mathbf{x}(t)$ s koordinatama $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ nazivamo *faznim vektorom*, n-dimenzionalni prostor točaka $\mathbf{x}$ nazivamo *faznim prostorom.* Neka stanje objekta zavisi od veličina

upravljanja $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ koje određuju *vektor upravljanja* $\mathbf{u}(t)$; r-dimenzionalni prostor točaka $\mathbf{u}(t)$ nazivamo *prostorom upravljanja.*

Ako je $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$ početno stanje objekta, onda stanje $\mathbf{x}(t)$ mora biti jednoznačno određeno sa zadanim $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{u}(t)$ $(t \geqslant t_0)$. Odgovarajuću krivulju u prostoru stanja, koja izlazi iz točke $\mathbf{x}^0$, nazivamo *trajektorijom.*

Neka je zakon izmjene stanja opisan sistemom običnih diferencijalnih jednadžbi koji nazivamo *dinamičkim sistemom*:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t),$$

ili, u vektorskom obliku,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Ako su funkcije $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ i $\partial f_i / \partial x_j$ neprekinuto diferencijabilne po svim svojim argumentima, onda govorimo o *neprekinuto dinamičkom sistemu.* Sistem

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j - \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t)\, u_k,$$

tj.

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica tipa $n \times n$ s elementima a_{ij}, a $\mathbf{B}$ matrica tipa $n \times r$ s elementima b_{ik}, nazivamo *linearnim sistemom.*

Dva dinamička sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{ i}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

nazivamo *ekvivalentnim*, ako postoji nedegenerirana matrica $\mathbf{P}$ tipa $n \times n$ s konstantnim elementima, takva da vrijedi

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t).$$

Tada vrijedi: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}, \mathbf{u}, t)$.

U općem se slučaju vektor upravljanja ne može svojevoljno izabrati, jer radi realnih tehničkih uvjeta na taj se izbor stavljaju posve određena ograničenja. Neka je U podskup prostora upravljanja, na primjer, određen nejednakostima $|u_i| \leqslant a_i$ ili $\|\mathbf{u}\| \leqslant \mathbf{a}$ ili $h(\mathbf{u}) \leqslant 0$, i neka se pri tome još zahtijeva da $\mathbf{u}(t)$ prima vrijednoti samo iz U; tada U nazivamo *područjem upravljanja* (često je U zatvoren ili čak i više zatvoren, omeđen i konveksan).

Vrlo često se na $\mathbf{u}(t)$ stavljaju dodatni uvjeti. Ako na primjer upravljajući mehanizam radi bez inercije, to onda znači da upravljanje mora biti po dijelovima neprekinuto.

Upravljanje nazivamo *dopustivim* na intervalu $[t_0, t_1]$:

1) ako $\mathbf{u}(t)$ prima vrijednosti samo iz U,

2) ako je $\mathbf{u}(t)$ po dijelovima neprekinuto.

Stanje $\mathbf{x}^1$ nazivamo *dostižívim* iz stanja $x^0 = x(t_0)$, ako postoji dopustivo upravljanje i takav $t_1 \geqslant t_0$ da za odgovarajuću trajektoriju vrijedi $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$. Skup svih stanja dostizivih iz stanja $\mathbf{x}^0$ nazivamo *skupom dostižívosti* u odnosu na početno stanje $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$ i područje upravljanja U. Ako je pri tome zadan i t_1, onda govorimo o skupu dostižívosti u odnosu na $\mathbf{x}^0$, U i t_1.

Ako je U konveksno područje, onda je skup dostižívosti linearnog sistema za fiksno t_1 također konveksan (skup dostižívosti u općem slučaju ne mora biti konveksan).

Neka je nadalje područje upravljanja čitav prostor upravljanja. Ako je stanje $\mathbf{x}^1 = 0$ dostižívo iz stanja $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$, onda kažemo da je stanje $\mathbf{x}^0$ *upravljívo* u trenutku t_0. Ako je svako stanje $\mathbf{x}^0$ upravljívo u trenutku t_0, onda kažemo da je sistem za vrijeme t_0 *upravljív*; ako je svako stanje $\mathbf{x}^0$ upravljivo za svaki t_0, onda kažemo da je sistem *potpuno upravljív* (tj. svaku točku prostora stanja u nekom početnom trenutku moguće je svesti u ishodište koordinatnog sustava).

Sistem je upravljív tada i samo tada kada je ekvivalentan sistem upravljív. To je međutim teško iskoristiti u svrhu praktičke analize.

Za linearni sistem, kojem su elementi matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ konstantni (autonomni linearni sistem), vrijedi slijedeća tvrdnja.

Neka je $\mathbf{G}$ matrica tipa $n \times n \cdot r$:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B});$$

linearni autonomni sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

je totalno upravljiv, ako i samo ako vrijedi

$$\operatorname{rang} \mathbf{G} = n.$$

7. PRINCIP MAKSIMUMA PONTRJAGINA

Ako se izaberu različiti dopustivi sistemi upravljanja, onda se za iste početne uvjete danog dinamičkog sistema dobiju, općenito govoreći, također različite funkcije stanja i prema tome različiti procesi

$(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$. Stoga ima smisla govoriti o procesu koji je optimalan u nekom smislu. Tada govorimo o *optimalnom procesu*, a odgovarajuće upravljanje nazivamo *optimalnim upravljanjem*, odgovarajuće stanje *optimalnim stanjem*, a odgovarajuću krivulju *optimalnom trajektorijom*.

Osnovna zadaća. Neka je zadan dinamički sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

s početnim uvjetom $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ i područjem upravljanja U. Traži se takvo dopustivo upravljanje i odgovarajuća trajektorija da za fiksirani trenutak t_1 izraz

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_1)$$

bude minimalan. Ovdje su c_i zadane konstante. (Očito da se tu govori o minimizaciji linearne kombinacije koordinata konačnog stanja.)

Uvedimo *pridruženu vektorsku funkciju* $\mathbf{p}(t)$ s koordinatama $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ koje zadovoljavaju relacije

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial t_j}{\partial x_i}, \quad p_i(t_1) = -c_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Uvodeći oznake

$$\mathbf{c} = \{c_1, \ldots, c_n\}, \qquad \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n), \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}},$$

dobivamo vektorske jednakosti

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{c}.$$

Hamiltonovu funkciju definiramo formulom

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i = \mathbf{p}\mathbf{f}.$$

Na taj se način dinamički i njemu pridruženi sistem mogu napisati u obliku kanonskih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{c},$$

gdje su $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ i $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ gradijenti od H po $\mathbf{p}$ i $\mathbf{x}$.

Pontrjaginov princip maksimuma. Da bi proces $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ rješavao zadanu osnovnu zadaću (tj. da bi bio optimalni proces u smislu postavljene zadaće), nužno je postojanje pridružene funkcije $\mathbf{p}(t)$, koja nije identički jednaka nuli i koja je rješenje pridruženog sistema s odgovarajućim rubnim uvjetima tako da za gotovo sve $t \in [t_0, t_1]$ bude ispunjen uvjet

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, t) = H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Ako je potrebno maksimizirati J, tada se na H izrečeni uvjet maksimuma zamjenjuje odgovarajućim uvjetom minimuma ili se rubni uvjet zapisuje u obliku $\mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{c}$.

Bitna prednost principa maksimuma u usporedbi s klasičnim teoremima varijacijskog računa sastoji se u tome što je on primjenljiv na svaki (specijalno zatvoreni) skup U. Proširenje klase mogućih područja upravljanja U je u usporedbi s klasičnim slučajem otvorenih skupova vrlo bitan za primjene teorije.

Ako treba minimizirati dva puta po svim argumentima diferencijalnu funkciju

$$J = F[\mathbf{x}(t_1)],$$

onda se početni uvjeti za pridružen sistem u Pontrjaginovom principu maksimuma moraju zamijeniti sa

$$p_i(t_1) = -\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{t=t_1}.$$

Ako treba minimizirati

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\, dt,$$

gdje f_0 mora zadovoljavati iste pretpostavke kao i f_i, onda Hamiltonova funkcija ima oblik

$$H^* = -f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i.$$

Tada pridruženi sistem ima oblik

$$\dot{p}_i = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad p_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Princip maksimuma Pontrjagina zapisuje se u odgovarajućem obliku.

Primjer 29.

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad |u| \leqslant 1, \quad t_1 = 1.$$

Nađimo optimalno upravljanje pri kojem je integral

$$\int_0^1 (u+u^2)\,dt$$

minimalan. Imamo

$$H^* = -(u+u^2) + x_2 p_1 + u p_2 = x_2 p_1 - (1-p_2)u - u^2,$$
$$\dot{p}_1 = 0, \qquad p_1(1) = 0,$$
$$\dot{p}_2 = -p_1, \qquad p_2(1) = 0,$$

tj.

$$p_1(t) = p_2(t) = 0.$$

Prema tome je $H^* = -u - u^2 = -\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Maksimum od H^* dostiže se za $u = -1/2$.

Uvjet za konačnu točku. Uvjet transverzalnosti. Često se u zadaćama formulirani uvjeti zadaju u konačnoj točki $\mathbf{x}(t_1)$. Tako se, kao dopuna osnovne zadaće za određivanje optimalne trajektorije, često moraju zadovoljiti uvjeti

$$F_\alpha[x(t_1)] = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

pri čemu se pretpostavlja da je F_α dva puta diferencijabilna za sve x_i i Jacobijan $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)$ ima maksimalni rang m. Tada uvjet $F_\alpha = 0$ određuje u prostoru stanja neku glatku mnogostrukost.

Dakle, treba naći takvo optimalno upravljanje koje točku $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$ prevodi u po volji odabranu točku te mnogostrukosti. Tada, ako je vektor $\mathbf{p}(t_1) - p_0\mathbf{c}$ okomit na konačnu mnogostrkost, tj. ako je

$$p_i(t_1) = p_0 c_1 - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right|_{t=t_1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

za proizvoljne parametre λ_α ($p_0 \leqslant 0$ je konstanta), onda kažemo da je ispunjen *uvjet transverzalnosti.*

Uvjeti konačnosti za $\mathbf{p}(t_1)$ u Pontrjaginovom principu maksimuma moraju biti zamijenjeni uvjetima transverzalnosti.

Ako je kriterij optimalnosti zadan u obliku integrala

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt,$$

tada hamiltonijan ima oblik

$$H^* = p_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i,$$

a pridruženi je sistem oblika

$$\dot{p}_i = -p_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$
$$p_i(t_1) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right|_{t=t_1} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

gdje je $p_0 \leqslant 0$ konstanta. Samo u slučaju kada uvjeti za konačnu točku nisu zadani, može se odmah zapisati da je $p_0 = -1$.

Najvažniji odnosi u Pontrjaginovom principu maksimuma navedeni su u tablici na stranici 726.

Ako je I poskup skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a konačni su uvjeti takvi, da je

$$x_i(t_1) = x_i^1 \quad \text{za} \quad i \in I$$

(zadano nekoliko konačnih koordinata), onda uvjet transverzalnosti prima specijalni oblik:

$$p_i(t_1) = \begin{cases} \text{nije zadano} & \text{za} \quad i \in I \\ p_0 c_i & \text{za} \quad i \notin I. \end{cases}$$

Primjer 30. Zadano je

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad x_1(1) = x_2(1) = 1.$$
$$\dot{x}_2 = u,$$

Treba naći optimalno upravljanje koje minimizira integral

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,dt.$$

Imamo

$$H^* = p_0 \frac{1}{2} u^2 + p_1 x_2 + p_2 u,$$

$$\dot{p}_1 = 0, \qquad p_1(1) = -\lambda_1, \qquad p_2(1) = -\lambda_2,$$
$$\dot{p}_2 = -p_1,$$

tj.

$$p_1(t) = -\lambda_1 \qquad \text{i} \qquad p_2(t) = \lambda_1 t - \lambda_1 - \lambda_2.$$

	$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) = \text{minimum}$		$F[\mathbf{x}(t_1)] = \text{minimum}$		$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \text{minimum}$	
	$\mathbf{x}(t_1)$ slobodno	$F_\alpha[\mathbf{x}(t_1)] = 0$	$\mathbf{x}(t_1)$ slobodno	$F_\alpha[\mathbf{x}(t_1)] = 0$	$\mathbf{x}(t_1)$ slobodno	$F_\alpha[\mathbf{x}(t_1)] = 0$
Hamiltonijan	$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$				$H^* = p_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$	
Pridruženi sistem	$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} p_j$				$\dot{p}_i = -\frac{\partial f_0}{\partial x_i} p_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} p_j$	
Uvjeti na kraju	$p_i(t_1) = -c_i$	$p_i(t_1) = p_0 c_i - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right\|_{t=t_1}$, $p_0 \leq 0$	$p_i(t_1) = -\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right\|_{t=t_1}$	$p_i = (t_1) = p_0 \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right\|_{t=t_1} - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right\|_{t=t_1}$, $p_0 \leq 0$	$p_i(t_1) = 0$, $p_0 = -1$	$p_i(t_1) = -\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right\|_{t=t_1}$, $p_0 \leq 0$
Dopunski uvjeti za slobodno konačno vrijeme t_1	$\max_t H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt$				$\max_t H^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt$	

Samim tim maksimum Hamiltonove funkcije daje optimalno upravljanje (očito da je $p_0 < 0$, možemo uzeti da je $p_0 = -1$)

$$u(t) = \lambda_1 t - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Nepoznati parametri λ_1 i λ_2 moraju biti tako određeni da sistem prevedu u konačnu točku

$$x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Integriranje jednadžbe stanja daje

$$x_1(t) = \frac{1}{6}\lambda_1 t^3 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) t^2, \qquad x_2(t) = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) t.$$

Iz $x_1(1) = x_2(1) = 1$ slijede linearne jednadžbe za određivanje parametara λ_1 i λ_2:

$$\frac{1}{6}\lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 1, \qquad \frac{1}{2}\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) = 1,$$

tako da optimalno upravljanje ima oblik

$$u(t) = -6t + 4.$$

Ako na upravljanje $\mathbf{u}$ stavimo ograničenja (na primjer, $|\mathbf{u}(t)| \leqslant 1$), onda se lako vidi da je određivanje optimalnog upravljanja znatno teže.

Analogno se dobivaju uvjeti transverzalnosti za početnu točku u slučaju ako $\mathbf{x}(t_0)$ nije zadano, već se samo zahtijeva da $\mathbf{x}(t_0)$ bude točka glatke mnogostrukosti koja je definirana na slijedeći način:

$$G_\beta[\mathbf{x}(t_0)] = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, l).$$

Tada pridružena vektorska funkcija mora zadovoljavati uvjete

$$p_i(t_0) = -\sum_{\beta=1}^{l} \mu_\beta \left.\frac{\partial G_\beta}{\partial x_i}\right|_{t=t_0} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Zadaće sa slobodnim konačnim vremenom. U mnogim zadaćama konačno vrijeme t_1 nije zadano, i tada se govori da su to zadaće sa slobodnim konačnim vremenom.

Ovisno o zadaći (osnovna zadaća, drugi oblici kriterija optimalnosti, uvjeti u konačnoj točki) princip maksimuma može biti dopunjen uvjetom

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, (t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt,$$

ili u slučaju ako je kriterij zadan u obliku integrala

$$\max H^*(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt.$$

Ako imamo autonomni sistem, tj. ako funkcije $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ovise implicitno od t, tada se iz $\partial f_i/\partial t = 0$ odmah dobiva

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) = 0,$$

ili

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H^*(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) = 0.$$

Ako treba minimizirati $t_1 - t_0$, onda govorimo o tzv. vremenskoj optimalnoj zadaći (optimizacija po vremenu). U tom slučaju kriterij optimalnosti možemo napisati i u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0 \, dt \qquad \text{sa} \qquad f_0 \equiv 1.$$

Tada je

$$H^* = p_0 + \sum_{i-1}^{n} p_i f_i = p_0 + H.$$

Dodatni uvjet dobiva oblik

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt - p_0.$$

Primjer 31. Zadano je

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u, \qquad 0 \leqslant u < 1.$$

Treba naći takvo dopustivo upravljanje da se točka $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ u najkraće vrijeme t_1 prevede u točku $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$. Prema tome je

$$H = p_1 x_2 + p_2 u,$$

$$\dot{p}_1 = 0, \qquad \dot{p}_2 = -p_1.$$

Maksimizacija H daje

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p_2 > 0, \\ 0, & \text{ako je } p_2 < 0. \end{cases}$$

Integracijom pridruženog sistema dobijemo

$$p_1 = k_1,$$
$$p_2 = -k_1 t + k_2$$

s nepoznatim konstantama integracije k_1, k_2. Očito da p_2 najčešće mijenja predznak, tj. može davati najbolje često prebacivanje upravljanja sa $u = 1$ na $u = 0$ ili sa $u = 0$ na $u = 1$.

Za $u = +1$ integriranjem sistema stanja dobivamo porodicu trajektorija

$$x_1 = \frac{1}{2} t^2 + s_2 t + s_1,$$

$$x_2 = t + s_2$$

(s_1, s_2 su konstante integracije). Eliminacija parametra t daje porodicu parabola

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + s_1 - \frac{1}{2} s_2^2.$$

Prema tome za $u = 0$ imamo porodicu pravaca

$$x_1 = r_2 t + r_1, \qquad x_2 = r_2$$

(r_1, r_2 su konstante integracije). Očito ni jedan od tih pravaca ne može prolaziti konačnom točkom koju treba dostići, jer bi tada moralo biti $r_1 = r_2 = 0$. Za porodicu parabola iz uvjeta $x_1 = x_2 = 0$ odmah se dobiva $s_1 - \frac{1}{2} s_2^2 = 0$, tj. parabola $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$ prolazi konačnom točkom. Kako x_2 monotono raste sa t, imat ćemo pogodak u konačnu točku, ali na grani parabole

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, \qquad x_2 \leqslant 0.$$

Kako ta parabola ne sadrži početnu točku, na početku je nužno upravljati sa $u = 0$ dok se ne dostigne nužna parabola, i tada se dešava prijelaz na $u = 1$.

Vrijeme prijelaza t_2 i puno vrijeme t_1 mogu se lako naći. Trajektorija koja polazi iz početne točke dobiva se za $u=0$:

$$x_1=-t+1, \qquad x_2=-1.$$

Za t_2 imamo $x_1=\frac{1}{2}x_2^2$, ili $1-t_2=\frac{1}{2}$, ili $t_2=\frac{1}{2}$. Dostignuto stanje je

$$x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=-1.$$

Daljnje upravljanje sa $u=1$ daje trajektoriju

$$x_1=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{8}, \qquad x_2=t-\frac{3}{2}.$$

Iz uvjeta $x_1(t_1)=x_2(t_1)=0$ slijedi da je $t_1=3/2$. Za pridruženu funkciju p_2, na taj način, mora vrijediti

$$p_2(t)\begin{cases}<0 & \text{za } t<1/2,\\ =0 & \text{za } t=1/2,\\ >0 & \text{za } t>1/2,\end{cases}$$

tj. $k_1=2k_2$, $k_1<0$.

Dodatni uvjet Pontrjaginova principa maksimuma također je ispunjen.

Sistemi s razdvojenim parametrima. Za razliku od zadaća upravljanja koje se opisuju običnim diferencijalnim jednadžbama, one zadaće koje se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama nazivamo *sistemima s razdvojenim (separiranim) parametrima.*

Za te zadaće se sasvim analogno kao i prije može formulirati Pontrjaginov princip maksimuma.

Tako, *princip maksimuma Pontrjagina* ima, na primjer, za zadaću određivanje minimuma funkcionala

$$J(u)=\sum_{i=1}^{n} c_iQ_i(a, b)$$

za $\mathbf{u}\in U$ sa

$$Q_{ixy}=f_i(x, y, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_x, \mathbf{Q}'_y, \mathbf{u}) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$Q_i(x, 0)=h_i(x), \qquad Q_i(0, y)=g_i(y), \qquad h_i(0)=g_i(0),$$

$\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_r)$ je po dijelovima neprekinuti vektor upravljanja, $\mathbf{Q}=(Q_1, \ldots, Q_n)$ je vektor stanja

slijedeći oblik: da bi proces $(\mathbf{u}(x, y), \mathbf{Q}(x, y))$ riješavao zadanu zadaću, nužno je postojanje pridruženih funkcija $N_i(x, y)$, koje su rješenje pridruženog sistema

$$N_{ixy}=H'_{Q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H'_{Q_{ix}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}H'_{Q_{iy}},$$

$$N_{iz}=-H'_{Q_{iy}}\Big|_{y=b}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

$$N_{iy}=-H'_{Q_{ix}}\Big|_{x=a},$$

$$N_i(a, b)=-c_i$$

tako da je za gotovo sve $(x, y)\in[0, a]\times[0, b]$ ispunjen uvjet maksimuma

$$\max_{\mathbf{u}\in U} H(x, y, N(x, y), \mathbf{Q}(x, y), \mathbf{Q}'_x(x, y), \mathbf{Q}'_y(x, y), \mathbf{u})=$$

$$=H(x, y, N(x, y), \mathbf{Q}(x, y), \mathbf{Q}'_x(x, y), \mathbf{Q}'_y(x, y), \mathbf{u}(x, y)).$$

$$H=\sum_{i=1}^{n} N_i(x, y)f_i(x, y, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_x, \mathbf{Q}'_y, \mathbf{u}).$$

Primjer 32. Treba naći minimum funkcionala

$$J(u)=\int_0^1\int_0^1 (x-1)Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

za $|u|\leqslant 1$ *sa*

$$Q''_{xy}=-2Q'_x-Q'_y-2Q+u.$$

$$Q(x, 0)=Q(0, y)=0.$$

Uvodeći funkciju

$$Q_0(x, y)=\int_0^x\int_0^y (x-1)Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dobivamo osnovnu zadaću određivanja minimuma funkcionala $Q_0(1, 1)$ za $|u|\leqslant 1$ sa

$$Q''_{0yx}=(x-1)Q, \qquad Q_0(x, 0)=Q_0(0, y)=0,$$

$$Q''_{xy}=-2Q'_x-Q'_y-2Q+y, \qquad Q(x, 0)=Q(0, y)=0.$$

Maksimizacija Hamiltonove funkcije

$$H=N_0(x-1)Q+N(-2Q'_x-Q'_y-2Q+u)$$

daje optimalno upravljanje

$$u(x, y)=\operatorname{sign} N(x, y).$$

Rješenje pridruženog sistema

$$N''_{0zy}=0. \qquad N''_{xy}=-2N+2N'_x+N'_y+N_0(x-1),$$
$$N'_{0x}=0\,|_{y=1}, \qquad N'_x=N\,|_{y=1}.$$
$$N'_{0y}=0\,|_{x=1}, \qquad N'_y=2N\,|_{x=1},$$
$$N_0(1, 1)=-1, \qquad N(1, 1)=0$$

ima oblik

$$N_0(x, y)=-1, \qquad N(x, y)=\frac{1}{2}(e^{x-1}-x)(1-e^{2(y-1)}).$$

Optimalno upravljanje izražava se funkcijom

$$u(x, y)=\operatorname{sign}\frac{1}{2}(e^{x-1}-x)(1-e^{2(y-1)})=\operatorname{sign}(e^{x-1}-x).$$

Za sisteme koji se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama drugog oblika postoje analogni principi maksimuma.

Veza između teorije optimalnog upravljanja i varijacijskog računa. Teorija optimalnih procesa razvijala se radi toga da bi se mogle rješavati zadaće sa zatvorenim područjem definicije. Pomoću te teorije mogu se također rješavati i zadaće varijacijskog računa.

Primjer 33. Neka je zadana Lagrangeova zadaća (vidi 2. na str. 692) određivanja ekstrema funkcionala

$$I(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t)\,\mathrm{d}t,$$
$$x(t_0)=x^0, \qquad x(t_1)=x^1.$$

Supstitucijom $\dot{x}(t)=u(t)$ dobivamo slijedeću zadaću optimalnog upravljanja: treba naći ekstrem funkcionala

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f(x, u, t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\dot{x}=u, \qquad x(t_0)=x^0, \qquad x(t_1)=x^1.$$

Hamiltonijan i pridruženi sistem imaju oblik

$$H^*=pu-f(x, u, t),$$
$$\dot{p}=f_x(x, u, t).$$

Kako upravljanje $u(t)$ poprima vrijednosti iz otvorenog područja, maksimum ili minimum hamiltonijana mogu se odrediti diferenciranjem:

$$H^*_u\equiv p-f'_u(x, u, t)=0.$$

Iz ove relacije slijedi

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_u.$$

Uzimajući u obzir da je $\dot{x}=u$ i $\dot{p}=f'_x$, dobivamo Eulerovu jednadžbu

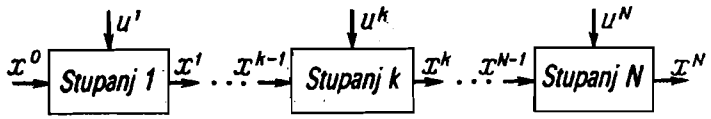
$$f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{\dot{x}}=0, \qquad x(t_0)=x^0, \qquad x(t_1)=x^1.$$

8. DISKRETNI SISTEMI

Ako je područje definicije funkcije stanja $\mathbf{x}(t)$ konačni skup elemenata $t_1, \ldots, t_N$, a izmjena stanja se obavlja po zakonu

$$\mathbf{x}(t_k)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k-1}), \mathbf{u}(t_k), t_k) \qquad (k=1, \ldots, N),$$

tada govorimo o *diskretnom sistemu.* Pri tome je $\mathbf{u}(t_k)$ r-dimenzionalni vektor upravljanja u trenutku t_k s područjem upravljanja U_k.



Sl. 422

Pomoću oznaka $\mathbf{u}^k=\mathbf{u}(t_k)$, $\mathbf{x}^k=\mathbf{x}(t_k)$ sistem se može napisati u obliku

$$\mathbf{x}^k=\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k, t_k)=\mathbf{f}^k(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k).$$

Ako pretpostavimo da je $t_k=k$, onda sistem možemo zorno opisati pomoću N-stupanjskog procesa (slika 422). Pri tome je $\mathbf{x}^k$ izlazno, a $\mathbf{x}^{k-1}$ ulazno stanje stupnja k, dok je $\mathbf{u}^k$ upravljanje koje djeluje na tome stupnju. Izlazno se stanje dobije u ovisnosti od ulaznog stanja i odgovarajućeg upravljanja. Od posebnog je značaja slijedeća *optimizaciona zadaća.*

Zadan je sistem

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{f}^k(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k) \qquad (k=1,\ldots, N),$$

$\mathbf{f}^k$ je bar jedanput diferencijabilna po svim svojim varijablama $\mathbf{u}^k \in U^k$ (zatvoren), $\mathbf{x}^0$ je početno stanje.

Nađimo takvo dopustivo upravljanje $\mathbf{u}^k$, da zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^N$$

bude minimalan (x_i^N su koordinate izlaznog stanja $\mathbf{x}^N$). Ako je nužno minimizirati $F[\mathbf{x}^N]$, onda valja za svaki stupanj uvesti dodatnu koordinatu staja x_{n-1}^k:

$$x_{n-1} = F(\mathbf{x}^k) = F[\mathbf{i}^k(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k)].$$

Cilj optimizacije je minimizirati x_{n+1}^N. Za takve sisteme, slično kao što se radilo za neprekinute sisteme, mogu se formulirati neke tipične zadaće. Formulirajmo ovdje principe maksimuma Bellmana.

Hamiltonijan stupnja k $(k=1,\ldots N)$:

$$H^k = \sum_{i=1}^{n} p_i^k f_i^k(\mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k).$$

Pridruženi vektor $\mathbf{p}^k$ *i pridruženi sistem stupnja* k imaju oblik:

$$p_i^{k-1} = \frac{\partial H^k}{\partial x_i^{k-1}} = \sum_{j=1}^{n} p_j^k \frac{\partial f_j^k}{\partial x_i^{k-1}}.$$

$$p_i^N = -c_i \qquad (i=1,\ldots, n).$$

Princip maksimuma. Ako je $\mathbf{u}^k$ optimalno u smislu postavljene zadaće, onda je nužno postojanje N pridruženih i različitih od nule vektora $\mathbf{p}^k$, koji predstavljaju rješenje pridruženog sistema, takvih da je

$$\frac{\partial H^k(\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k)}{\partial x_i^k} = 0$$

u slučaju ako je $\mathbf{u}^k$ unutar U^k, a $H^k(\mathbf{p}^k, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{u}^k)$ je maksimalno, kada $\mathbf{u}^k$ leži na granici od U^k.

Za razliku od takozvanog jakog principa maksimuma za neprekinute procese, ovaj se oblik naziva slabim principom maksimuma.

9. NUMERIČKE METODE

Princip maksimuma (nužan uvjet optimalnosti) daje potpun sistem za određivanje nepoznatih veličina. U njemu, međutim, nisu sadržani nikakvi algoritmi za izračunavanje tih veličina.

Kao i prilikom razmatranja numeričkih metoda varijacijskog računa, i ovdje razlikujemo takozvane *direktne* i *indirektne numeričke metode.*

Pontrjaginov princip maksimuma daje takozvanu *zadaću s graničnim vrijednostima u dvije točke* za određivanje funkcije stanja i pridružene funkcije, pri čemu se još dodatno mora riješiti zadaća maksimizacije.

Primjer 34. Ttreba naći minimum funkcionala

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

za $|u| \leqslant 1$ sa $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 0$.

Maksimizacija hamiltonijana

$$H^* = p(x+u) - \frac{1}{2}x^2$$

daje za optimalno upravljanje

$$u(t) = \operatorname{sign} p(t),$$

tako da se za određivanje $x(t)$ i $p(t)$ dobiva zadaća s početnim uvjetima u dvije točke:

$$\dot{x} = x + \operatorname{sign} p, \qquad x(0) = 0,$$

$$\dot{p} = -p + x, \qquad p(1) = 0.$$

Numeričke metode za približno rješavanje te zadaće i za traženu približnu maksimizaciju hamiltonijana nazivamo direktnim metodama. Te metode određuju, prema tome, veličine koje zadovoljavaju nužne uvjete optimalnosti (princip maksimuma).

Na isti način, kao i u varijacijskom računu, za približno rješavanje zadaća optimalnog upravljanja često se primjenjuju takozvane *direktne metode*. One daju monotono padajući niz vrijednosti funkcionala, ili *minimalni niz* (definiciju vidi u IV. A.5).

Značajnu ulogu među direktnim metodama imaju takozvane *gradijentne metode*. *Gradijent* $J'(\mathbf{u})$ definiran u IV. A.5, za funkcional

$$J(\mathbf{u})=\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,\mathrm{d}t, \qquad \dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad \mathbf{x}=(t_0)=\mathbf{x}^0,$$

ima oblik

$$J'(\mathbf{u})=-H_u^{*\prime}$$

gdje je

$$\dot{p}=-H_x^{*\prime}, \qquad p(t_1)=0$$

i

$$H^*=pf-f_0.$$

Na taj se način, za približno rješavanje zadaća optimalnog upravljanja, sada mogu primijeniti gradijentne metode nelinearne optimizacije. Mi ćemo ukratko razmotriti tri takve metode.

(a) **Metoda gradijenta za zadaće bez ograničenja.** Na upravljanje $\mathbf{u}$ ne stavljaju se nikakva ograničenja. Polazeći od početnog upravljanja $\mathbf{u}^1(t)$, daljnja upravljanja dobivaju se iz

$$\mathbf{u}^{i+1}=\mathbf{u}^i-\beta_i J'(\mathbf{u}^i) \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

(b) **Metoda gradijenta za zadaće s ograničenjima.**

(b1) **Uvjetna metoda gradijenta.** Neka je $\mathbf{u}^1(t)$ početna aproksimacija. Daljnja upravljanja dobivaju se iz

$$\mathbf{u}^{i+1}=(1-\beta_i)\mathbf{u}^i-\beta_i\mathbf{v}^i.$$

pri čemu se $\mathbf{v}^i$ dobije kao rješenje linearne „pomoćne zadaće" određivanja minimuma funkcionala

$$\int_{t_0}^{t_1} J'(\mathbf{u}^i)\mathbf{v}\,\mathrm{d}t$$

za $\mathbf{v}\in U$.

(b2) **Projekciona metoda gradijenta.** Neka je $\mathbf{u}^1(t)$ početna aproksimacija. Daljnja upravljanja dobivaju se iz

$$\mathbf{u}^{i+1}=p_U(\mathbf{u}^i-\beta_i J'(\mathbf{u}^i)).$$

pri čemu p_U označava operator projiciranja na skup U, tj. neophodno je riješiti „pomoćnu zadaću"

$$\|\mathbf{w}-p_U(\mathbf{w})\|=\min_{\mathbf{u}\in U}\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|$$

za $\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|=\max_{t\in[t_0,\,t_1]}|\mathbf{w}(t)-\mathbf{u}(t)|$.

Poteškoće svih triju metoda su u izboru *veličine koraka* β_i. Korak mora biti određen tako da za korespondentne vrijednosti funkcionala vrijedi nejednakost

$$J(\mathbf{u}^{i+1})\leqslant J(\mathbf{u}^i) \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

U metodama (b1) i (b2) problem izbora koraka dopunjuje još rješenje pomoćne zadaće.

Primjer 35. Treba naći minimum funkcionala

$$J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{x}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

uz uvjet

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0)=0.$$

Za gradijent dobivamo

$$J'(\mathbf{u})=-\mathbf{p}(t) \quad \text{sa} \quad \dot{\mathbf{p}}=-\mathbf{p}+\mathbf{x}, \qquad \mathbf{p}(1)=0.$$

Ako se na upravljanje $\mathbf{u}$ ne stavlja nikakvo ograničenje, onda iz metode (a) slijedi

$$\mathbf{u}^{i+1}=\mathbf{u}^i+\beta_i\mathbf{p}^i,$$

$$\dot{\mathbf{p}}^i=-\mathbf{p}^i+\mathbf{x}^i, \qquad \mathbf{p}^i(1)=0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{x}^i+\mathbf{u}^i, \qquad \mathbf{x}^i(0)=0.$$

Pri često susretanim ograničenjima $|\mathbf{u}(t)| \leqslant 1$ dobivamo pomoću metoda (b1) i (b2)

$$\mathbf{u}^{i+1} = (1-\beta_i)\mathbf{u}^i + \beta_i \operatorname{sign} \mathbf{p}^i$$

ili

$$\mathbf{u}^{i+1} = \begin{cases} \mathbf{u}^i + \beta_i \mathbf{p}^i, & \text{ako je } |\mathbf{u}^i + \beta_i \mathbf{p}^i| \leqslant 1, \\ \operatorname{sing}(\mathbf{u}^i + \beta_i \mathbf{p}^i), & \text{ako je } |\mathbf{u}^i + \beta_i \mathbf{p}^i| > 1, \end{cases}$$

pri čemu se $\mathbf{p}^i(t)$ i $\mathbf{x}^i(t)$ izračunavaju kao i u metodi (a).

V. FOURIEROVI REDOVI, FOURIEROV INTEGRAL I LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

A. FOURIEROVI REDOVI

1. OPĆI POJMOVI

Pri rješavanju mnogih fizikalnih i matematičkih problema nužno je razviti periodske funkcije s periodom 2π u red po trigonometrijskim funkcijama:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Redove oblika (1) nazivamo *Fourierovim redovima*, a razvoj funkcije u Fourierov red je zadatak *harmonijske analize*. U primjenama se često ograničavamo na konačan broj članova i pri tome dobivamo aproksimaciju funkcije trigonometrijskim polinomom. Ako promatramo Hilbertov prostor $L^2(-\pi, \pi)$, onda sistem funkcija

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3x, \ldots$$

tvori tzv. *potpun ortonormiran sistem*. Odavde slijedi da je pri aproksimaciji funkcije $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ trigonometrijski polinom

$$s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

srednja kvadratna pogreška

$$\delta^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,dx$$

minimalna onda i samo onda kada su α_k i β_k tzv. Fourierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ koji su ovako definirani:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

Odavde slijedi da za svaku funkciju $f(x)\in L^2(-\pi,\ \pi)$ suma

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

gdje su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti dani sa (2), konvergira prema f u smislu kvadratne sredine, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,dx=0.$$

U mnogim je slučajevima važno znati kada Fourijerov red konvergira u običnom smislu, tj. točku po točku, i na koji način on opisuje funkciju $f(x)$. Na tako formulirano pitanje u znatnoj mjeri daje odgovor *Dirichletov teorem*: Neka $f(x)$ zadovoljava u intervalu $(-\pi,\ \pi)$ tzv. *Dirichletove uvjete*:

a) interval $(-\pi,\ \pi)$ moguće je rastaviti na konačan broj intervala u kojima je $f(x)$ neprekinuta i monotona;

b) ako je x_0 točka prekinutosti funkcije $f(x)$, onda postoje $f(x_0+0)$ i $f(x_0-0)$.

Tada Fourierov red funkcije $f(x)$ konvergira i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]=\begin{cases}f(x), \text{ ako je } f(x) \text{ neprekinuta u } x,\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \text{ ako je } f(x)\\ \text{prekinuta u } x.\end{cases}$$

Ako $f(x)$ produžimo izvan intervala $(-\pi,\ \pi)$ tako da se dobije periodska funkcija s periodom 2π onda Dirichletov teorem vrijedi za sve x.

Ako se u Fourijerov red razvija funkcija koja ima period $2l$, onda se promatra interval $(-l,\ l)$. Pri tome koeficijenti Fourierovog reda glase

$$\left.\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots),\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ldots)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

i Fourierov red funkcija $f(x)$ ima oblik

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Sve prije izrečene tvrdnje vrijede i ovdje.

Fourierov red

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

možemo zapisati u jednom od slijedećih oblika:

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(kx+\varphi_k),$$

gdje je

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}, \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\varphi_k=\frac{a_k}{b_k};$$

$$s(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},$$

gdje je

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx=\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}, & \text{ako je } k=0,\\ \dfrac{1}{2}(a_k-ib_k), & \text{ako je } k>0,\\ \dfrac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & \text{ako je } k<0.\end{cases}$$

srednja kvadratna pogreška

$$\delta^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx$$

minimalna onda i samo onda kada su α_k i β_k tzv. Fourierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ koji su ovako definirani:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Odavde slijedi da za svaku funkciju $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ suma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

gdje su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti dani sa (2), konvergira prema f u smislu kvadratne sredine, tj.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx = 0.$$

U mnogim je slučajevima važno znati kada Fourijerov red konvergira u običnom smislu, tj. točku po točku, i na koji način on opisuje funkciju $f(x)$. Na tako formulirano pitanje u znatnoj mjeri daje odgovor *Dirichletov teorem*: Neka $f(x)$ zadovoljava u intervalu $(-\pi, \pi)$ tzv. *Dirichletove uvjete*:

a) interval $(-\pi, \pi)$ moguće je rastaviti na konačan broj intervala u kojima je $f(x)$ neprekinuta i monotona;

b) ako je x_0 točka prekinutosti funkcije $f(x)$, onda postoje $f(x_0 + 0)$ i $f(x_0 - 0)$.

Tada Fourierov red funkcije $f(x)$ konvergira i vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] = \begin{cases} f(x), \text{ ako je } f(x) \text{ neprekinuta u } x, \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \text{ ako je } f(x) \\ \text{prekinuta u } x. \end{cases}$$

Ako $f(x)$ produžimo izvan intervala $(-\pi, \pi)$ tako da se dobije periodska funkcija s periodom 2π onda Dirichletov teorem vrijedi za sve x.

Ako se u Fourijerov red razvija funkcija koja ima period $2l$, onda se promatra interval $(-l, l)$. Pri tome koeficijenti Fourierovog reda glase

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

i Fourierov red funkcija $f(x)$ ima oblik

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Sve prije izrečene tvrdnje vrijede i ovdje.

Fourierov red

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

možemo zapisai u jednom od slijedećih oblika:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin (kx + \varphi_k),$$

gdje je

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k};$$

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-ikx} \, dx = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2}, & \text{ako je } k = 0, \\ \dfrac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{ako je } k > 0, \\ \dfrac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{ako je } k < 0. \end{cases}$$

Simetrija. Ako je $f(x)$ u $(-\pi, \pi)$ parna funkcija tj. $f(-x)=f(x)$, onda su Fourierovi koeficijenti dani formulama

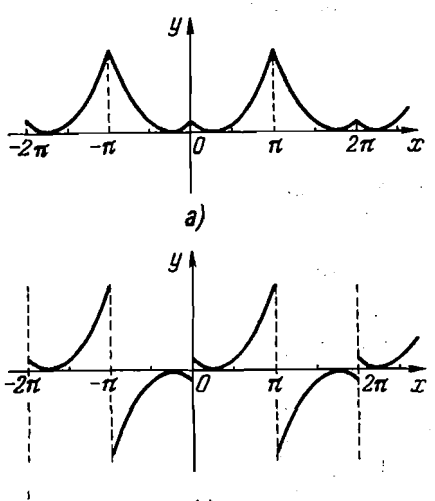
$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k=0. \tag{4}$$

Pri tome Fourierov red ima oblik

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx. \tag{5}$$

Ako je $f(x)$ neparna funkcija tj. $f(-x)=-f(x)$, onda su Fourierovi koeficijenti dani formulama

$$a_k=0, \quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{6}$$



Sl. 423

Pri tome Fourierov red funkcije $f(x)$ ima oblik

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx. \tag{7}$$

Razvoj u red u intervalu $(0, \pi)$. Ako je $f(x)$ zadana u intervalu $(0, \pi)$ i zadovoljava Dirichletove uvjete, onda tu funkciju možemo razviti u red bilo po kosinusima (5) bilo po sinusima (7). Pri tome se u prvom slučaju koeficijenti računaju po formulama (4), a u drugom po formulama (6). Oba reda unutar intervala $(0, \pi)$ u točki x u kojoj je funkcija neprekinuta, daju vrijednost $f(x)$, a u točki prekinutosti vrijednost $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Međutim, izvan intervala $(0, \pi)$ ti razvoji određuju razne funkcije. Red po kosinusima određuje funkciju dobivenu iz $f(x)$ pomoću parnog proširenja (produljenja) na susjedni interval $(-\pi, 0)$ i periodskog proširenja, s periodom 2π izvan $(-\pi, \pi)$ (sl. 423, a). Red po sinusima određuje funkciju dobivenu iz $f(x)$ pomoću neparnog proširenja na interval $(-\pi, 0)$ i periodskog proširenja, s periodom 2π izvan $(-\pi, \pi)$ (sl. 423, b).

Ako je $f(x)$ zadana na intervalu $(0, l)$, onda se formule (4), odnosno (6) mogu napisati u obliku:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad b_k=0,$$

odnosno

$$a_k=0, \qquad b_k=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Redovi (5), odnosno (7) tada imaju oblik

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l},$$

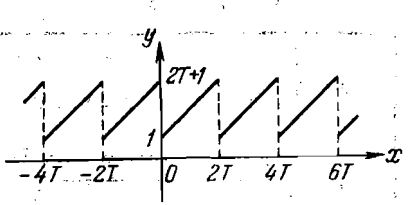
odnosno

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

2. TABLICA NEKIH RAZVOJA U FOURIEROV RED

U nastavku su navedeni razvoji u Fourierov red nekih jednostavnijih funkcija, koje su zadane u određenim intervalima i periodski su produljene izvan njih. Za neke razvoje dan je i grafički prikaz krivulje. Razvoji se odnose na inerval $(-\pi, \pi)$, odnosno $(0, \pi)$. U općem slučaju razvoji periodskih funkcija nerijetko se mogu dobiti izmjenom mjerila bilo na osi x, bilo na osi y. Neka je na primjer zadana funkcija $y=x+1$ za $0<x<2T$ s periodom $2T$ (sl. 424). Zamjenom varijabli $Y=\frac{(y-T-1)\pi}{T}$ i $X=\frac{(x-T)\pi}{T}$ dobije se funkcija 1 iz tablice na strani 720, tj. funkcija $Y=X$ zadana na intervalu $-\pi<X<\pi$ s periodom 2π. Prema toj tablici imamo

$$Y=2\left(\frac{\sin X}{1}-\frac{\sin 2X}{2}+\frac{\sin 3X}{3}-\ldots\right).$$



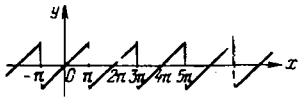
Sl. 424

Pomoću navedenih supstitucija i uzimajući u obzir linearnost razvoja u Fourierov red, dobivamo traženi razvoj

$$y=(T+1)-\frac{2T}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{T}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{T}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{T}+\ldots\right).$$

1. $y=x$ za $-\pi<x<\pi$;

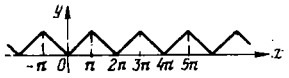
$$y=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$



Za vrijednosti argumenta $\pm k\pi$ prema Dirichletovom teoremu, slijedi da je vrijednost funkcije jednaka nuli.

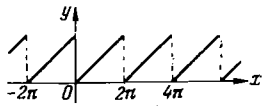
2. $y=|x|$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots\right)$$



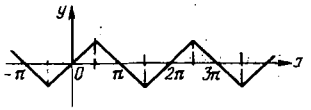
3. $y=x$ za $0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

$$y=\pi-2\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)$$



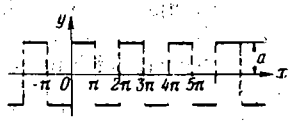
4. $$y=\begin{cases} x & \text{za } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ \pi-x & \text{za } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi, \\ -(\pi+x) & \text{za } -\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right)$$

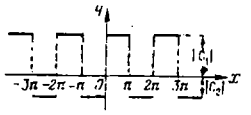


5. $$y=\begin{cases} -a & \text{za } -\pi<x<0, \\ a & \text{za } 0<x<\pi; \end{cases}$$

$$y=\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$$



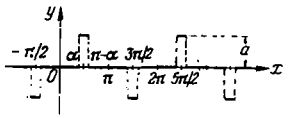
6. $$y=\begin{cases} c_1 & \text{za } -\pi<x<0, \\ c_2 & \text{za } 0<x<\pi; \end{cases}$$



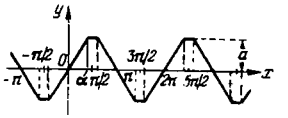
$$y=\frac{c_1+c_2}{2}-2\frac{c_1-c_2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$$

7. $$y=\begin{cases} 0 & \text{za } -\pi<x<-\pi+\alpha,\quad -\alpha<x<\alpha,\quad \pi-\alpha<x<\pi, \\ a & \text{za } \alpha<x<\pi-\alpha, \\ -a & \text{za } -\pi+\alpha<x<-\alpha, \end{cases} \quad a>0, \quad 0<\alpha<\pi/2;$$

$$y=\frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha\sin x+\frac{1}{3}\cos 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{5}\cos 5\alpha\sin 5x+\ldots\right)$$



8. $$y=\begin{cases} \frac{ax}{\alpha} & \text{za } -\alpha\leqslant x\leqslant\alpha, \\ a & \text{za } \alpha\leqslant x\leqslant\pi-\alpha, \\ -a & \text{za } -\pi+\alpha\leqslant x\leqslant-\alpha, \\ \frac{a(\pi-x)}{\alpha} & \text{za } \pi-\alpha\leqslant x\leqslant\pi, \\ -\frac{a(x+\pi)}{\alpha} & \text{za } -\pi\leqslant x\leqslant-\pi+\alpha, \end{cases} \quad 0<\alpha<\pi/2;$$



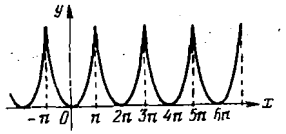
$$y=\frac{4a}{\pi\alpha}\left(\sin\alpha\sin x+\frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x+\ldots\right).$$

Specijalno za $\alpha=\frac{\pi}{3}$ dobivamo

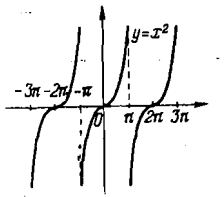
$$y=\frac{6a\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\sin x-\frac{1}{5^2}\sin 5x+\frac{1}{7^2}\sin 7x-\frac{1}{11^2}\sin 11x+\ldots\right)$$

9. $y=x^2$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

$$y=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right)$$



10. $y=\begin{cases}-x^2 & \text{za} \quad -\pi<x\leqslant 0,\\ x^2 & \text{za} \quad 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$

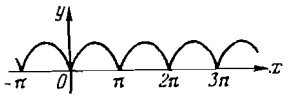


$$y=2\pi\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\dots\right)$$

11. $y=x(\pi-x)$ za $0\leqslant x\leqslant\pi$

i parno proširena na $(-\pi, 0)$

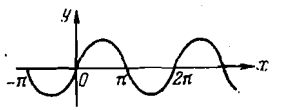
$$y=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\dots\right)$$



12. $y=x(\pi-x)$ za $0\leqslant x\leqslant\pi$

i neparno proširena na $(-\pi, 0)$

$$y=\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\dots\right)$$

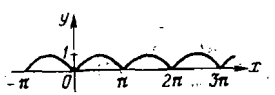


13. $y=Ax^2+Bx+C$ za $-\pi<x<\pi$

$$y=\frac{A\pi^2}{3}+C+4A\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}-2B\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k}$$

14. $y=|\sin x|$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,

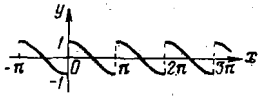
$$y=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\dots\right)$$



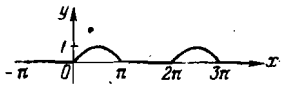
15. $y=\cos x$ za $0<x<\pi$

i neparno proširena na $(-\pi, 0)$

$$y=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{4\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{6\sin 6x}{5\cdot 7}+\dots\right)$$



16. $y=\begin{cases}0 & \text{za} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{za} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$



$$y=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\dots\right)$$

17. $y=\cos ux$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,

gdje je u proizvoljan necijeli realan broj,

$$y=\frac{2u\sin u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2}-\frac{\cos x}{u^2-1}+\frac{\cos 2x}{u^2-4}-\frac{\cos 3x}{u^2-9}+\dots\right)$$

18. $y=\sin ux$ za $-\pi<x<\pi$;

gdje je u proizvoljan necijeli realan broj,

$$y=\frac{2\sin u\pi}{\pi}\left(-\frac{\sin x}{u^2-1}+\frac{2\sin 2x}{u^2-4}-\frac{3\sin 3x}{u^2-9}+\dots\right)$$

19. $y=x\cos x$ za $-\pi<x<\pi$;

$$y=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{4\sin 2x}{2^2-1}-\frac{6\sin 3x}{3^2-1}+\frac{8\sin 4x}{4^2-1}-\dots$$

20. $y=x\sin x$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

$$y=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}-\frac{\cos 3x}{3^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\dots\right)$$

21. $y=\operatorname{ch} ux$ za $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, $u\neq 0$;

$$y=\frac{2u\operatorname{sh} u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2}-\frac{\cos x}{u^2+1^2}+\frac{\cos 2x}{u^2+2^2}-\frac{\cos 3x}{u^2+3^2}+\dots\right)$$

22. $y=\operatorname{sh} ux \quad \text{za} \quad -\pi<x<\pi,$

$$y=\frac{2\operatorname{sh} u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{u^2+1^2}-\frac{2\sin 2x}{u^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{u^2+3^2}\cdots\right)$$

23. $y=e^{ax} \quad \text{za} \quad -\pi<x<\pi, \quad a\neq 0;$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx-k\sin kx)\right].$$

U slijedećim primjerima imamo u vidu ne samo zadatak da se zadana funkcija razvije u Fourierov red, već i obrnuti problem: prema kakvim funkcijama konvergiraju neki jednostavniji trigonometrijski redovi.

24. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \qquad 0<x<2\pi.$$

25. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}, \qquad 0<x<2\pi.$$

26. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

27. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}=-\int_0^x\ln\left(2\sin\frac{z}{e}\right)dz, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

28. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}=\int_0^x dz\int_0^z\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=\frac{\pi^3}{25{,}79436\ldots}=1{,}20205\ldots\right).$$

29. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}=\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

30. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right), \qquad -\pi<x<\pi.$$

31. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}=\frac{x}{2}, \qquad -\pi<x<\pi.$$

32. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}, \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

33. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^2}=\int_0^x\ln\left(2\cos\frac{z}{2}\right)dz, \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

34. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^3}-\int_0^x dz\int_0^z\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt, \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

35. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^3}=\frac{\pi^2x-x^3}{12}, \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

36. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}=-\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), \qquad 0<x<\pi.$$

37. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{\pi}{4}, \qquad 0<x<\pi.$$

38. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

39. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^x \ln\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right) dz, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

40. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \frac{1}{2}\int_0^x dz \int_0^z \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

41. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

42. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

43. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right], \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

44. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right) dz, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

45. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi x}{4}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

46. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi x^2}{32}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

47. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz \int_0^z \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

3. NUMERIČKA HARMONIJSKA ANALIZA

Ako vrijednosti funkcije $f(x)$ u intervalu $0 \leqslant x < L$ znamo samo na nekom diskretnom skupu točaka $x_k = \frac{kL}{N}$ $(k=0, 1, \ldots, N-1)$, onda se problem njene aproksimacije trigonometrijskim polinomom rješava na slijedeći način.

Sistem funkcija

$$g_l(x_k) = \exp(il\alpha_k) \qquad (k, l = 0, 1, \ldots, N-1),$$

uz $\alpha_k = \frac{2\pi x_k}{L}$ je ortonormiran s obzirom na skalarni produkt

$$(f, g) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\cdot \bar{g}(x_k). \tag{8}$$

Odavde slijedi, da trigonometrijski polinom

$$T_N(x) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l g_l(x) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \exp\left(\frac{2\pi i l x}{L}\right), \tag{9}$$

gdje je

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\exp\left(-2\pi i \frac{lj}{N}\right), \tag{10}$$

ima u točkama x_k vrijednosti $f(x_k)$, tj, rješava problem trigonometrijske interpolacije. Pri tome taj polinom daje najbolju aproksimaciju od $f(x)$ u usporedbi s analognim polinomom s drugim koeficijentima u smislu metrike (8).

Kako je $\exp\left(2\pi i l \frac{k}{N}\right) = \exp\left[-2\pi i (N-l)\frac{k}{N}\right]$, to iz (10) slijedi da je

$$c_l = \bar{c}_{N-l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p-1),$$

gdje je $n = \left[\frac{N+1}{2}\right]$*); koeficijent c_0, a za parne N također i c_n, su realni. Stoga, ako označimo da je $a_k = c_k + c_{N-k}$, $b_k = i(c_k - c_{N-k})$,

*) Funkcija $[x]$ (čitaj najveće cijelo od x) se definira ovako: $[x]$ je najveći cijeli broj sadržan u x.

$1 \leqslant k \leqslant n-1$, i $a_0 = 2c_0$, a za parni N je $a_n = 2c_n$, onda formula (9) dobije oblik

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=0}^{n-1} \left(a_l \cos\left(2\pi \frac{lx}{L}\right) + b_l \sin\left(2\pi \frac{lx}{L}\right)\right) + \frac{a_p}{2} \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right). \quad (11)$$

Zadnji se član pojavljuje samo za parni N. Pri tome se a_l i b_l izračunavaju iz

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \cos\left(2\pi \frac{kl}{N}\right),$$

$$b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \sin\left(2\pi \frac{kl}{N}\right) \qquad (l=0, \quad 1, \ldots, n; \quad b_0 = b_n = 0). \quad (12)$$

Pogreška interpolacije $f(x) - T_N(x)$ u točkama koje nisu čvorne, bitno zavisi od članova višeg reda u razvoju funkcije $f(x)$ u beskonačni Fourierov red.

Ako je $N = pq$, onda se za izračunavanje koeficijenata c_l mogu primijeniti formule

$$c_{r,m} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f(x_{m+jq}) \exp\left(-2\pi i \frac{jr}{p}\right),$$

$$c_l = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} c_{r,m} \exp\left(-2\pi i \frac{lm}{N}\right). \qquad 0 \leqslant r < p, \; 0 \leqslant m < q, \; 0 \leqslant l < N. \quad (13)$$

Veličine $c_{r,m}$ su Fourierovi koeficijenti q funkcija zadanih sa p vrijednosti koje se podudaraju sa $f(x)$ u točkama x_{m+jq} $(j=0, \ldots, p-1)$. Pomoću njih se računaju konačne vrijednosti c_l. Rastavljajući p na faktore, možemo rekurentno primjenjivati formule (13) za izračunavanje koeficijenta $c_{r,m}$. Taj način izračunavanja dopušta značajno skraćenje, a nazvan je *brza Fourierova transformacija*. Ova je metoda

$x^{-3/2} e^{-a/x}$	$\sqrt{\frac{2}{a}}\, e^{-\sqrt{2ay}} \sin\sqrt{2ay}$
$\begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{Ci}(y) - \mathrm{C} - \ln y}{y}$
$\frac{\ln x}{x}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{C} + \ln y)$
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} \left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{C} - \ln(4y)\right]$
$x(x^2 - a^2)^{-1} \ln(bx)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos(ay)(\ln(ab) - \mathrm{Ci}(ay)) - \sin(ay)\,\mathrm{si}(ay)]$
$x(x^2 - a^2)^{-1} \ln\left(\frac{x}{a}\right)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay) + \sin(ay)\,\mathrm{si}(ay)]$
$e^{-ax} \ln x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2 + y^2} \left[a \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right) - \mathrm{C}y - \frac{1}{2} y \ln(a^2 + y^2)\right]$
$\ln\left\lvert\frac{a+x}{b-x}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{y} \left\{\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \cos(by)\,\mathrm{Ci}(by) - \cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay) + \sin(by)\,\mathrm{Si}(by) - \sin(ay)\,\mathrm{Si}(ay) + \frac{\pi}{2}[\sin(by) + \sin(ay)]\right\}$
$\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y} \sin(ay)$
$\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{a} [1 - \cos(ay) - ay\,\mathrm{si}(ay)]$
$\ln\left(\frac{a^2 + x^2 + x}{a^2 + x^2 - x}\right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y} e^{-y\sqrt{4a^2 - 1}/2} \sin\left(\frac{y}{2}\right)$

$\ln\left\|1-\frac{a^2}{x^2}\right\|$	$\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[C+\ln(ay)-\cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay)-\right.$ $\left.-\sin(ay)\,\mathrm{Si}(ay)\right]$
$\ln\left(\frac{a^2+(b+x)^2}{a^2+(b-x)^2}\right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y}e^{-ay}\sin(by)$
$\frac{1}{x}\ln\left\|1-a^2x^2\right\|$	$-\sqrt{2\pi}\,Ci\left(\frac{y}{a}\right)$
$\frac{1}{x}\ln\left\|1-\frac{a^2}{x^2}\right\|$	$\sqrt{2\pi}\,[C+\ln(ay)-\mathrm{Ci}(ay)]$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left\|\frac{y+a}{y-a}\right\|$
$\frac{\sin(ax)}{x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,y, & 0<y<a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a, & y>a\end{cases}$
$\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin y, & 0\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & y\geqslant\pi\end{cases}$
$\frac{\sin(ax)}{b^2+x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ab}}{b}\,\mathrm{sh}(by), & 0<y<a.\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-by}}{b}\,\mathrm{sh}(ab), & y>a\end{cases}$
$e^{-bx}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b\left[\frac{1}{b^2+(a-y)^2}-\frac{1}{b^2+(a+y)^2}\right]$

$\frac{e^{-bx}\sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\left(\frac{b^2+(y+a)^2}{b^2+(y-a)^2}\right)$
$e^{-bx^2}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-(a^2+y^2)/(4b)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{2b}\right)$
$\frac{\sin^2(ax)}{x}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & 0<y<2a,\\ \frac{1}{8}\sqrt{2\pi}, & y=2a,\\ 0, & y>2a\end{cases}$
$\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}$	$\begin{cases}0, & 0<y<a-b,\\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & a-b<y<a+b,\\ 0, & y>a+b\end{cases}$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(y+2a)\ln(y+2a)+\right.$ $\left.+(y-2a)\ln\left\|y-2a\right\|-\frac{1}{2}y\ln y\right]$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^3}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,y\left(2a-\frac{y}{2}\right), & 0<y<2a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a^2, & y>2a\end{cases}$
$\frac{\cos(ax)}{x}$	$\begin{cases}0, & 0<y<a;\\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & y=a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y>a\end{cases}$

$\dfrac{x\cos(ax)}{b^2+x^2}$	$\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-ab}\,\mathrm{sh}\,(by), & 0<y<a, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-by}\,\mathrm{ch}\,(ab), & y>a \end{cases}$
$\sin(ax^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\mathrm{C}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)+\sin\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\mathrm{S}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\dfrac{\sin(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[\mathrm{C}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)-\mathrm{S}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\cos(ax^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\sin\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\mathrm{C}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)-\cos\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\mathrm{S}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\dfrac{\cos(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[\mathrm{C}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)-\mathrm{S}\left(\dfrac{y^2}{4a}\right)\right]$
$e^{-a\sqrt{x}}\sin(a\sqrt{x})$	$\dfrac{a}{2y\sqrt{y}}e^{-a^2/2y}$

Fourierova transformacija. U većini slučajeva ona se može dobiti (na način ukazan u V.B.4. str. 754) iz kosinusne Fourierove transformacije i sinusne Fourierove transformacije.

$f(x)$	$F(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ixy}\,dx$
$\begin{cases} A, & a\leqslant x\leqslant b \\ 0, & x<a \text{ i } x>b \end{cases}$	$\dfrac{iA}{y\sqrt{2\pi}}(e^{iay}-e^{iby})$
$\begin{cases} x^n, & 0\leqslant x\leqslant b \\ 0, & x<0 \text{ i } x>b \\ & (n=1,2,3,\ldots) \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[n!\,(-iy)^{-(n+1)}-\right.$ $\left.-e^{iby}\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!}(-iy)^{m-n-1}\,b^m\right]$

$\dfrac{1}{(a+ix)^\nu}$,	$\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)}\,y^{\nu-1}\,e^{-ay}, & y>0, \\ 0, & y<0 \end{cases}$
$\dfrac{1}{(a-ix)^\nu}$,	$\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\begin{cases} 0, & y>0, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)}(-y)^{\nu-1}\,e^{ay}, & y<0 \end{cases}$

Definicije nekih simbola iz tablice:

C je Eulerova konstanta $\mathrm{C}=0{,}577216\ldots$.

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \qquad \mathrm{Re}\,z>0 \text{ (gama funkcija)},$$

$$J_\nu(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \quad \text{(Besselove funkcije)},$$

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\pi\,(\sin(\pi\nu)^{-1}\,[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)],$$

gdje su $I_\nu(z)=e^{-ix\nu/2}J_\nu(z\,e^{i\pi/2})$ Besselove funkcije imaginarnog argumenta.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{C}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt, \\ \mathrm{S}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \end{aligned}\right\} \text{(Fresnelovi integrali)}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Si}(x)&=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{si}(x)&=-\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Si}(x)-\frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\}\quad\text{(integral-sinus)},$$

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\quad\text{(integral-kosinus)}$$

C. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

6. OPĆI POJMOVI

Laplaceova transformacija je integralna transformacija koja je tijesno povezana s Fourierovom i ima analogna svojstva. Ona se vrlo često primjenjuje u tehničkim disciplinama, a osobito u elektrotehnici i tehničkoj kibernetici.

Za kompleksnu funkciju $f(t)$ realne varijable t kažemo da je *original* (dakle pripada području definicije Laplaceove transformacije), ako je ona definirana za $t\geqslant 0$, integrabilna na intervalu $(0,\infty)$, i ako je

$$|f(t)|\leqslant Ke^{st},\qquad s=\text{const.} \tag{1}$$

Ako je p kompleksna varijabla, onda funkciju

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

nazivamo *slikom (transformatom)* funkcije $f(t)$ i pišemo $F(p)=L[f(t)]$. Integral (2) apsolutno konvergira za $\mathrm{Re}\,p>s$, pri čemu je s konstanta iz (1). Odavde slijedi da je slika $F(p)$ definirana u poluravnini $\mathrm{Re}\,p>s$. Transformat $F(p)$ je u toj poluravnini analitička funkcija od p, i ona teži prema nuli za $\mathrm{Re}\,p\to\infty$ i ostaje omeđena u bilo kojoj poluravnini $\mathrm{Re}\,p\geqslant s_0$, gdje je $s_0\geqslant s$.

Slijedećih devet teorema čine osnovu za široku primjenu Laplaceove transformacije. Nazivi teorema odgovaraju operacijama sa funkcijama-originalima.

1) **Teorem o linearnosti:**

$$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1L[f_1(t)]+a_2L[f_2(t)].$$

2) **Teorem o konvoluciji:**

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=L[f_1(t)]\,L[f_2(t)].$$

tj. konvoluciji na skupu originala korespondira običan produkt na skupu slika.

3) **Teorem o integriranju:**

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{p}F(p),\qquad F(p)=L[f].$$

Prema tome integriranju u području originala korespondira dijeljenje slike sa nezavisnom varijablom.

4) **Teorem o diferenciranju:**

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f_0-\ldots-pf_0^{(n-2)}-f_0^{(n-1)}.$$

pri čemu je

$$f_0^{(k)}=\lim_{t\to+0}\frac{\mathrm{d}^kf(t)}{\mathrm{d}t^k}.$$

Na osnovu ovog teorema se u C.7. (str. 777) fundira primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi, uz zadane početne uvjete.

5) **Teorem o retardaciji:**

$$L[f(t-b)]=e^{-bp}L[f(t)].$$

6) **Teorem o sličnosti.** Za $a>0$ vrijedi

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

7) **Teorem o pomaku:**

$$L[e^{-\lambda t}f(t)]=F(p+\lambda).$$

8) **Teorem o množenju:**

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

9) **Teorem o dijeljenju.** Ako za $\frac{1}{t}f(t)$ postoji Laplaceov transformat, onda vrijedi

$$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_p^\infty F(q)\,dq.$$

Primjeri određivanja transformata $L(1) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$.

Da bismo odavde dobili $L[t^n]$, uzmimo u obzir da je $\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}$. Tada teorem o množenju daje $L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Odavde prema teoremu o pomaku slijedi

$$L[e^{-\lambda t} t^n] = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}.$$

Ovi primjeri pokazuju da transformate možemo često naći bez određivanja Laplaceovog integrala, samo upotrebom teorema 1 do 9.

Inverz Laplaceove transformacije. Original je pri Laplaceovoj transformaciji jednoznačno određen svojom slikom. Vrijedi slijedeći teorem o invertiranju Laplaceove transformacije **(kompleksna formula invertiranja).**

Ako je $F(p)$ analitička funkcija u području $\mathrm{Re}\, p \geqslant s$, i ako nadalje $\lim_{|p|\to\infty} F(p) = 0$ konvergira uniformno u odnosu na $\arg p$ i vrijedi $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)|\,|dp| < \infty$, onda je $F(p)$ transformat funkcije

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dt.$$

Za primjene je osobito važna inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije s obzirom na p. Takve funkcije rastavljamo na parcijalne razlomke i onda se prema teoremu o linearnosti možemo ograničiti na inverzne transformacije parcijalnih razlomaka. Originali parcijalnih razlomaka mogu se naći u tablici na stranicama 780 do 784.

Primjer 1. Nađimo original funkcije

$$F(p) = \frac{1}{p(p+a)}, \qquad a \neq 0, \qquad \frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{ap} - \frac{1}{a(p+a)}.$$

Original određujemo pomoću teorema o linearnosti i tablice (str. 780 do 784). Dobivamo da je $f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$.

7. PRIMJENA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE ZA RJEŠAVANJE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI UZ NEKE POČETNE UVJETE

Velika prednost pri rješavanju Cauchyjeva problema za obične diferencijalne jednadžbe primjenom Laplaceovih transformacija sastoji se u tome da se traženo partikularno rješenje dobiva neposredno i nije neophodno naći opće rješenje pa na njega primijeniti početne uvjete.

Neka je zadana linearna diferencijalna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima ($a_0 \neq 0$, $n > 0$)

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t).$$

i početnim uvjetom $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$.

Primjena Laplaceove transformacije na tu diferencijalnu jednadžbu prema teoremu o diferenciranju uz primjenu početnih uvjeta dovodi u skupu slika, do diferencijalne jednadžbe oblika

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) Y(p) = F(p) + y_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}) + y_0' (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + y_0^{(n-2)} (a_0 p + a_1) + y_0^{(n-1)} \cdot a_0,$$

ili

$$Q(p) Y(p) = F(p) + P(p);$$

pri tome je $Y(p) = L[y(t)]$ slika traženog rješenja, a $F(p) = L[f(t)]$ je slika desne strane zadane diferencijalne jednadžbe. Tu je

$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n=Q(p)$ karakteristični polinom diferencijalne jednadžbe. Odavde se dobiva

$$Y(p)=F(p)\frac{1}{Q(p)}+\frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Ako su $y_1(t)$ i $y_2(t)$ originali funkcija $\frac{1}{Q(p)}$ i $\frac{P(p)}{Q(p)}$ (oni se mogu naći rastavom na parcijalne razlomke), onda za traženo rješenje, prema teoremu o konvoluciji, dobivamo

$$y(t)=\int_0^t f(t-\tau)y_1(\tau)\,d\tau+y_2(t).$$

Pri tome nije potrebno odrediti $F(p)$.

Sasvim se analogno može rješavati i sistem diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Ako zadani sistem ima oblik

$$y_1'(t)+a_{11}y_1(t)+\ldots+a_{1n}y_n(t)=f_1(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n(t)+a_{n1}y_1(t)+\ldots+a_{nn}y_n(t)=f_n(t)$$

s početnim uvjetima $y_1(0), \ldots, y_n(0)$, onda Laplaceova transformacija prevodi sistem u slijedeći sistem od n linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $Y_1(p), \ldots, Y_n(p)$, (te nepoznanice su slike traženog rješenja)

$$(p+a_{11})Y_1(p)+\quad a_{12}Y_2(p)+\ldots+\quad a_{1n}Y_n(p)=F_1(p)+y_1(0),$$
$$a_{21}Y_1(p)+(p+a_{22})Y_2(p)+\ldots+\quad a_{2n}Y_n(p)=F_2(p)+y_2(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}Y_1(p)+\quad a_{n2}Y_2(p)+\ldots+(p+a_{nn})Y_n(p)=F_n(p)+y_n(0).$$

Rješenja $Y_1(p), \ldots, Y_n(p)$ tog sistema moramo zatim pomoću inverzne transformacije preslikati u tražena rješenja $y_1(t), \ldots, y_n(t)$.

Primjer 2. $y'(t)+2y(t)=2[(t-1)e^{t^2}+(1+2t)]$, $y(0)=1$. Laplaceova transformacija daje $pY(p)-1+2Y(p)=L[f(t)]$, gdje je sa $f(t)$ označena desna strana zadane jednadžbe. Dobiva se

$$Y(p)=\frac{1}{p+2}+\frac{L[f]}{p+2}.$$

Iz tablice na stranicama 780 do 784 i primjenom teorema o konvoluciji dobivamo

$$y(t)=e^{-2t}+2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}[(\tau+1)e^{\tau^2}+(1+2\tau)]\,d\tau.$$

Odavde se integriranjem dobiva

$$y(t)=e^{t^2}+2t.$$

Primjer 3. $y^{(4)}(t)+2y'''(t)+2y''(t)+2y'(t)+y(t)=0$, uz uvjet $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=4$. Laplaceova transformacija daje

$$(p^4+2p^3+2p^2+2p+1)Y(p)=-2p.$$

Karakteristična jednadžba ima dvostruki korijen -1, a preostala dva njena korijena jesu $\pm i$. Prema tome dobivamo da je

$$Y(p)=\frac{-2p}{(p^2+1)(p+1)^2}.$$

Rastav na parcijalne razlomke ima oblik

$$\frac{-2p}{(p^2+1)(p+1)^2}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{(p+1)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata dobivamo: $A=0$, $B=1$, $C=-1$, $D=0$, tj. $Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p^2-1}$. Iz tablice dobivamo konačno

$$y(t)=te^{-t}-\sin t.$$

Primjer 4. Treba riješiti Cauchyjev problem za slijedeći sistem:

$$y_1'(t)+y_2(t)=e^t, \qquad y_1(0)=1,$$
$$y_2'(t)-y_1(t)=-e^t, \qquad y_2(0)=1.$$

Laplaceovom transformacijom ovog sistema dobivamo:

$$pY_1(p)+Y_2(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$
$$pY_2(p)-Y_1(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$

tj.

$$pY_1(p)+Y_2(p)=\frac{p}{p-1}.$$

$$pY_2(p)-Y_1(p)=\frac{p-2}{p-1}.$$

Odavde slijedi

$$Y_1(p)=\frac{p^2-p+2}{(p-1)(p^2+1)},\qquad Y_2(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Rastav na parcijalne razlomke ima oblik:

$$\frac{p^2-p+2}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Usporedbom koeficijenata dobivamo da je $A=1$, $B=0$, $C=-1$, tj. $Y_1(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^2-1}$. Iz tablice nalazimo da je $y_1(t)=e^t-\sin t$. Original $y_2(t)$ je neposredno dan u tablici: $y_2(t)=\cos t$.

8. TABLICA INVERZNIH LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA RAZLOMLJENO-LINEARNIH FUNKCIJA

Funkcije su u tablici poredane po rastućem stupnju nazivnika. Tablica je potpuna do uključivo nazivnika trećeg stupnja, a također sadrži i neke funkcije kojima je nazivnik polinom četvrtog stupnja.

$L[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$

$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch}(at)$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{(p+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin at$
$\frac{p}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\left(\cos at-\frac{b}{a}\sin at\right)$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at}+at-1)$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}[(a-b)+be^{-at}-ae^{-bt}]$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$

$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(c-b)e^{-at}+$ $+(a-c)e^{-bt}+(b-a)e^{-et}]$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a(b-c)e^{-at}+$ $+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-et}]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a^2(c-b)e^{-at}+$ $+b^2(a-c)e^{-bt}+c^2(b-a)e^{-et}]$
$\frac{1}{(p-a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}(e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\{-ae^{-at}+[a+bt(b-a)]e^{-bt}\}$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}[a^2e^{-at}+b(b-2a-b^2t+abt)e^{-bt}]$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$e^{-at}t\left(1-\frac{a}{2}t\right)$
$\frac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\frac{a^2}{2}t^2\right)$
$\frac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos at+\frac{b}{a}\sin at\right)\right]$
$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$
$\frac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\frac{a}{b}\sin bt-\cos bt\right]$

$\frac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}[-ae^{-at}+a\cos bt+b\sin bt]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}(a^2e^{-at}-ab\sin bt+b^2\cos bt)$
$\frac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos ct+\right.$ $\left.+\frac{a-b}{c}e^{-bt}\sin ct\right]$
$\frac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos ct-\right.$ $\left.-\frac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin ct\right]$
$\frac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}[a^2e^{-at}+((a-b)^2+c^2-$ $-a^2)e^{-bt}\cos ct-$ $-\left(ac+b\left(c-\frac{(a-b)b}{c}\right)\right)e^{-bt}\sin ct$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{1}{6}t^3$
$\frac{1}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}t+\frac{1}{2a}t^2-\frac{1}{a^3}e^{-at}$
$\frac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\frac{a+b}{a^2b^2}+\frac{1}{ab}t+\frac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\frac{1}{b^2(a-b}e^{-bt}$
$\frac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}t(1+e^{-at})+\frac{2}{a^3}(e^{-at}-1)$
$\frac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\frac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\frac{2}{(a-b)}\right)+e^{-bt}\left(t-\frac{2}{a-b}\right)\right]$

$\frac{1}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{6}t^3e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}-\frac{a}{6}t^3e^{-at}$
$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[\cos at-\cos bt]$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a\sin at+b\sin bt]$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a^2\cos at+b^2\cos bt]$
$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\sin at-t\cos at\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}t\sin at$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(2\cos at-at\sin at)$
$\frac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\frac{e^{-bt}}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\sin at-t\cos at\right]$
$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{1}{a}\sin at\right)$

ŠESTI DIO

TEORIJA VJEROJATNOSTI I MATEMATIČKA STATISTIKA

I. TEORIJA VJEROJATNOSTI

A. SLUČAJNI DOGAĐAJI I NJIHOVE VJEROJATNOSTI

1. SLUČAJNI DOGAĐAJI

Mnoge pojave u prirodi, tehnici, ekonomici i drugim područjima imaju slučajno svojstvo, tj. nemoguće je točno predskazati da li će se oni dogoditi. Opaža se međutim da se tok i takvih pojava može kvantitativno opisati samo onda kada se one više puta promatraju pri neizmijenjenim uvjetima. Tako se, na primjer, pri bacanju kovanice (novčića) ne može predskazati da li će se na gornjoj strani pojaviti „glava" ili „pismo". Ako, međutim, kovanicu ponovo bacamo vrlo često, zamijetiti ćemo da se omjer broja bacanja u kojima se pojavilo „pismo" prema broju svih bacanja veoma malo razlikuje od 1/2, i da to manje odstupa od 1/2 što je broj bacanja veći.

Teorija vjerojatnosti daje matematski model za opisivanje slučajnih pojava toga tipa s objektivnom realnošću. Kako su mnogi realni procesi podvrgnuti slučajnim djelovanjima, ta će teorija biti značajna za specijaliste koji se bave prirodnim, tehničkim, a također i društvenim znanostima.

Slučajni eksperiment, ili *pokus*, je proces u kojem su mogući različiti ishodi, takvi da se oni ne mogu unaprijed predskazati. Pokus se, nadalje, odlikuje time, što ga je načelno moguće ponoviti po volji mnogo puta. Posebno je značajan skup mogućih ishoda pokusa koji se međusobno isključuju.

Moguće ishode pokusa koji se međusobno isključuju nazivamo *elementarnim događajima*. Skup elementarnih događaja označavat ćemo sa E.

Primjer 1. Jednokratno bacanje kocke pri kockanju. Mogući su ishodi koji jedan drugog isključuju, da kocka padne na jedan od

brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tu, dakle, imamo šest elementarnih događaja e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, pri čemu e_i označava da je kocka pala na broj i.

Primjer 2. Kockanje sa istovremenim bacanjem dviju kocaka. Skup E elementarnih događaja ima pri tome 36 elemenata e_{11}, e_{12}, ... , e_{66} a sa e_{ij} označava se da je prva kocka pala na i dok je druga kocka pala na j.

Primjer 3. Određivanje trajnosti električne žarulje. Elementarni događaji ovdje su svi pozitivni realni brojevi: skup E se sastoji iz pozitivne realne poluosi.

Pored elementarnih događaja, često su od interesa složeniji događaji, na primjer pri kockanju je to događaj kada „kocka padne tako da se pojavi paran broj", ili za određivanje trajnosti električne žarulje događaj „trajnost žarulje nije manja od 3000 sati".

Pretpostavimo da smo obavili neki pokus u kome je E skup svih njegovih elementarnih događaja. Svaki podskup $A \subseteq E$ nazivamo *događajem.* Događaj A nastupit će tada i samo tada kada se pojavi jedan od elementarnih događaja iz kojih se sastoji A.

Primjer 4. U primjeru *1* podskup $A=\{e_2, e_4, e_6\}$ određuje događaj „kocka je pala na paran broj". Događaj „kocka pada na paran broj" nastupit će tada i samo tada kada se pojavi jedan od elementarnih događaja iz podskupa A. U primjeru 2 podskup $A=\{e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{56}, e_{65}, e_{66}\}$ skup E može se interpretirati kao događaj „zbroj pojavljenih brojeva je $\geqslant 10$".

U primjeru *3* $A=(3000, \infty)$ može se interpretirati kao događaj „trajnost električne žarulje je više od 3000 sati".

Podskupovi od E, a prema tome i sam skup E i prazan skup $\varnothing$, interpretiraju se prema općoj definiciji kao događaji. Kako se E sastoji iz svih elementarnih događaja, a u svakom se pokusu obvezno pojavi jedan elementarni događaj, to će se prema tome E uvijek pojaviti; takav događaj nazivamo *sigurnim događajem.* Siguran događaj označavat ćemo sa U. Prazan skup $\varnothing$ ne sadrži elementarne događaje, pa se prema tome događaji iz tog skupa neće nikada pojaviti; takve događaje nazivamo *nemogućim događajima* i označavamo ih sa V.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji, tj. podskupovi nekog fiksiranog skupa E elementarnih događaja. Tada je unija $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ opet događaj, zato jer je ona podskup od E. Unija $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ pojavit će se tada i samo tada kada se pojavi bar jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Događaj $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ nazivamo *sumom (zbrojem) događaja* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Taj događaj često označavamo sa $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Na isti je način presjek $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ događaja A_i također neki događaj. Presjek događaja $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ pojavit će se onda i samo onda ako se pojavi svaki od događaja A_i. Događaj $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ nazivamo još i *produktom (umnoškom) događaja* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produkt događaja često označavamo sa $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$.

Primjer 5. Neka je pri određivanju trajanja života A_1 događaj „životni vijek je između 0 i t_1", a A_2 „životni vijek je veći od t_1, a kreći od t_2", tada je $A_1 \cup A_2$ događaj „životni vijek je između 0 i t_2".

Primjer 6. Ako je pri kockanju sa dvije kocke A_1 događaj „zbroj dobivenih poena je $\geqslant 11$", a A_2 događaj „na obje kocke je isti broj poena", onda je $A_1 \cap A_2$ događaj „na obje kocke se pojavila šestica".

Primjer 7. Neka je pri kockanju s dvije kocke A_1 događaj „zbroj poena očitanih na obje kocke je $\leqslant 2$", a A_2 događaj „zbroj poena očitanih na obje kocke je $\geqslant 5$". Tada je $A_1 \cap A_2$ nemoguć događaj tj. $A_1 \cap A_2 = V$.

Za dva događaja A_1 i A_2 kažemo da se *isključuju* ili da su *inkompatibilni* ako je $A_1 \cap A_2 = V$, tj. ako se A_1 i A_2 ne mogu pojaviti istovremeno.

Ako je A neki događaj, onda je njegov komplement $\bar{A} = E \setminus A$ također podskup od E, tj. neki događaj $\bar{A}$ će nastupiti tada i samo tada kada se ne pojavi A. $\bar{A}$ nazivamo *suprotnim (komplementarnim) događajem od* A. Događaji A i $\bar{A}$ se isključuju, tj. $A \cap \bar{A} = V$.

Primjer 8. Ako je za neko mjerenje A događaj „izmjerena veličina je $\geqslant \alpha$", onda je $\bar{A}$ događaj „izmjerena veličina je $< \alpha$".

Za operacije sa slučajnim događajima (suma, produkt, komplement) vrijede formule elementarne teorije skupova:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A \qquad \text{(komutativnosti)},$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad \text{(asocijativnost)}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(distributivnost)},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap B, \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup B \end{aligned}\right\} \qquad \text{(de Morganove formule)},$$

$$A \cup \bar{A} = U, \qquad A \cap \bar{A} = V.$$

Da bismo izgradili teoriju vjerojatnosti nužno je događajima pridružiti vjerojatnosti koje kvantitativno ocjenjuju mogućnosti ostva-

rivanja tih događaja. Ako je E neprebrojiv (kao na primjer u pokusu za „određivanje trajnosti električne žarulje"), onda nije razumno svim podskupovima od E pridružiti odgovarajuću vjerojatnost. Nužno je ograničiti se određenom klasom događaja. Događaje te klase nazivamo *slučajnim događajima.* Oni su predmet proučavanja teorije vjerojatnosti. Ako je E konačan, onda se ta klasa podudara s klasom svih događaja. Pokazuje se da klasu slučajnih događaja uvijek možemo odabrati tako da ne nastupe nikakve matematičke poteškoće pri uvođenju vjerojatnosti i da se uz to svi događaji, koji nas zanimaju, nalaze u odabranoj klasi, tj. da su to slučajni događaji u matematičkom smislu. Prema tome je za prirodoslovce i inženjere dovoljno općenito znati da su svi slučajni događaji koji ih zanimaju također i slučajni događaji u smislu matematske teorije, jer se aksiomatska teorija vjerojatnosti, koju ćemo u nastavku navesti, može na njih primijeniti.

2. AKSIOMI TEORIJE VJEROJATNOSTI

Pretpostavimo da smo neki pokus ponovili n puta i pri tome izbrojili koliko se puta pojavio događaj koji nas zanima. Pretpostavimo da je to m puta. Omjer $\frac{m}{n}=\mathbf{W}_n(A)$ nazivamo *relativnom učestalošću (frekvencijom* ili kraće *učestalošću)* slučajnog događaja A u tih n pokusa. Pri tome je $0\leqslant\mathbf{W}_n(A)\leqslant 1$. Praksa pokazuje da s povećavanjem broja n ta učestalost teži nekoj konstantnoj vrijednosti. Pojam vjerojatnosti slučajnog događaja pokušavalo se definirati kao tu relativnu učestalost. To je međutim dovelo do određenih teoretskih i matematičkih poteškoća koje se nisu mogle svladati. U suvremenoj teoriji ne pokušava se definirati vjerojatnost, već se ona smatra osnovnim pojmom koji zadovoljava izvjesne sisteme aksioma. Formulacija tih aksioma pripada sovjetskom matematičaru A. N. Kolmogorovu i temelji se na slijedećim svojstvima učestalosti, koje možemo tumačiti kao iskustvene činjenice:

1. Kada n postaje sve veći i veći, učestalost $\mathbf{W}_n(A)$ teži prema posve određenom broju.

2. $\mathbf{W}_n(U)=1$.

3. $\mathbf{W}_n(A\cup B)=\mathbf{W}_n(A)+\mathbf{W}_n(B)$, ako se A i B isključuju.

Aksiomi teorije vjerojatnosti.

1. Svakom slučajnom događaju A pridružen je broj $\mathbf{P}(A)$, $0\leqslant\mathbf{P}(A)\leqslant 1$, koji nazivamo *vjerojatnošću od* A.

2. Vjerojatnost sigurnog događaja jednaka je 1: tj. $\mathbf{P}(U)=1$.

3. *(Aksiom aditivnosti.)* Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *u parovima nezavisni* slučajni događaji, tj. $A_i\cap A_j=V$ za $i\neq j$, onda vrijedi

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i \mathbf{P}(A_i). \tag{1}$$

Za konačan broj u parovima nezavisnih događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksiom aditivnosti daje

$$\mathbf{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots+\mathbf{P}(A_n);$$

specijalno je

$$1=\mathbf{P}(U)=\mathbf{P}(U\cup V)=\mathbf{P}(U)+\mathbf{P}(V)=1+\mathbf{P}(V),$$

odakle slijedi $\mathbf{P}(V)=0$, tj. vjerojatnost nemogućeg događaja jednaka je nuli. Iz (1) slijedi da je $\mathbf{P}(A\cup\bar{A})=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A})$ i to zato jer se A i $\bar{A}$ isključuju. Uzmemo li u obzir da je $A\cup\bar{A}=U$ i aksiom 2 dobit ćemo

$$\mathbf{P}(\bar{A})=1-\mathbf{P}(A). \tag{2}$$

Za *proizvoljne* (ne obavezno u parovima nezavisne) slučajne događaje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrijedi

$$\mathbf{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i). \tag{3}$$

Određivanje vjerojatnosti nekog događaja je ponekad nemoguće. Tada je nužno obaviti dovoljan broj pokusa i uzeti da je relativna učestalost približna vrijednosti vjerojatnosti tog događaja. Tako na primjer nema ni biološke ni matematičke teorije koja dopušta da se izračuna a priori vjerojatnost $\mathbf{P}(A)$ slučajnog događaja „rođenja blizanaca". Za određivanje $\mathbf{P}(A)$ nužno je upotrijebiti statistiku velikog broja rađanja i izračunati (prebrojiti) koliko često se saj događaj zbio. Odgovarajuću učestalost tog događaja možemo tada uzeti za približnu vrijednost od $\mathbf{P}(A)$. Određivanje $\mathbf{P}(A)$ pomoću učestalosti od A nazivamo „statističkom" vjerojatnosti. Ovdje se, dakako, ne govori o određivanju vjerojatnosti, već o njenoj procjeni (vidjeti: Procjena parametara, str. 829).

3 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

Ako je pokus takav da se sastoji samo od konačnog broja jednako vjerojatnih elementarnih događaja, onda kažemo da se radi o klasičnom slučaju. Teoriju vjerojatnosti za ovakve pokuse razvio je još Laplace. Primjeri takvih pokusa su bacanje kovanica (tu imamo dva

jednako vjerojatna elementarna događaja) ili kockanje (tu imamo šest jednako vjerojatnih elementarnih događaja). U klasičnom slučaju iz aksioma za vjerojatnost $\mathbf{P}(A)$ dobijemo da je

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za } A}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}} \tag{4}$$

Ovdje pod povoljnim elementarnim događajima smatramo događaje kada se događaj A realizirao; drugim riječima, to su događaji iz kojih se sastoji A (shvaćen kao podskup od E). Laplace je formulom (4) i definirao vjerojatnost. (Formula (4) ne vrijedi, na primjer, onda kada imamo krivotvorenu kocku.)

Primjer 9. Neka je pravilna kocka bačena jedanput. Neka je A događaj „kocka je pala na paran broj". Povoljni događaji za A jesu e_2, e_4, e_6. Broj svih mogućih elementarnih događaja je šest. Prema tome imamo $\mathbf{P}(A)=3/6=1/2$.

Primjer 10. Uzmimo da kockamo s dvije kocke. Dobitak se isplaćuje onda kada je zbroj poena na obje kocke $\geqslant 10$. Kolika je vjerojatnost dobitka? Ovdje imamo 36 mogućih događaja. Povoljni događaji za A jesu e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{56}, e_{65}, e_{66}. Pri tome je sa e_{ij} označeno da je prva kocka pokazala i, a druga j poena. Tada imamo $\mathbf{P}(A)=6/36=1/6$.

Za klasične primjere često se primijenjuju formule kombinatorike, na primjer, da se izračuna broj svih mogućih elementarnih događaja.

Primjer 11. Igra LOTO sastoji se u tome da se pogodi k brojeva od n zadanih, na primjer 6 od 49. Koja je vjerojatnost da se dobije glavni zgoditak pogodivši svih 6 brojeva? Postoji samo jedan povoljni elementarni događaj, a taj je pogoditi svih 6 brojeva. Dakle, broj povoljnih slučajeva je 1. Broj svih mogućih elementarnih događaja jednak je broju kombinacija, bez ponavljanja, k-tog razreda od n elemenata, tj. C_n^k. Prema tome, vjerojatnost da se dobije glavni zgoditak je $\frac{1}{C_{49}^6}=\frac{1}{13\,983\,816}$.

4. UVJETNA VJEROJATNOST

Vjerojatnost nekoga slučajnog događaja A u pravilu se mijenja, ako je poznato da se već dogodio neki drugi slučajni događaj B. Vjerojatnost od A uz uvjet, da se već pojavio događaj B s vjerojatnosti $\mathbf{P}(B)\neq 0$, označavamo sa $\mathbf{P}(A/B)$ i nazivamo ga *uvjetnom vjerojatnošću* od A uz uvjet B.

Primjer 12. Kockajmo s dvije kocke. Neka je A događaj „obje kocke pokazuju zbroj $\geqslant 10$", a B događaj „zbroj poena je paran". Ako je poznato da se pojavio događaj B, onda za A imamo 18 mogućih elementarnih događaja (na primjer e_{11} je moguć, a e_{12} nije); a povoljni događaji za A jesu e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{66}. Iz toga slijedi da je $\mathbf{P}(A/B)=4/18=2/9$.

Primjer 13. Pretpostavimo da imamo dvije kutije. U prvoj se nalazi 5 bijelih i 5 crnih kuglica, dok je u drugoj kutiji 1 bijela i 9 crnih kuglica. Eksperiment se sastoji u tome da naslijepo odaberemo jednu kutiju i iz nje također naslijepo izvučemo jednu kuglicu. Neka je B događaj „izvučena kuglica je bijela", a A_i $(i=1, 2)$ je događaj „kuglica je izvučena iz i-te kutije". Tada je

$$\mathbf{P}(B/A_1)=5/10=1/2, \qquad \mathbf{P}(B/A_2)=1/10.$$

Za uvjetnu vjerojatnost vrijede ove relacije (pretpostavljamo da su sve vjerojatnosti, koje se u tim formulama javljaju, definirane):

$$\mathbf{P}(A/B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B)\neq 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}(B/A)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B))}{\mathbf{P}(A)}, \qquad \mathbf{P}(A)\neq 0. \tag{6}$$

Ako ih riješimo u odnosu na $\mathbf{P}(A\cap B)$, dobivamo *pravilo produkta*

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A/B)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B/A). \tag{7}$$

tj. vjerojatnost produkta dvaju slučajnih događaja jednaka je produktu vjerojatnosti jednog od tih događaja i uvjetne vjerojatnosti drugog uz uvjet da se prvi događaj zbio.

Dva slučajna događaja A i B nazivamo *nezavisnim* ako pojava jednog od njih ne utječe na vjerojatnost pojave drugog, tj. ako je

$$\mathbf{P}(A/B)=\mathbf{P}(A). \tag{8}$$

Tada pravilo produkta ima oblik

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B), \tag{9}$$

tj. *vjerojatnost produkta dvaju nezavisnih događaja jednaka je produktu njihovih vjerojatnosti.* Kako su formule (8) i (9) potpuno ekvivalentne, često se „nezavisnost dvaju slučajnih događaja" definira formulom (9).

Slučajne događaje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazivamo *nezavisnim*, ako za svaki m i svaku m-torku $i_1, \ldots, i_m$, gdje je $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$ vrijedi

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_m}).$$

Slučajne događaje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazivamo *u parovima nezavisnim* ako su za sve i, j, $i \neq j$ događaji A_i i A_j nezavisni.

Ako su neki događaji nezavisni, onda su oni i u parovima nezavisni, no obrat ne vrijedi.

5. TOTALNA VJEROJATNOST. BAYESOVA FORMULA

Pretpostavimo da siguran događaj E možemo prikazati u obliku sume n događaja od kojih se svaka dva međusobno isključuju, tj. $U = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, pri čemu je $A_i \cap A_j = V$ za $i \neq j$. Tada za proizvoljni slučajni događaj B vrijedi

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

Prema aksiomu aditivnosti, odavde slijedi da je

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_i).$$

Primjenom (7) dobivamo

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B/A_i). \tag{10}$$

Tu formulu nazivamo *formulom totalne (potpune) vjerojatnosti.*

Primjer 14. Pretpostavimo da imamo tri posude I tipa i u njima 2 bijele i 6 crnih kuglica, te jednu posudu II tipa i u njoj 1 bijelu i 8 crnih kuglica. Izaberimo nasumce jednu od posuda i iz nje, opet nasumce, izvučemo jednu kuglicu. Označimo sa B događaj „izvučena kuglica je bijela", a sa $\mathbf{P}(B)$ vjerojatnost od B. Označimo sa A_1 događaj „izabrana posuda je I tipa", a sa A_2 „izabrana posuda je II tipa". Tada je $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, i to zbog toga jer je $A_1 \cap A_2 = V$.

Odavde slijedi da je

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B/A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B/A_2).$$

Kako je

$$\mathbf{P}(A_1) = 3/4,\ \mathbf{P}(A_2) = 1/4;\ \mathbf{P}(B/A_1) = 2/8 = 1/4,\ \mathbf{P}(B/A_2) = 1/9,$$

slijedi konačno

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{31}{144}.$$

Neka su ispunjene pretpostavke zakona totalne vjerojatnosti. Tada možemo naći vjerojatnost od A_i uz uvjet da se B pojavio. Ta je vjerojatnost dana ovom *Bayesovom formulom (formula vjerojatnosti hipoteze)*

$$\mathbf{P}(A_i/B) = \frac{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B/A_j)}. \tag{11}$$

Primjer 15. Obavimo isti eksperiment kao i u primjeru 14. Neka je izvučena kuglica bijela. Kolika je vjerojatnost hipoteze da je kuglica izvučena iz posude I tipa?

$$\mathbf{P}(A_1/B) = \frac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B/A_1)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B/A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B/A_2)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}} = \frac{27}{31}.$$

B. SLUČAJNE VELIČINE

Realnu varijablu, koja ovisno o ishodu pokusa, tj. ovisno o slučaju, dobiva različite vrijednosti, nazivamo *slučajnom veličinom (varijablom).*

Neka je X neka slučajna veličina. *Funkcijom distribucije (razdiobe)* $F(X)$ slučajne varijable X nazivamo funkciju

$$F(X) = \mathbf{P}(X < x). \tag{12}$$

Vrijednost funkcije distribucije u točki x_0 je, prema tome, jednaka vjerojatnosti da slučajna varijabla dobiva vrijednosti manje od x_0. U teoriji vjerojatnosti slučajna veličina je potpuno karakterizirana svojom funkcijom distribucije, tj. možemo smatrati da je ona zadana ako je zadana njena funkcija distribucije. Pomoću funkcije distribucije možemo naći vjerojatnost da slučajna veličina pada u zadani poluotvoreni interval

$$\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \tag{13}$$

Funkcija distribucije proizvoljne slučajne veličine ima ova svojstva:

1) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

2) $F(x)$ je monotono nepadajuća, tj. $x_1 < x_2$ povlači da je $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

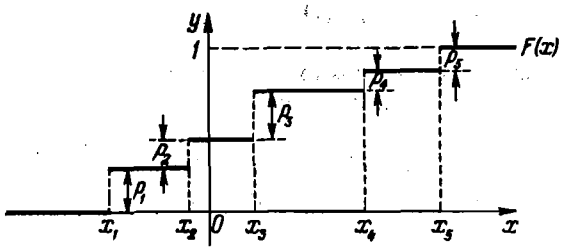
3) $F(x)$ je neprekinuta slijeva.

6. DISKRETNE SLUČAJNE VELIČINE

Slučajnu veličinu X nazivamo *diskretnom*, ako ona može primati samo konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti. Prema tome ona je karakterizirana vrijednostima $x_1, x_2, \ldots$, koje može dobiti i s vjerojatnostima $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ s kojima ona dobiva te vrijednosti. Vjerojatnosti p_i moraju zadovoljavati uvjet $\sum_i p_i = 1$. Jednoznačno preslikavanje skupa x_i u skup p_i nazivamo *funkcijom vjerojatnosti* diskretne slučajne varijable. Za funkciju distribucije diskretne slučajne varijable vrijedi

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \tag{14}$$

Sumira se po svim i za koje je $x_i < x$. Na taj način $F(y)$ je stepeničasta funkcija sa skokovima visokim p_i u točkama x_i (slika 425).



Sl. 425

Indikator događaja. Neka je A neki slučajni događaj i $\mathbf{P}(A) = p$. Slučajnu varijablu

$$X = \begin{cases} 1, & \text{ako se } A \text{ pojavi,} \\ 0, & \text{ako se } A \text{ ne pojavi,} \end{cases}$$

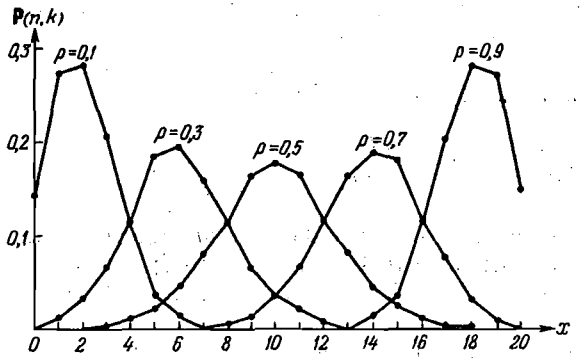
nazivamo *indikatorom od A* (*karakterističnom slučajnom veličinom*). Mogućim vrijednostima 0 i 1 odgovaraju vjerojatnosti $p_0 = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$, $p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = p$.

Binomna razdioba. Uzmimo da se neki pokus ponavlja n puta i neka pojedini pokusi te serije ne zavise jedan od drugoga. Neka se, nadalje, u svakom pokusu može pojaviti ili ne pojaviti događaj A, a vjerojatnost njegova izvršenja u svakom pojedinom slučaju ne zavisi od rednog broja pokusa i neka je jednaka p. Neka je $X^{(n)}$ broj ostvarenih događaja A u toj seriji od n pokusa. Očito je da su

sve moguće vrijednosti veličine $X^{(n)}$ brojevi 1, 2, ..., n. Vjerojatnost $P(n, k) = P(X^{(n)} = k)$ određene su *binomnim zakonom*

$$\mathbf{P}(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Slučajnu veličinu nazivamo *binomnom razdibom s parametrima n i p* ako ona vrijednosti 0, 1, ..., n dobiva s vjerojatnostima $\mathbf{P}(n, k)$ koje su zadane formulom (15). Parametri n i p u potpunosti određuju binomnu razdiobu. Na slici 426 prikazane su „poligonalne crte" binomnih razdioba za $n = 20$ i različite p. Pri tome su odgovarajuće vrijednosti $\mathbf{P}(n, k)$ nanesene kao ordinate i spojene su lomljenom crtom.



Sl. 426

Počevši od $\mathbf{P}(n, 0)$, $\mathbf{P}(n, k)$ mogu se lako naći iz slijedeće rekurentne formule:

$$\frac{\mathbf{P}(n, k)}{\mathbf{P}(n, k-1)} = \frac{(n-k+1)p}{kq}. \tag{16}$$

Primjer 16. Vjerojatnost da će se roditi dječak jednaka je 0,515. Kolika je vjerojatnost da u 10 nasumce odabranih porođaja bude 6 dječaka? Možemo smatrati da je ispunjena pretpostavka nezavisnosti. Prema tome, za traženu vjerojatnost imamo $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(10, 6) = C_{10}^6 (0{,}515)^6 (0{,}485)^4 \approx 0{,}2167$.

Primjer 17. U kutiji je N kuglica među kojima je M bijelih. Iz kutije n puta izvučemo po jednu kuglicu koju nakon raspoznavanja boje vratimo u kutiju. Kolika je vjerojatnost događaja da smo bijelu kuglicu upisali k puta? Tu vjerojatnost $\mathbf{P}(n, k)$ računamo pomoću binomnog zakona (15):

$$\mathbf{P}(n, k) = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{17}$$

Binomni zakon opisuje u najopćenitijem obliku realizaciju kriterija u *izboru sa n povrata.*

Primjer 18. Neka je vjerojatnost izrade pogrešnog proizvoda jednaka 0,01. Kolika je vjerojatnost da će od 100 proizvoda više od tri biti pogrešnih (sa greškom)? Prema binomnom zakonu i zakonu sume vrijedi

$$\mathbf{P}(A)=C_{100}^{0}(0{,}01)^{0}(0{,}99)^{100}+C_{100}^{1}(0{,}01)^{1}(0{,}99)^{99}+$$
$$+C_{100}^{2}(0{,}01)^{2}(0{,}99)^{98}+C_{100}^{3}(0{,}01)^{3}(0{,}99)^{97}=0{,}9816.$$

Hipergeometrijska razdioba. U kutiji je N kuglica među kojima je točno M bijelih. Iz kutije vadimo bez povrata jednu za drugom (ili istovremeno, što je isto) $n\,(\leqslant M)$ kuglica. Tada je vjerojatnost, da će među n izvučenih kuglica biti k bijelih, jednaka

$$\mathbf{P}_{N,M}(n,k)=\frac{C_M^k\,C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\qquad(k=0,1,\ldots,n).\tag{18}$$

Za slučajnu veličinu kažemo da ima *hipergeometrijsku razdiobu* ako ona moguće vrijednosti $0, 1, \ldots, n$ dobiva s vjerojatnostima $\mathbf{P}_{N,M}(n,k)$ koje su određene formulom (18). Brojeve N, M, n nazivamo *parametrima distribucije (razdiobe).*

Dakle, hipergeometrijska razdioba tako opisuje realizaciju kriterija o izboru bez povrata. Ako je N velik u usporedbi sa n, onda nije od bitnog značaja da li se kuglice vraćaju ili ne, pa formulu (18) možemo približno zamijeniti s formulom binomne razdiobe (17).

Poissonova razdioba. Za slučajnu veličinu kažemo da je distribuirana po Poissonovu zakonu ako ona poprima beskonačno prebrojivo mnoštvo mogućih vrijednosti $0, 1, 2, \ldots$ s vjerojatnostima

$$\mathbf{P}_{\lambda}(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad(k=0,1,\ldots).\tag{19}$$

Veličina λ je parametar razdiobe.

Poissonova razdioba može poslužiti kao dobra aproksimacija binomne razdiobe, ako je n velik, a p mali. Tada za λ treba uzeti np (vidjeti „E. Karakteristične funkcije", str. 814).

Primjer 19. Automobil je u toku upotrebe prevalio 100 000 km. Neka je X broj kvarova zračnice u toku vožnji. Tada X možemo smatrati slučajnom veličinom distribuiranom po Poissonovu zakonu (s odgovarajućim λ), tj. vjerojatnost nastanka triju kvarova na zračnicama je $\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$.

Primjer 20. Razmotrimo još jednom primjer 18. Tu je $n=100$, a $p=0{,}01$. Prema tome je $100\cdot 0{,}01=1$,

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}+\frac{1^2}{2!}e^{-1}+\frac{1^3}{3!}e^{-1}=\frac{1}{e}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=0{,}9810,$$

što se vrlo dobro podudara s točnom vrijednosti, ali je račun zato jednostavniji (brži).

Poissonova razdioba za različite λ dana je u tablici na str. 97.

7. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

Za slučajnu varijablu kažemo da je *neprekinuta* ako se njena funkcija razdiobe (integralna funkcija razdiobe) može napisati u obliku

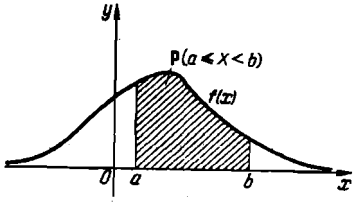
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt.\tag{20}$$

Funkciju $f(x)$ nazivamo *gustoćom razdiobe (distribucije).* Kako je $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, to mora biti

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1.\tag{21}$$

Uz zadanu gustoću vjerojatnosti prema (13) i (20), vjerojatnost da slučajna varijabla pada u zadani interval jednaka je (slika 427)

$$\mathbf{P}(a\leqslant X<b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\,dx.\tag{22}$$

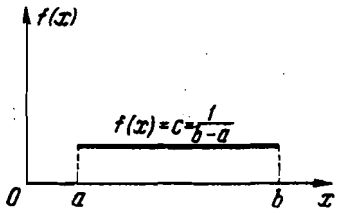


Sl. 427

Vjerojatnost $\mathbf{P}(X=a)$, tj. vjerojatnost da je neprekinuta slučajna varijabla jednaka zadanom realnom broju jednaka je 0. Odavde slijedi da, iako je $\mathbf{P}(V)=0$, iz $\mathbf{P}(A)=0$ ne slijedi da je A nemoguć događaj.

Jednolika razdioba. Za slučajnu varijablu kažemo da ima *jednoliku razdiobu* na $[a, b]$ ako je gustoća njene vjerojatnosti na $[a, b]$ konstantna, a izvan $[a, b]$ jednaka 0 (slika 428). Kako je $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, to je

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$



Sl. 428

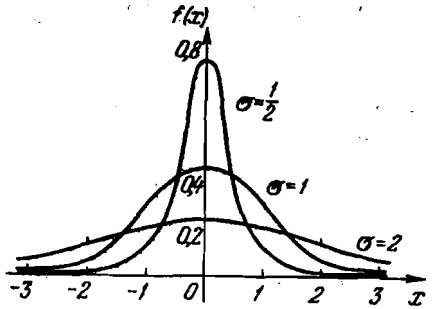
Normalna razdioba (Gaussova razdioba). Za slučajnu varijablu kažemo da ima *normalnu razdiobu* ako ona ima gustoću vjerojatnosti oblika

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \tag{23}$$

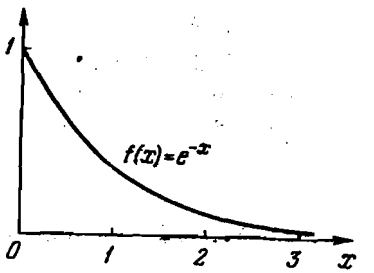
a i σ su *parametri razdiobe* (*distribucije*).

Graf funkcije (23) je zvonolika krivulja. Parametar a je točka maksimuma i istovremeno centar simetrije; parametar σ je udaljenost od tog centra do točke infleksije. Ako je σ malen, onda je krivulja visoka i šiljasta, a ako je σ velik, onda je niska i tupasta. Slika 429 prikazuje normalnu razdiobu za $a=0$ i različite σ.

Ako slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima a i σ, onda kažemo da je X *normalno distribuirana* u skladu sa zakonom $N(x; a, \sigma)$, ili pišemo $X \in N(x; a, \sigma)$. Funkciju $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(a=0,\ \sigma=1)$ nazivamo *gustoćom normalne i centrirane normalne razdiobe*. Gustoća vjerojatnosti $\varphi(x)$ i odgovarajuća razdioba $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ dani su tabelarno (vidi tablice na stranicama 99 do 101. Funkciju Φ često nazivamo i *Gaussov integral pogrešaka* $\left(\text{tablica na stranici 100 daje } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,\ \Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}\right)$. Osobit značaj normalne razdiobe u teoriji i praksi u znatnoj se mjeri zasniva na centralnom graničnom teoremu (vidi F na stranici 819, tamo su navedeni i primjeri normalne razdiobe za slučajnu varijablu).



Sl. 429



S. 430

Eksponencijalna razdioba. Za slučajnu veličinu kažemo da ima *eksponencijalnu razdiobu* ako ona ima slijedeću gustoću vjerojatnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{za } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{za } x < 0, \end{cases}$$

gdje je λ parametar razdiobe.

Primjer 21. Razdiobu trajnosti električne žarulje vrlo dobro aproksimira eksponecijalna razdioba s parametrom razdiobe $\lambda = 1$. Na slici 430 prikazana je gustoća vjerojatnosti eksponecijalne razdiobe $\lambda = 1$.

C. MOMENTI RAZDIOBE

8. DISKRETNI SLUČAJ

Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednotima $x_1, x_2, \ldots$ i $p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$.

Broj $r_i = \sum_k x_k^i p_k$ za apsolutno konvergentan red nazivamo *i-tim početnim momentom* slučajne varijable X (ili njene razdiobe) $(i = 1, 2, \ldots)$.

Broj $\mu_i = \sum_k (x_k - r_1)^i p_k$ nazivamo *i-tim centralnim momentom* od X.

Naročito su značajni prvi početni moment ν_1 i drugi centralni moment μ_2.

Matematička nada, Prvi početni moment $\nu_1 = \sum_k x_k p_k$ nazivamo *matematičkom nadom* (*očekivanjem*) od X i označavamo sa $\mathbf{M}X$ (ponekad EX). Matematička nada određuje položaj centra razdiobe u slijedećem smislu: uzmemo li da su p_k mase smještene u točke x_k realne osi, ona je $\mathbf{M}X$ koordinata težišta tog sistema materijalnih točaka.

Svojstva matematičke nade:

1) Matematička nada konstante a (koju možemo smatrati diskretnom slučajnom veličinom s jednom jedinom mogućom vrijednosti a s vjerojatnosti 1) jednaka je toj konstanti:

$$\mathbf{M}a = a.$$

2) Matematička nada sume jednaka je sumi matematičkih nada:

$$\mathbf{M}(X_1 + X_2) = \mathbf{M}X_1 + \mathbf{M}X_2. \tag{24}$$

3) Matematička nada produkta konstante i slučajne varijable jednaka je produktu te konstante sa matematičkom nadom slučajne varijable: $\mathbf{M}(aX) = a\mathbf{M}x$.

4) Matematička nada produkta dviju nezavisnih slučajnih varijabli jednaka je produktu njihovih matematičkih nada:

$$\mathbf{M}(X_1 \cdot X_2) = (\mathbf{M}X_1) \cdot (\mathbf{M}X_2). \tag{25}$$

Primjer 22. Za binomnu razdiobu s parametrima n i p imamo:

$$\mathbf{M}X = \sum_{k=0} k C_n^k p^k q^{n-k} = np. \tag{26}$$

Primjer 23. Za hipergeometrijsku razdiobu s parametrima N, M, n imamo:

$$\mathbf{M}X = \sum_{k=0} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = n\frac{M}{N}. \tag{27}$$

Primjer 24. Za Poissonovu razdiobu s parametrom λ imamo:

$$\mathbf{M}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda. \tag{28}$$

Ovdje dakle parametar λ ima značenje matematičke nade.

Disperzija. Drugi centralni moment nazivamo *disperzijom* (*varijancom*) slučajne varijable X i označavamo sa $\mathbf{D}X$, tj.

$$\mathbf{D}X = \sum (x_k - \mathbf{M}X)^2 \; p_k = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2. \tag{29}$$

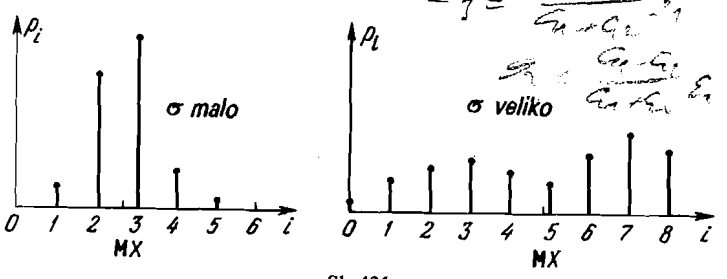
Za određivanje disperzije često je pogodna ova formula:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2. \tag{30}$$

Drugi korijen disperzije nazivamo *osipanjem* ili *standardnom devijacijom* ili *srednjom vrijednošću kvadrata odstupanja* i označavamo sa σ_x:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X}. \tag{31}$$

Veličina σ ili $\mathbf{D}X$ je mjera za osipanje razdiobe u odnosu na matematsku nadu. Na slici 431 prikazane su po jedna diskretna razdioba s malim i velikim osipanjem.



Sl. 431

Svojstva disperzije:

1) Disperzija konstante jednaka je nuli:

$$\mathbf{D}a = 0.$$

2) Disperzija produkta konstante sa slučajnom varijablom jednaka je produktu kvadrata konstante s disperzijom slučajne varijable:

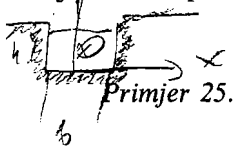
$$\mathbf{D}(aX) = a^2\,\mathbf{D}X.$$

3) Disperzija sume konstante i slučajne varijable jednaka je disperziji slučajne varijable:

$$\mathbf{D}(a + X) = \mathbf{D}X.$$

4) Disperzija sume nezavisnih slučajnih varijabli jednaka je sumi njihovih disperzija:

$$\mathbf{D}(X_1+X_2)=\mathbf{D}X_1+\mathbf{D}X_2.$$



Primjer 25. Za binomnu razdiobu imamo:

$$\mathbf{D}X=\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2\,C_n^k p^k q^{n-k}=npq, \tag{32}$$

$$\sigma_X=\sqrt{npq}. \tag{33}$$

Primjer 26. Za hipergeometrijsku razdiobu imamo:

$$\mathbf{D}X=\frac{N-n}{N-1}\,n\,\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right).$$

Primjer 27. Za Poissonovu razdiobu imamo:

$$\mathbf{D}X=\lambda, \qquad \sigma_X=\sqrt{\lambda}.$$

9. NEPREKINUTI SLUČAJ

Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom vjerojatnosti $f(x)$. Tada

$$\nu_i=\int_{-\infty}^{\infty}x^i f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazivamo *i-tim početnim momentom* slučajne varijable X $(i=1, 2,\ldots)$, ako integral apsolutno konvergira.

$$\mu_i=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\nu_1)^i f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazivamo *i-tim centralnim momentom* slučajne varijable X.

Matematička nada. Prvi početni moment

$$\nu_1=\mathbf{M}X=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

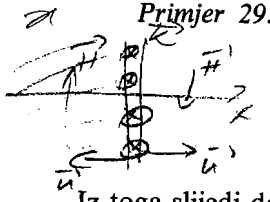
nazivamo *matematičkom nadom* slučajne varijable X. Matematička nada $\mathbf{M}X$ određuje težište razdiobe masa koja je zadana svojom „gustoćom razdiobe masa" $f(x)$.

Matematička nada u neprekinutom slučaju ima svojstva 1) do 4) kao i u diskretnom slučaju.

Primjer 28. Jednolika razdioba na $[a, b]$:

$$\mathbf{M}X=\int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{b+a}{2}.$$

Primjer 29. Normalna razdioba $N(x; a, \sigma)$:



$$\mathbf{M}X=\int_{-\infty}^{\infty}x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-(x-a)^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x=a.$$

Iz toga slijedi da parametar a ima značenje matematičke nade.

Primjer 30. Eksponencijalna razdioba:

$$\mathbf{M}X=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

Disperzija. Drugi centralni moment

$$\mu_2=\mathbf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathbf{M}X)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazivamo *disperzijom slučajne varijable* X. Za veličine $\sqrt{\mathbf{D}X}=\sigma$ kažemo da je *osipanje* ili *standardna devijacija* ili *srednje kvadratno odstupanje* slučajne varijable X. Vrijedi

$$\mathbf{D}X=\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^2=\mathbf{M}X^2-(\mathbf{M}X)^2 \tag{35}$$

Interpretacija je ista kao i za diskretni slučaj. Disperzija u neprekinutom slučaju ima ista svojstva 1) do 4) kao i u diskretnom slučaju.

Primjer 31. Jednolika razdioba na $[a, b]$:

$$\mathbf{D}X=\int_a^b\left(x-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Primjer 32. Normalna razdioba $N(x; a, \sigma)$:

$$\mathbf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\,dx=a^2.$$

Parametar σ ima značenje osipanja σ_x.

Prema tome normalna je razdioba potpuno određena zadavanjem matematičke nade i srednje vrijednosti kvadrata odstupanja.

Primjer 33. Eksponencijalna razdioba: $\mathbf{D}X=1/\lambda^2$.

D. SLUČAJNI VEKTORI (VIŠEDIMENZIONALNE SLUČAJNE VARIJABLE)

Uređenu n-torku $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajnih veličina nazivamo *n-dimenzionalnim slučajnim vektorom.*

Slučajni vektor može se okarakterizirati svojom *n-dimenzionalnom funkcijom razdiobe*:

$$F(x_1, \ldots, x_n)=\mathbf{P}(X_1<x_1, \ldots, X_n<x_n). \tag{40}$$

Funkciju $F(x_1, x_2, \ldots, X_n)$ često također nazivamo *razdiobom vektora* $(X_1, \ldots, X_n)$ ili konzistentnom razdiobom veličina $X_1, \ldots, X_n$. Shvatimo li $X_1, \ldots, X_n$ kao koordinate neke točke u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, onda položaj točke $(X_1, \ldots, X_n)$ zavisi o slučaju. Tada je vrijednost funkcije $F(x_1, \ldots, x_n)$ vjerojatnost da se točka nalazi u poluotvorenom paralelopipedu $X_1<x_1, \ldots, X_n<x_n$ s bridovima koji su paralelni s koordinatnim osima. Vjerojatnost da se točka nalazi u paralelepipedu $a_i\leqslant X_1<b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ dana je formulom:

$$\mathbf{P}(a_1\leqslant X_1<b_1, \ldots, a_n\leqslant X_n<b_n)=$$

$$=F(b_1, \ldots, b_n)-\sum_{i=1}^{n}p_i+\sum_{i<j}p_{ij}-\ldots+(-1)^nF(a_1, \ldots, a_n), \tag{41}$$

gdje je $p_{ij\ldots k}=F(c_1, \ldots, c_n)$, pri čemu je $c_i=a_i$, $c_j=a_j$, $\ldots$, $c_k=a_k$, a za ostale indekse je $c_s=b_s$. Prema tome formula (41) daje za dvodimenzionalni slučajni vektor

$$\mathbf{P}(a_1\leqslant X_1<b_1, a_2\leqslant X_2<b_2)=$$

$$=F(b_1, b_2)-F(b_1, a_2)-F(a_1, b_2)+F(a_1, a_2).$$

Svojstva *n*-dimenzionalne funkcije razdiobe.

1) $\lim\limits_{\substack{x_j\to+\infty\\ j=1,\ldots,n}}F(x_1, \ldots, x_n)=1$, $\lim\limits_{\substack{x_j\to-\infty\\ j=1,\ldots,n}}F(x_1, \ldots, x_n)=0$.

2) $F(x_1, \ldots, x_n)$ je monotono nepadajuća po svakoj varijabli.

3) $F(x_1, \ldots, x_n)$ je neprekinuta slijeva po svakoj varijabli.

4) Za proizvoljne $a_i\leqslant b_i$ $(i=1, \ldots, n)$ je desna strana jednakosti (41) nenegativna.

10. DISKRETNI SLUČAJNI VEKTORI

Slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ nazivamo *diskretnim* ako su sve njegove komponente diskretne slučajne veličine. Ako su $x_k^{(j)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ moguće vrijednosti j-te komponente, onda se funkcija vjerojatnosti $p_{i_1\ldots i_n}$ vektora $(X_1, \ldots, X_n)$ definira formulom:

$$p_{i_1\ldots i_n}=\mathbf{P}(X_1=x_{i_1}^{(1)}, X_2=x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_n=x_{i_n}^{(n)}).$$

Za funkciju razdiobe analogno sa (14) vrijedi

$$F(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\substack{x_{i_k}^{(k)}<x_k\\ k=1,2,\ldots,n}}p_{i_1\ldots i_n}. \tag{42}$$

Sumira se po svim i_k za koje je $x_{i_k}^{(k)}$ manje od x_k itd.

Primjer 34. Polinomijalne razdiobe. Neka se u nekom pokusu dogodi uvijek jedan od događaja $A_1, \ldots, A_k$, i neka se ti događaji u parovima isključuju. Neka je $p_i=P(A_i)$. Kako je $A_1\cup\ldots\cup A_k=U$ i $A_i\cap A_j=V$ za $i\neq j$, to je $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$. Obavimo n pokusa pri čemu su svaka dva pokusa iz te serije nezavisna. Označimo sa X_i broj pojava A_i $(i=1, \ldots, k)$ u tih n pokusa. Tada svaka od slučajnih varijabli X_i može dobiti samo konačno mnogo vrijednosti 0, 1, $\ldots$, n. Dakle $(X_1, \ldots, X_n)$ je diskretni slučajni vektor. Njegova funkcija vjerojatnosti je dana sa:

$$p_{i_1, \ldots, i_k}=\mathbf{P}(X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots, X_k=i_k)=$$

$$=\frac{n!}{i_1!\ldots i_k!}p_1^{i_1}\ldots p_k^{i_k}, \quad \text{gde} \quad i_1+i_2+\ldots+i_k=n. \tag{43}$$

Slučajni vektor s funkcijom vjerojatnosti (43) nazivamo *polinomijalno distribuiranim.*

11. NEPREKINUTI SLUČAJNI VEKTORI

Slučajni vektor nazivamo *neprekinutim*, ako se njegova funkcija vjerojatnosti može predočiti u obliku:

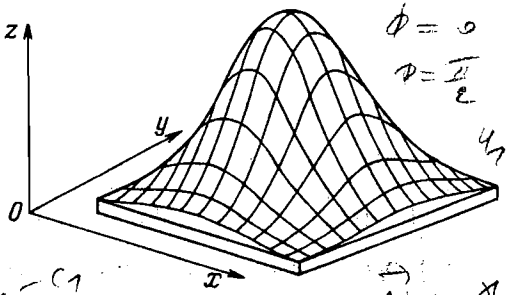
$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1 \ldots dt_n;$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ nazivamo *gustoćom razdiobe vektora* $(X_1, \ldots, X_n)$ ili također *kompatibilnom gustoćom* varijabli $X_1, \ldots, X_n$. Vjerojatnost da se slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ nalazi u području G n-dimenzionalnog prostora, možemo pomoću gustoće zapisati na slijedeći način:

$$\mathbf{P}((X_1, \ldots, X_n) \in G) = \int_G \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n. \tag{44}$$

Stoga gustoća mora zadovoljavati uvjet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = 1. \tag{45}$$



Sl. 432

Primjer 35. Jednolika razdioba. Za vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ kažemo da je jednoliko distribuiran u području G ako je njegova gustoća u G konstantna, a izvan G jednaka nuli. Prema (45) ta konstanta mora biti jednaka $1/V(G)$ gdje je $V(G)$ obujam područja G.

Primjer 36. Normalna razdioba. Za vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ kažemo da je normalno distribuiran ako ima gustoću oblika:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = C \cdot e^{-Q(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{46}$$

Ovdje je Q neka pozitivno definitna kvadratna forma od $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ gdje su a_i konstante. C se može odrediti iz uvjeta (45).

Ako je $n=2$ gustoća normalne razdiobe, može se svesti na slijedeći oblik (definiciju od a_k, σ_k, ρ vidi u D.13. na stranici 808; slika 432):

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \tag{47}$$

12. GRANIČNE RAZDIOBE

Neka je $F(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija razdiobe slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_n)$. Tada $\mathbf{P}(X_{i_1} < x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} < x_{i_k}) = F(c_1, \ldots, c_n)$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$, gdje je $c_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, c_{i_k} = x_{i_k}$, a svi ostali $c_j = +\infty$ nazivamo *k-dimenzionalnom graničnom razdiobom* $F(x_1, \ldots, x_n)$. Ona je funkcija razdiobe k-dimenzionalnog slučajnog vektora $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. Specijalno za $k=1$ dobivamo razdiobe pojedinih komponenata:

$$F(+\infty, +\infty, \ldots, x_i, +\infty, \ldots, +\infty) = \mathbf{P}(X_i < x_i) = F_i(x_i).$$

U diskretnom slučaju funkciju vjerojatnosti k-dimenzionalne granične razdiobe dobivamo sumiranjem onih indeksa koji su različiti od $i_1, \ldots, i_k$; u neprekinutom slučaju gustoća granične razdiobe dobiva se integriranjem varijabli kojima su brojevi različiti od $i_1, \ldots, i_k$.

Primjer 37. Neka je dana diskretna dvodimenzionalna slučajna varijabla (X_1, X_2) s funkcijom vjerojatnosti $p_{ik} = \mathbf{P}(X_1 = x_i^{(1)}, X_2 = x_k^{(2)})$. Tada se funkcije vjerojatnosti pojedinih komponenata dobivaju kao granične razdiobe:

$$\mathbf{P}(X_1 = x_i^{(1)}) = \sum_k p_{ik}, \qquad \mathbf{P}(X_2 = x_k^{(2)}) = \sum_i p_{ik}.$$

Primjer 38. Neka je zadana trodimenzionalna slučajna neprekinuta varijabla s gustoćom $f(x_1, x_2, x_3)$. Tada se, na primjer, gustoća vektora (X_1, X_2) dobiva kao trodimenzionalna granična razdioba:

$$g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_3.$$

Gustoća treće komponente također se dobiva kao granična razdioba:

$$h(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_2.$$

Postoji svega C_n^k k-dimenzionalnih graničnih razdioba.

13. MOMENTI VIŠEDIMENZIONALNE SLUČAJNE VARIJABLE

Od osobitog su interesa prvi i drugi moment. Ako je slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ diskretan, onda brojeve

$$v_j = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_j}^{(j)} p_{i_1, \ldots, i_n} \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{48}$$

nazivamo *prvim početnim momentom* od $(X_1, \ldots, X_n)$. U neprekinutom se slučaju prvi početni momenti definiraju formulom

$$v_j = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_j f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (j=1, \ldots, n); \tag{49}$$

v_j su matematičke nade pojedinih komponenata: $v_j = \mathbf{M}X_j$.

Drugi početni momenti v_{ij} *i drugi centralni momenti* μ_{jk} definiraju se na slijedeći način:

diskretni slučaj

$$v_{jk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_j}^{(j)} x_{i_k}^{(k)} p_{i_1, \ldots, i_n}, \tag{50}$$

$$\mu_{jk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n} (x_{i_j}^{(j)} - v_j)(x_{i_k}^{(k)} - v_k) p_{i_1, \ldots, i_n}; \tag{51}$$

neprekinuti slučaj

$$v_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{52}$$

$$\mu_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - v_j)(x_k - v_k) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{53}$$

Kažemo da *odgovarajući momenti postoje*, oko desne strane izraza (48) do (53) *apsolutno konvergiraju*. Imamo:

$$v_{jk} = \mathbf{M}(X_j X_k)$$

$$\mu_{jk} = \mathbf{M}[(X_j - \mathbf{M}X_j)(X_k - \mathbf{M}X_k)] = \mathbf{M}(X_j X_k) - \mathbf{M}X_j \mathbf{M}X_k = v_{jk} - v_j v_k.$$

Veličine μ_{jj} jednake su disperzijama pojedinih komponenata:

$$\mu_{jj} = \mathbf{D}X_j = \sigma_j^2.$$

Veličinu $\mu_{jk} = \operatorname{cov}(X_j, X_k)$, $j \neq k$, nazivamo *kovarijancom* (*momentom korelacije*) slučajnih varijabli X_j, X_k i označavamo sa $\operatorname{cov}(X_j, X_k)$. Matricu $\|\mu_{kj}\|_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}}$ nazivamo *matricom kovarijance*.

Parametar

$$\rho_{jk} = \frac{\operatorname{cov}(X_j, X_k)}{\sqrt{\mathbf{D}X_j \mathbf{D}X_k}} = \frac{\operatorname{cov}(X_j, X_k)}{\sigma_j \sigma_k} \tag{54}$$

nazivamo *koeficijentom korelacije* među X_j i X_k. On prima vrijednosti između -1 i $+1$.

Za dvije slučajne varijable X i Y kažemo da su *nekorelirane* ako je njihov koeficijent korelacije ili njihova kovarijanca jednaka nuli.

Primjer 39. Parametri iz formule (47) za gustoću dvodimenzionalne normalne razdiobe imaju slijedeće vrijednosti:

$$a_1 = \mathbf{M}X_1,$$

$$a_2 = \mathbf{M}X_2,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathbf{D}X_1},$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\mathbf{D}X_2}.$$

a koeficijent korelacije između X_1 i X_2 je

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}}.$$

Prilikom n-dimenzionalne normalne razdiobe za gustoću (46) imamo:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Ce^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)},$$

pri čemu su b_{ij} takvi da je forma pozitivno definitna. Tada parametri a_i i b_{ij} imaju slijedeće vrijednosti:

$$a_i = \mathbf{M}X_i, \qquad b_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \quad \text{gde} \quad \Delta = \det(\Delta_{ij})$$

(Δ_{ij}) je matrica algebarskog komplmenta matrice kovarijance. Tako je n-dimenzionalna normalna razdioba, kao i za jednodimenzionalnu, potpuno određena prvim i drugim momentom.

14. UVJETNA RAZDIOBA

Neka je (X, Y) slučajni vektor, a $F(x, y)$ njihova funkcija razdiobe.

Funkciju

$$F(x/y)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{P}(X<x,\ y\leqslant Y<y+h)}{\mathbf{P}(y\leqslant Y\leqslant y+h)} \tag{55}$$

nazivamo *uvjetnom razdiobom* od X uz uvjet da Y dobije vrijednost y. Analogno se definira $F(y/x)$.

U diskretnom se slučaju za uvjetnu funkciju vjerojatnosti dobije

$$\mathbf{P}(X=x_i/Y=y_k)=\frac{p_{ik}}{\sum_i p_{ik}},\qquad \mathbf{P}(Y=y_k/X=x_i)=\frac{p_{ik}}{\sum_k p_{ik}}. \tag{56}$$

U neprekinutom slučaju za uvjetne gustoće imamo

$$f(x/y)=\frac{f(x,\ y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx},\qquad f(y/x)=\frac{f(x,\ y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy}. \tag{57}$$

U nazivnicima od (56) i (57) su, prema tome, granične razdiobe komponenata koje određuju uvjet.

15. NEZAVISNOST SLUČAJNIH VARIJABLI

Analogno sa (9) slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ nazivamo *nezavisnim*, ako vrijedi

$$F(x_1, \ldots, x_n)=F_1(x_1)\ldots F_n(x_n), \tag{58}$$

gdje je $F_i(x_i)$ funkcija razdiobe i-te komponente X_i (jednolika granična razdioba). Dok u općem slučaju o kompatibilnoj razdiobi, ako su poznate razdiobe pojedinih komponenata, ne možemo ništa reći, dotle je u slučaju nezavisnosti $F(x_1, \ldots, x_n)$ potpuno određena pomoću razdioba pojedinih komponenata.

Primjer 40. Gađa se u metu. Pretpostavimo da vertikalni otklon X i horizontalni otklon Y (u odnosu na središte) imaju normalnu razdiobu $X \in N(x; 0, \sigma_1)$, $Y \in N(y; 0, \sigma_2)$.

Možemo uzeti da su X i Y nezavisni. Tada za gustoću vektora (X, Y) koji određuje mjesto u koje je pogodio metak, imamo:

$$f(x, y)=f_1(x)f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

Prema tome je razdioba od (X, Y) normalna s parametrima $a_1=a_2=0$, $\sigma_1, \sigma_2, \rho=0$.

Napomena. Nezavisnost se u konkretnim primjerima iz prakse ne ustanovljuje provjerom (58) već posebnim promatranjima ili statističkim testovima. Jednakost (58) se tada smatra posljedicom tih razmatranja.

Za nezavisne slučajne varijable vrijede neki vrlo važni teoremi o matematičkoj nadi i disperziji. Ti teoremi se često primjenjuju.

Ako su X i Y nezavisne varijable, onda je

$$\mathbf{M}(XY)=\mathbf{M}X\mathbf{M}Y. \tag{59}$$

Odavde i iz definicije kovarijancije odmah slijedi, da iz nezavisnosti od X i Y slijedi nekoreliranost X i Y.

Samo za normalnu razdiobu iz nekoreliranosti slijedi i nezavisnost, što postaje očitim, ako u (47) stavimo $\rho=0$ i primijenimo funkcionalnu jednakost za eksponente.

Disperzija sume nezavisnih slučajnih varijabli jednaka je zbroju disperzija tih varijabli, tj. $\mathbf{D}(X_1+\ldots+X_n)=\mathbf{D}X_1+\ldots\mathbf{D}X_n$, ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisni.

16. REGRESIJSKA ZAVISNOST

Za mnoge pojave u prirodi i tehnici tipične su stohastičke (slučajne) zavisnosti. Kažemo da između dvije slučajne varijable postoji stohastička zavisnost općenito tada kada postoje neki slučajni faktori koji utječu na obje slučajne veličine, i neki faktori koji djeluju samo na prvu ili samo na drugu slučajnu varijablu. Prema tome, ako vrijedi

$$X=f(Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_j),$$

$$Y=g(Z_1, \ldots, Z_m, Y_1, \ldots, Y_k),$$

onda su X i Y stohastički zavisni. U teoriji regresija osobit značaj ima zadaća: predskazivanje (proricanje) slučajne varijable Y_1 koja nas zanima, ako druge slučajne varijable, o kojima Y stohastički ovisi, dobivaju potpuno određene konkretne vrijednosti.

Krivulje regresije. Krivulje u ravnini x, y definirane jednadžbama

$$\bar{y}(x)=\mathbf{M}(Y/X=x), \qquad \bar{x}(y)=\mathbf{M}(X/Y=y),$$

nazivamo *krivuljama regresije* od Y u odnosu na X, kao i X u odnosu na Y. Pri tome je $\mathbf{M}(Y/X=x)$ uvjetna matematička nada od Y uz uvjet da X dobiva vrijednost x. Ako su X i Y neprekinuti imamo

$$\mathbf{M}(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)\,dy;$$

$$\mathbf{M}(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)\,dx.$$

Pri tome su $f(x/y)$ ili $f(y/x)$ uvjetne gustoće. Smisao krivulje regresije je: *najbolje predskazanje od Y, uz uvjet da je $X=x_0$, jest $\bar{y}(x_0)$*. Pri tome „najbolje" znači da za proizvoljnu funkciju $u(X)$ vrijedi $\mathbf{M}(Y-u(X))^2 \geqslant \mathbf{M}(Y-\bar{y}(X))^2$. To se može reći i ovako: funkcija regresije $\bar{y}(x)$ je funkcija koja minimizira srednju kvadratnu pogrešku predskazivanja od Y na osnovi vrijednosti X. Na analogan se način može interpretirati $\bar{x}(y)$.

Linearne regresije. Za slučajne varijable X i Y kažemo da su u *linearnoj korelaciji* ako su krivulje regresije pravci. Ove „linearne regresije" zadaju se slijedećim jednadžbama:

$$\text{regresija od } Y \text{ u odnosu na } X\text{:}\quad y=\mu_Y+\beta_{Y/X}(x-\mu_X), \tag{60}$$

$$\text{regresija od } X \text{ u odnosu na } Y\text{:}\quad x=\mu_X+\beta_{X/Y}(y-\mu_Y), \tag{61}$$

$\beta_{Y/X}$ i $\beta_{X/Y}$ nazivamo (teoretskim) *koeficijentima regresije*. Oni su određeni slijedećim izrazima:

$$\beta_{Y/X}=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho, \qquad \beta_{X/Y}=\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho. \tag{62}$$

Pri tome je ρ koeficijent korelacije između X i Y:

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}. \tag{63}$$

i $\sigma_X=\sqrt{\mathbf{D}X}$, $\sigma_Y=\sqrt{\mathbf{D}Y}$. Parametri μ_X i μ_Y iz jednadžbi (60) i (61) su matematičke nade od X ili Y: $\mu_X=\mathbf{M}X$ i $\mu_Y=\mathbf{M}Y$.

Kada X i Y nisu u linearnoj korelaciji prema jednadžbama (60) i (61) i primjenom jednadžbi (62) i (63) možemo naći dvije jednadžbe pravca. Njih tada također nazivamo krivuljama regresije i one su linearne aproksimacije pravih krivulja regresije.

17. FUNKCIJE SLUČAJNIH VARIJABLI

Neka je zadan neprekinuti slučajni vektor $(X,\ Y)$ i neka je $f(x,\ y)$ njegova gustoća. Treba naći razdiobu slučajnih veličina $X+Y$, $X\cdot Y$, $\frac{X}{Y}$.

Suma $X+Y$ je također neprekinuta slučajna varijabla i ima gustoću

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ z-x)\,dx.$$

Ako su $X+Y$ nezavisne tako da je $f(x,\ y)=f_1(x)f_2(y)$, onda je

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx. \tag{64}$$

Dakle, gustoća sume je *konvolucija* gustoća pojedinih sumanada.

Primjer 41. Neka $(X,\ Y)$ ima normalnu razdiobu, a $f(x,\ y)$ je zadana formulom (47). Tada za gustoću od $X+Y$ dobijemo

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-(a_1+a_2))^2}{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}.$$

Dakle, $Z=X+Y$ opet ima normalnu razdiobu s parametrima $\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$, a_1+a_2.

U nezavisnom slučaju vrijedi i obrat: ako suma dviju nezavisnih slučajnih varijabli ima normalnu razdiobu, onda i pojedini sumandi imaju normalnu razdiobu.

Produkt. Neka je (X, Y) slučajni vektor i $Z=X\cdot Y$. Tada za gustoću imamo

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x.$$

Kvocijent. Neka je (X, Y) slučajni vektor; kvocijent $\frac{X}{Y}$ je neka slučajna neprekinuta varijabla s funkcijom gustoće:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} xf(zx, x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0} xf(zx, x)\,\mathrm{d}x.$$

E. KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

Pod *karakterističnom funkcijom* $\psi(t)$ slučajne varijable X razumijevamo matematičku nadu slučajne varijable e^{itX}:

$$\psi(t)=\mathbf{M}(e^{itX}). \tag{65}$$

gdje je t realni parametar.

Ako je $F(x)$ funkcija razdiobe od X, onda je

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}F(x). \tag{66}$$

Za diskretnu razdiobu imamo

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{itx_k}p_k \tag{67}$$

(Fourierov red s koeficijentima p_k). Za neprekinutu razdiobu vrijedi

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{68}$$

(Fourierov integral).

Primjer 42. Neka se X podvrgava Poissonovu zakonu s parametrom λ. Tada karakteristična funkcija ima oblik

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}. \tag{69}$$

Primjer 43. Neka X ima jednoliku razdiobu na $(-a, +a)$. Tada imamo

$$\psi(t)=\int_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}\mathrm{d}x=\frac{\sin at}{at}.$$

Primjer 44. $X\in N(x; a, \sigma)$. Tada će karakteristična funkcija biti

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \tag{70}$$

18. SVOJSTVA KARAKTERISTIČNIH FUNKCIJA

1) Karakteristična funkcija je jednoliko neprekinuta na čitavoj realnoj osi.

2) Za svaku karakterističnu funkciju $\psi(t)$ vrijedi

$$\psi(0)=1. \qquad |\psi(t)|\leqslant 1 \qquad (-\infty<1<\infty).$$

3) Ako je $Y=aX+b$ s konstantama a i b, onda je $\psi_Y(t)=\psi_X(at)\,e^{itb}$ (ψ_X je karakteristična funkcija od X).

Pomoću karakterističnih funkcija možemo lako izračunati momente.

Ako slučajna varijabla X ima moment reda n, onda je karakteristična funkcija od X n-puta diferencijabilna za t i za $k\leqslant n$ vrijedi

$$\psi^{(k)}(0)=i^k\mathbf{M}x^k=i^k\nu_k. \tag{71}$$

Primjer 45. Neka X ima normalnu razdiobu s parametrima a i σ. Treba odrediti $\mathbf{M}X$ i $\mathbf{D}X$. Prema (70) imamo $\psi(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Tada na osnovu (71) imamo da je $i\nu_1=\psi'(0)=ia$, i $-\nu_2=\psi''(0)=-\sigma^2-a^2$. Iz toga slijedi da je $\mathbf{M}X=\nu_1=a$, i $\mathbf{D}X=\nu_2-\nu_1^2=\sigma^2+a^2-a^2=\sigma^2$.

U primjenama ima važni značaj činjenica da je karakteristična funkcija sume nezavisnih slučajnih varijabli jednaka produktu njihovih karakterističnih funkcija.

Ako su X_1 i X_2 neprekinute, onda je, prema (64), gustoća sume jednaka konvoluciji obiju gustoća. To svojstvo, prema tome, nije ništa drugo nego teorem o konvoluciji Fourierove transformacije (vidjeti u V.B. na stranici 754 i dalje).

Primjer 46. Primjena teorema o konvoluciji. Neka je X binomna razdioba s parametrima n i p. Ttreba naći karakterističnu funkciju slučajne varijable X. Kao što je poznato, X se može tumačiti kao broj

izvršenja događaja A u n nezavisnih pokusa, ako je vjerojatnost izvršenja događaja A u svakom pojedinom pokusu jednaka p. Stoga se X može predočiti u obliku

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

gdje je $X_j=\begin{cases}0, \text{ ako } A \text{ nije dobiven u } j\text{-tom pokusu,}\\ 1, \text{ ako je } A \text{ dobiven u } j\text{-tom pokusu.}\end{cases}$

Prema uvjetu X_j su nezavisne slučajne varijable. Zato, prema teoremu o konvoluciji imamo da je $\psi_X(t)=\prod_{j=1}^{n}\psi_{X_j}(t)$, pri čemu je $\psi_{X_j}(t)=\mathbf{M}e^{itX_j}=e^{it\cdot 0}\cdot q+e^{it\cdot 1}\cdot p=q+pe^{it}$; na taj je način

$$\psi_X(t)=(q+p\cdot e^{it})^n. \tag{72}$$

19. FORMULA INVERTIRANJA I TEOREM O JEDINSTVENOSTI

Neka je $F(x)$ funkcija razdiobe, a $\psi(t)$ karakteristična funkcija slučajne varijable X. Ako su x_1, x_2 točke u kojima je $F(x)$ neprekinuta, onda imamo

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{e^{itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\psi(t)\,dt. \tag{73}$$

Ako je X neprekinuta, a $f(x)$ gustoća od $F(x)$, onda se izraz (73) može napisati u ovom jednostavnijem obliku

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\psi(t)\,dt. \tag{74}$$

Na taj se način gustoća iz karakteristične funkcije dobiva inverznom transformacijom Fourijerove transformacije.

Iz formule invertiranja slijedi da je funkcija razdiobe jednoznačno određena njenom karakterističnom funkcijom.

Ako je na primjer na bilo koji način dobivena za X karakteristična funkcija $e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$, onda prema teoremu jedinstvenosti i formule (70) slijedi da je $X\in N(n;\,a,\,\sigma)$.

Primjer 47. Neka dvije nezavisne slučajne varijable imaju normalnu razdiobu: $X\in N(x;\,a_1,\,\sigma_1)$, $Y\in N(y;\,a_2,\,\sigma_2)$. Treba naći razdiobu za $X+Y$. Kako je

$$\psi_X(t)=e^{ia_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}},\quad \psi_Y(t)=e^{ia_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}},$$

onda prema teoremu o konvoluciji imamo

$$\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\,\psi_Y(t)=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}.$$

Prema teoremu jedinstvenosti jedinstvena razdioba kojoj je to funkcija razdiobe je $N(x+y;\,a_1+a_2,\,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$. Na taj način i $X+Y$ ima normalnu razdiobu s parametrima $a=a_1+a_2$ i $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

Primjer 48. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable koje zadovoljavaju Poissonov zakon:

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1},\qquad \mathbf{P}(Y=k)=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}.$$

Treba naći razdiobu sume $X+Y$. Prema (69) imamo

$$\psi_X(t)=e^{\lambda_1(e^{it}-1)},\qquad \psi_Y=e^{\lambda_2(e^{it}-1)}.$$

Zbog nezavisnosti i teorema o konvoluciji imamo

$$\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\,\psi_Y(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}. \tag{75}$$

Prema teoremu jedinstvenosti, jedinstvena razdioba, kojoj je (75) karakteristična funkcija, je Poissonova razdioba s paramtrom $\lambda_1+\lambda_2$. Suma dviju nezavisnih slučajnih varijabli s Poissonovom razdiobom je prema tome opet slučajna veličina s Piossonovom razdiobom i parametrima $\lambda_1+\lambda_2$.

Napomena. Ovdje također vrijedi obrat: ako suma dviju nezavisnih slučajnih varijabli ima Poissonovu razdiobu, onda i njeni sumandi imaju Poissonovu razdiobu.

20. GRANIČNI TEOREM ZA KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

Za niz $\{F_n(x)\}$ funkcija razdioba kažemo da *konvergira u osnovnom* funkciji razdiobe $F(x)$, ako je u svim točkama neprekinutosti $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$.

U diskretnom slučaju konvergencija u osnovnom od $F_n(x)$ prema $F(x)$ znači da odgovarajuće funkcije vjerojatnosti konvergiraju: $p_k^{(n)} \to p_k$ za sve k.

U neprekinutom slučaju iz konvergencije u osnovnom slijedi (ako su $f_n(x)$ neprekinute) $f_n(x) \to f(x)$ za sve x.

Ako niz $\{F_n(x)\}$ funkcija razdiobe konvergira u osnovnom funkciji razdiobe $F(x)$, onda niz $\{\psi_n(t)\}$ odgovarajućih karakterističnih funkcija konvergira karakterističnoj funkciji $\psi(t)$ funkcije $F(x)$. Ova je konvergencija u svakom konačnom intervalu jednolika.

Veoma je značajan obrat: ako niz karakterističnih funkcija $\{\psi_n(t)\}$ konvergira neprekinutoj funkciji $\psi(t)$, onda niz $\{F_n(x)\}$ odgovarajućih funkcija razdiobe konvergira nekoj funkciji razdiobe $F(x)$, a $\psi(t)$ je karakteristična funkcija od $F(x)$.

Napomena. Uvjet obratnog teorema je ispunjen, posebice ako je ispunjen jedan od dva uvjeta:

1) $\{\psi_n(t)\}$ konvergira na svakom konačnom intervalu funiciji ψ (t),
2) $\{\psi_n(t)$ konvergira karakterističnoj funkciji $\psi(t)$.

Primjer 49. Neka je $\mathbf{P}(n, k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ niz binomnih razdioba s parametrima n, p_n i lim $np_n = \lambda$. Kojoj razdiobi konvergira taj niz? Karakteristična funkcija $\psi_n(t) = (q_n + e^{it} p_n)^n$ je odgovarajući niz karakterističnih funkcija. Taj niz, očito, konvergira karakterističnoj funkciji $\psi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Dakle, granična razdioba je Poissonova razdioba

$$p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

21. FUNKCIJE IZVODNICE

Za diskretne slučajne varijable, koje mogu primati samo vrijednosti 0, 1, 2, ..., često se umjesto karakterističnih funkcija primjenjuju funkcije izvodnice.

Neka je p_k funkcija vjerojatnosti neke diskretne slučajne varijable X navedenog tipa, a z kompleksni parametar. Tada $\varphi(z) = \sum_k p_k z^k$ nazivamo *funkcijom izvodnice* slučajne varijable X. Funkcija $\varphi(z)$ je analitička u $|z| < 1$. Njezin limes za $z \to e^{it}$ daje karakterističnu funkciju od X.

Funkcije izvodnice imaju svojstva koja su analogna svojstvima karakteristične funkcije.

22. KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE VIŠEDIMENZIONALNIH SLUČAJNIH VARIJABLI

Pod karakterističnom funkcijom n-dimenzionalne slučajne varijable razumijevamo matematičku nadu od $\exp\left(i \sum_k t_k X_k\right)$:

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{M}\left(\exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k X_k\right)\right). \tag{76}$$

gdje su $t_1, \ldots, t_n$ realni parametri.

Primjer 50. Karakteristična funkcija n-dimenzionalne normalne razdiobe ima oblik

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left(i \sum_k a_k t_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk} t_j t_k\right), \tag{77}$$

gdje je $\| b_{jk} \|$ *matrica kovarijance*. Specijalno za $n=2$ imamo

$$\psi(t_1, t_2) = \exp\left[i(a_1 t_1 + a_2 t_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\varrho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right]. \tag{78}$$

Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, onda je

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^n \psi_k(t_k),$$

gdje su ψ_k karakteristične funkcije pojedinih komponenata X_k.

Ako je $\mathbf{Z} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, a $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ karakteristična funkcija vektora $(X_1, \ldots, X_n)$, onda je $\psi_z(t) = \psi(t, t, \ldots, t)$.

F. GRANIČNI TEOREMI

23. ZAKON VELIKIH BROJEVA

Za niz $\{X_n\}$ slučajnih varijabli kažemo da *konvergira po vjerojatnosti* slučajnoj varijabli X, ako za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$.

Za niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$ kažemo da zadovoljava *slabi zakon velikih brojeva* ako za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{M}X_k\right| < \varepsilon\right) = 1; \tag{79}$$

drugim riječima, ako $\mathbf{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{M}X_k$ konvergira k 0 „po vjerojatnosti".

Za izvod slabog zakona velikih brojeva važna je nejednakost Čebiševa. Neka je X slučajna varijabla s konačnom disperzijom. Tada za sve $\varepsilon>0$ vrijedi

$$\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{80}$$

Teorem Čebiševa. Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz u parovima nezavisnih slučajnih varijabli kojima su disperzije omeđene istim brojem, tj. $\mathbf{D}X_k\leqslant C$ za svaki k, onda taj niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Odavde izravno slijedi *Bernoullijev teorem*: neka je m broj izvršenja događaja A u n nezavisnih pokusa i neka u svakom od tih pokusa A ima vjerojatnost p. Tada učestalost $\frac{m}{n}=\mathbf{W}_n(A)$ teži „po vjerojatnosti" prema p, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|\mathbf{W}_n(A)-p|<\varepsilon)=1 \tag{81}$$

za sve $\varepsilon>0$.

Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz u parovima nezavisnih slučajnih varijabli s jednakim matematičkim nadama $\mathbf{M}X_1=\mathbf{M}X_2=\ldots=a$, a $\mathbf{D}X_k$ su jednoliko omeđeni, onda za svaki $\varepsilon>0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{82}$$

Relacija (82) je teorijska osnova pravila o aritmetičkoj sredini pri mjerenjima. Ako treba izmjeriti nepoznatu veličinu a, onda radi slučajnih pogrešaka mjerenje ponavljano n puta, pri čemu su pojedina mjerenja međusobno nezavisna; k-to mjerenje može biti opisano slučajnom varijablom X_k. Ako u procesu mjerenja nema sistematske pogreške, onda je $\mathbf{M}X_k=a$. Tada se pema (82) aritmetička sredina izmjerenih vrijednosti, za dovoljno velike n, s vjerojatnostima po volji bliskim 1, dobiva vrijednost koja po volji točno aproksimira traženu veličinu a.

Za niz $\{X_n\}$ slučajnih varijabli kažemo da *gotovo sigurno konvergira* slučajnoj veličini X ako je $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1$.

Za niz $X_1, X_2, \ldots$ slučajnih varijabli kažemo da zadovoljava *jaki zakon velikih brojeva* ako vrijdi

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}X_k\right)=0\right)=1, \tag{83}$$

drugim riječima, ako $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}X_k$ „gotovo sigurno" konvergira prema 0.

Teorem Kolmogorova. Ako niz $\{X_n\}$ međusobno nezavisnih slučajnih događaja zadovoljava uvjet $\sum_{n=1}^{n}\frac{\mathbf{D}X_n}{n^2}<\infty$, tada on zadovoljava jaki zakon velikih brojeva.

O vezi između slabog i jakog zakona možemo reći slijedeće: ako niz $\{X_n\}$ slučajnih varijabli zadovoljava jaki zakon, onda on zadovoljava i slabi, ali obrnuto ne vrijedi.

24. MOIVRE-LAPLACEOV GRANIČNI TEOREM

Lokalni granični teorem. Ako je vjerojatnost ostvarivanja događaja A u n nezavisnih pokusa konstantna i jednaka $p\,(0<p<1)$, onda vjerojatnost $\mathbf{P}(n, k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ da se prilikom tih pokusa pojavi događaj A točno k puta, zadovoljava relaciju

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{P}(n, k)}{(1/(\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}))\,e^{-x^2/2}}=1, \tag{84}$$

gdje je $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Drugim riječima: binomno distribuirana slučajna veličina je asimptotski normalno distribuirana s parametrima $a=np$ i $\sigma=\sqrt{npq}$.

Primjer 51. Neka je vjerojatnost da se u proizvodnji pojavi pogrešan proizvod jednaka 0,005. Kolika je vjerojatnost da će među 10000 proizvedenih komada biti 40 pogrešnih? Dakle, treba odrediti $\mathbf{P}(n, k)$ za $n=10000$, $k=40$, $p=0{,}005$. U skladu sa (84) imamo:

$$\mathbf{P}(n, k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{npq}\right)^2}, \qquad \sqrt{npq}=7{,}05,$$

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=-1{,}42.$$

Slijedi da je

$$\mathbf{P}(n, k)\approx\frac{1}{7{,}05}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1{,}42)^2}.$$

U tablici na stranici 99 očitamo $\varphi(1{,}42)=0{,}1456$. Prema tome je $\mathbf{P}(n, k)=\frac{0{,}1456}{7{,}05}\approx 0{,}0206$. Točna je vrijednost jednaka 0,0197.

Integralni granični teorem. Neka je X binomno distribuirana slučajna varijabla s parametrima n i p. (Dakle, X možemo tumačiti kao pojavu događaja A u n nezavisnih pokusa pri čemu je vjerojatnost u svakom pojedinom pokusu jednaka $\mathbf{P}(A)=p$). Tada za $-\infty \leqslant a<b \leqslant +\infty$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(q \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \Phi_0(b) - \Phi_0(a). \tag{85}$$

Primjer 52. Pretpostavimo da postoji situacija opisana u primjeru 51. Traži se vjerojatnost da u sanduku s 10000 proizvedenih komada nema više od 70 s greškom.

$$\mathbf{P}(X \leqslant 70) = \mathbf{P}\left(\frac{-50}{\sqrt{49{,}75}} \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(-7{,}09 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leqslant 2{,}84\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \Phi_0(2{,}84) - \Phi_0(-7{,}09).$$

Kako je $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, to je $\mathbf{P}(X \leqslant 70) = \Phi_0(2{,}84) + \Phi_0(7{,}09)$. Iz tablice za Φ_0 na stranici 101 očitamo $\Phi_0(2{,}84) = 0{,}4977$; vrijednost za $\Phi_0(7{,}09)$ ne možemo naći u tablici, ali ta će se vrijednost veoma malo razlikovati od 0,5. Prema tome dobivamo da je $\mathbf{P}(X \leqslant 70) \approx 0{,}9977$.

25. CENTRALNI GRANIČNI TEOREM

Neka je $\{X_n\}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Neka je

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_i - \mathbf{M}X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}}. \tag{86}$$

Veličine Z_n nazivamo *normiranim* i *centriranim* sumama ($\mathbf{D}Z_n = 1$, $\mathbf{M}Z_n = 0$). Neka su $\Phi_n(x)$ funkcije razdiobe za Z_n, a $F_k(x)$ funkcije razdiobe za X_k. Nadalje, uvedimo oznaku $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i$. Nužan i dovoljan uvjet da vrijedi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \tag{87}$$

dan je sa (*uvjet Lindeberga*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X-\mathbf{M}X_k| > \varepsilon B_n} (X - \mathbf{M}X_k)^2\, dF_k(x) = 0. \tag{88}$$

Napomena. Uvjet je ispunjen posebice ako svi X_k imaju istu razdiobu sa konačnim prvim i drugim momentom.

Uvjet (88) znači da su pojedini sumandi $\frac{X_i - \mathbf{M}X_i}{B_n}$, od kojih se prema (86) sastoji Z_n, ravnomjerno mali. U ovom se slučaju smisao centralnoga graničnog teorema sastoji u slijedećem. Ako se slučajna varijabla može predočiti u obliku zbroja velikog broja međusobno vezanih sumanada, od kojih svaki daje u sumu neznatan doprinos, onda je ta suma približno normalno distribuirana.

Primjer 53. Pretpostavimo da obavljamo neko mjerenje i neka je X slučajna pogreška pri tom mjerenju. Tada se X dobiva kao skup velikog broja faktora, koji ne zavise jedan od drugog i koji generiraju pogreške; svaki od tih faktora ima na pogrešku mali utjecaj. Zato možemo smatrati da je X normalne razdiobe.

Primjer *54.* Neka je X duljina lista breze, slučajno odabranog iz nekog skupa otrgnutih listova. Tada je X slučajna varijabla koja se dobije superpozicijom mnogih malih faktora koji jedan od drugoga ne zavise. Može se stoga uzeti da je X varijabla normalne razdiobe.

II. MATEMATIČKA STATISTIKA

A. UZORCI

Zadaća matematičke statistike je da iz poznavanja svojstava podskupa nekog skupa izvodi tvrdnje o svojstvima čitavoga tog skupa koji nazivamo *osnovnim (statističkim) skupom.* U osnovnom skupu obično nas zanima neko obilježje koje je uvjetovano slučajnošću i može biti kvalitativno ili kvantitativno.

Primjer 55. Automatska tokarilica proizvodi osovine. Skup svih osovina proizvedenih u određenim stalnim proizvodnim uvjetima čini osnovni skup. Ako je obilježje koje nas zanima, na primjer, promjer (dijametar) osovine, onda je to kvantitativno obilježje.

Primjer 56. Na pokretnoj traci proizvode se meci za lovačke puške. Skup svih metaka proizvedenih u određenim stalnim proizvodnim uvjetima tvori osnovni skup. Ako nas zanima sposobnost metka da li će se aktivirati ili će zatajiti, onda je to kvalitativno obilježje.

Parametar nekoga statističkog skupa, koji nas zanima, može se u matematičkom modelu prikazati kao neka slučajna varijabla X. U kvantitativnom slučaju X je sâmo to obilježje; za kvalitativno obilježje, tipa „dobar – loš" X može se, primjerice, definirati ovako:

$$X=\begin{cases}0, \text{ ako je „dobar",}\\ 1, \text{ ako je „loš".}\end{cases}$$

Pod *slučajnim uzorkom dimenzije* n razumijevamo slučajni izbor n objekata osnovnog skupa, pri čemu izbori pojedinih objekata ne ovise jedan o drugome. Rezultat slučajnog izbora dimenzije n je skup $(x_1,\ldots, x_n)$ *vrijednosti obilježja.*

Primjer 57. Skup (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) je uzorak dimenzije 10 iz partije metaka. Prema tome, ovdje imamo 9 dobrih i jedan metak s pogreškom.

Činjenica da se može uzeti mnogo uzoraka dimenzije n i dobiti različite skupove vrijednosti obilježja, vodi na slijedeću apstraktnu definiciju pojma uzorka.

Neka je zadan neki skup u kojemu obilježje X ima razdiobu $F(x)$. Tada n-dimenzionalni slučajni vektor $(X_1,\ldots, X_n)$, u kojem su X_i međusobno neovisni i svi imaju razdiobu $F(x)$, nazivamo *matematičkim uzorkom* dimenzije n. Svaka realizacija $(x_1,\ldots, x_n)$ slučajnog vektora $(X_1,\ldots, X_n)$ je uzorak.

Uvijek kada to ne vodi u nedoumicu, pridjev „matematički" ispuštamo.

1. HISTOGRAM I EMPIRIČKA FUNKCIJA RAZDIOBE

Neka imamo uzorak $(x_1,\ldots, x_n)$, takozvanu *tablicu promatranih vrijednosti* iz nekog općeg skupa s obilježjem X. Neka je razdioba od X nepoznata. Da bismo dobili prvu predodžbu o toj razdiobi za kvantitativno obilježje, sastavljamo takozvani *histogram.* Realnu os razdijelimo na konačan broj susjednih intervala $\Delta_1,\ldots, \Delta_k$. Zatim prebrojimo koliko mnogo vrijednosti pada u Δ_j $(1\leqslant j\leqslant k)$. Neka su to brojevi m_j. Te brojeve nazivamo *grupnim učestalostima (frekvencijama).* Iznad Δ_j nacrtamo pravokutnik visine m_j/n (relativne učestalosti padanja u intervale). Tako dobiveni stepeničasti graf nazivamo *histogramom* uzorka.

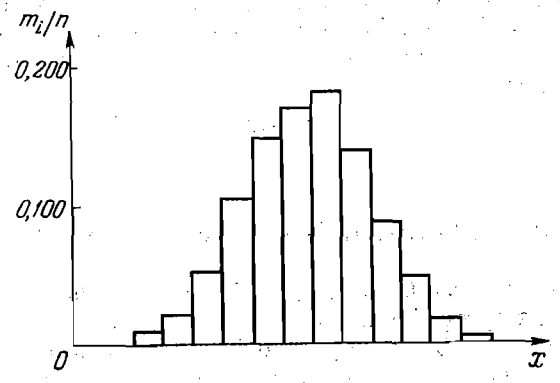
Primjer 58. Iz tekuće proizvodnje automata odabrano je 350 valjaka. Neka je obilježje X odstupanje promjera valjka od nominalne dimenzije. Tablica 1 daje odgovarajuću statističku razdiobu.

Tablica 1.

Statistička razdioba odstupanja od nominale 350 valjaka iz proizvodnje automata

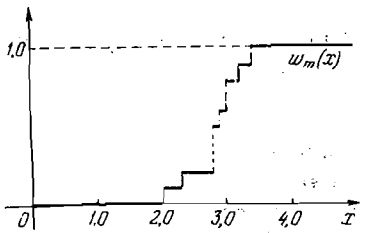
j	Δ_j u mm	m_j	m_j/n
1	od −0,230 do −0,210	3	0,009
2	od −0,210 do −0,190	8	0,023
3	od −0,190 do −0,170	19	0,054
4	od −0,170 do −0,150	37	0,106
5	od −0,150 do −0,130	53	0,151
6	od −0,130 do −0,110	60	0,171
7	od −0,110 do −0,090	64	0,183
8	od −0,090 do −0,070	49	0,140
9	od −0,070 do −0,050	31	0,088
10	od −0,050 do −0,030	17	0,049
11	od −0,030 do −0,010	7	0,020
12	od −0,010 do +0,010	2	0,006
	Svega	350	1,000

Na slici 433 prikazan je odgovarajući histogram.



Sl. 433

Svrsishodan način da se dobije predodžba o razdiobi X, koji možemo primijeniti i pri kvantitativnim obilježjima, jest konstrukcija *empirijske funkcije razdiobe*. Za zadani realni broj X prebrojimo koliko je vrijednosti manje od x. Označimo taj broj sa $m_n(x)$.



Sl. 434

Funkciju $\overline{F}_n(x)=\dfrac{m_n(x)}{n}$ nazivamo *empirijskom funkcijom razdiobe uzorka* $(x_1,\ldots, x_n)$. Ona je stepenična funkcija.

Primjer 59. Neka su pri tovljenju 10 životinja registrirani slijedeći prirasti težini u kilogramima: 2,0; 2,8; 2,3; 3,4; 2,9; 2,8; 3,0; 3,2; 3,0; 2,8. Na slici 434 predočena je odgovarajuća empirijska funkcija razdiobe.

$\overline{F}_n(x)$ možemo smatrati kao aproksimaciju prave razdiobe $F(x)$ osnovnog skupa. Označimo sa

$$D_n=\max_{-\infty<x<+\infty}|\overline{F}_n(x)-F(x)|. \tag{89}$$

Tada je dokazano (Kolmogorov), da za proizvoljne neprekinute funkcije razdiobe vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(D_n-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)=Q(\lambda),$$

gdje je $Q(\lambda)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$. Odavde slijedi da za $n\to\infty$ skoro sigurno D_n teži prema 0; drugim riječima, za $n\to\infty$ niz $\overline{F}_n(x)$ empirijskih funkcija razdiobe gotovo sigurno uniformno teži funkciji razdiobe $F(x)$ obilježja X u osnovnom skupu.

2. FUNKCIJA UZORKA

Neka je $(X_1,\ldots, X_n)$ matematički uzorak. Funkciju $Z_n=Z(X_1,\ldots, X_n)$ nazivamo *funkcijom uzorka*. Ona je i slučajna varijabla.

Primjer 60. Neka je $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Realizaciju $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ za konkretni uzorak nazivamo *empirijskom sredinom* uzorka $(x_1,\ldots, x_n)$.

Primjer 61. $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. Realizaciju $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ nazivamo *empirijskom disperzijom* uzorka $(x_1,\ldots, x_n)$. Pitanje razdiobe funkcije uzorka je osnovna zadaća matematičke statistike.

Kada imamo *mali uzorak* (n je relativno malen), od interesa je promatrati razdiobu funkcije uzorka Z_n. Kada imamo veliki uzorak (n je velik), dovoljno je znati asimptotsku razdiobu od Z_n, tj. graničnu razdiobu od Z_n kada $n\to\infty$.

Ne postoji opći kriterij koji daje odgovor na pitanje kada uzorak možemo smatrati velikim, a kada malim. U isto vrijeme kada razdiobu jedne funkcije uzorka već za $n=30$ možemo vrlo dobro aproksimirati asimptotskom razdiobom, neku drugu funkciju uzorka i za $n=100$ je nemoguće slično aproksimirati.

Primjer 62. Neka je obilježje X normalne razdiobe po $N(x, a, \sigma)$. Tada je $\overline{X}$ normalne razdiobe po $N(x; a, \sigma/\sqrt{n})$.

Primjer 63. Neka je $\mathbf{D}X<\infty$. Tada je $\overline{X}$ asimptotski normalne razdiobe po $N\left(x; \mathbf{M}X, \sqrt{\dfrac{\mathbf{D}X}{n}}\right)$.

Taj primjer pokazuje da su za određivanje asimptotske razdiobe nužne dosta slabe pretpostavke koje su praktički gotovo uvijek ispunjene. Da bismo odredili točnu razdiobu funkcije uzorka, nužno je da poznajemo razdiobu obilježja X osnovnog skupa, kako to pokazuje primjer 62.

3. NEKE VAŽNE RAZDIOBE

χ^2-razdioba. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, gdje je $X_i \in N(x; a, \sigma)$ za sve i. N-torku $(X_1, \ldots, X_n)$ možemo tumačiti kao uzorak dimenzije n osnovnog skupa, u kojoj obilježje X ima razdiobu po $N(x; a, \sigma)$. Razmotrimo funkciju uzorka $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$. Razdiobu te veličine nazivamo *χ^2-razdiobom* sa n stupnjeva slobode. Tablica 2 sadrži gustoću razdiobe za χ^2 i neke funkcije uzorka, koje su tijesno povezane sa χ^2.

Tablica 2

Neke razdiobe povezane sa χ^2

Veličina	Gustoća razdiobe za $x \geqslant 0$
$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$	$\frac{x^{(n/2)-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$
$\frac{1}{n}\chi^2 = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$	$\frac{(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{(n/2)-1}e^{-nx/2}$
$\chi = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$	$\frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-x^2/2}$
$\zeta = \frac{\chi}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$	$\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma(n/2)}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-nx^2/2}$

Neka je $T = X/Y$ s nezavisnim X i Y, gdje je X normalne razdiobe po zakonu $N(x; 0, 1)$, a $Y = \chi/\sqrt{n}$ (sa n stupnjeva slobode). Tada razdiobu T nazivamo *t-razdiobom* ili *Studentovom razdiobom* sa n stupnjeva slobode. Njezina je gustoća dana sa

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \tag{90}$$

χ^2 i t-razdioba su tabelirane χ^2 do $n = 30$, i to zato jer je $\sqrt{2\chi^2}$ asimptotske razdiobe sa $N(x; \sqrt{2n-1}, n)$, a ta se aproksimacija za $n = 30$ pokazala dovoljno točnom (tablice 26. i 27. na stranicama 102 do 104).

Neka su nezavisne slučajne varijable X_i $(i = 1, \ldots, n_1)$ i Y_j $(j = 1, \ldots, n_2)$ normalne razdioe po zakonu $N(x; 0, \sigma)$. Uvedimo razdiobu

$$F = \frac{\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2}{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j-1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}. \tag{91}$$

Označimo da je $r_1 = n_1 - 1$, $r_2 = n_2 - 1$. Razdiobu F nazivamo *F-razdiobom* sa stupnjevima slobode (r_1, r_2) (tablica 29. na stranici 106).

Stavimo da je $Z = \log\sqrt{F}$. Razdiobu Z nazivamo *Z-razdiobom* sa stupnjevima slobode (r_1, r_2). (Tablica 28. na stranici 105).

B. PROCJENA PARAMETARA

U tvornici se na tekućoj vrpci proizvode puščani meci. Neka je vjerojatnost da je odabrani metak neispravan jednaka p. Da se točno odredi p, trebalo bi ispucati sve metke, a to ne bi bio razuman način provjere. Da se procijeni veličina p treba odabrati neki uzorak. Obilježje X je kvalitativno;

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ako je metak ispravan,} \\ 1, & \text{ako je metak neispravan.} \end{cases}$$

Tada $MX = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$; radi se prema tome o procjeni MX pomoću izabranog uzorka. Promotrimo funkciju uzorka

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

koja ima značenje relativne učestalosti neispravnog metka u uzorku dimenzije n. Ako se uzorak realizira, onda je

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

prema zakonu velikih brojeva, približna vrijednost od p. U općem slučaju zadaća procjene nepoznatog parametra γ (koji je na bilo koji način povezan s osnovnim skupom, na primjer $\gamma=\mathbf{M}X$) na osnovu uzorka znači slijedeće. Nužno je zadati funkciju uzorka, realizacija koje se u izvjesnom smislu može shvatiti kao aproksimacija od γ. Takvu funkciju uzorka nazivamo *točkovnom procjenom od* γ.

4. SVOJSTVA TOČKOVNIH PROCJENA

Procjenu $\Gamma(X_1,\ldots, X_n)$ parametra γ nazivamo *osnovnom*, ako $\Gamma(X_1,\ldots, X_n)$ konvergira po vjerojatnosti parametra γ, tj. ako za proizvoljni $\varepsilon>0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|\Gamma(X_1,\ldots, X_n)-\gamma|\leqslant\varepsilon)=1.$$

Primjer 64.

1) $\overline{X}$ je osnovna procjena od $\mathbf{M}X$.
2) S^2 je osnovna procjena za $\mathbf{D}X=\sigma^2$.

Procjenu nazivamo *stabilnom* ako je njena matematička nada jednaka parametru kojeg procjenjujemo.

Primjer 65.

1) $\mathbf{M}X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X=\mathbf{M}X$; $\overline{X}$ je stabilna procjena od $\mathbf{M}X$.

2) $\mathbf{M}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}(X_i-\overline{X})^2=\sigma^2$; S^2 je stabilna procjena od σ^2.

Procjenu $\Gamma=\Gamma(X_1,\ldots, X_n)$ parametra γ nazivamo *asimptotski stabilnom*, ako je

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\Gamma=\gamma.$$

Svaka stabilna procjena je i asimptotski stabilna, jer je $\mathbf{M}\Gamma=\gamma$ za svaki konačni n.

Primjer 66. Katkad se za procjenu σ^2 također koristi i

$$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_1-\overline{X})^2;\qquad \mathbf{M}S^{*2}=\frac{n-1}{n}\sigma^2;$$

pa, dakle, ta procjena nije stabilna. Međutim, ona je asimptotski stabilna, jer je $\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}S^{*2}=\sigma^2$.

Za procjenu Γ_1 parametra γ kažemo da je *efektivnija* od procjene Γ_2, ako je $\mathbf{M}(\Gamma_1-\gamma)^2\leqslant\mathbf{M}(\Gamma_2-\gamma)^2$. Ako obje procjene nisu stabilne, onda ćemo to označavati sa $D\Gamma_1\leqslant D\Gamma_2$. U dovoljno općim uvjetima za disperziju procjena jednog te istog parametra, može se naći pozitivna donja granica.

Procjenu disperzija koje efektivno prima tu minimalnu vrijednost, nazivamo *efektivnom*. Ona i jest najbolja procjena u smislu što najbolje koristi informaciju sadržanu u uzorku.

Međutim, u mnogim slučajevima efektivne procjene ne postoje.

5. METODE NALAŽENJA PROCJENA

Metoda momenata. Za parametre koji se na izvjestan način sastoje od momenata, procjenu dobivamo tako da momente zamijenimo sa takozvanim *empirijskim momentima*. Kao k-ti empirijski početni moment uzima se funkcija uzorka $a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$. Kao empirijski centralni moment k-tog reda uzima se funkcija uzorka

$$m_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k.$$

Primjer 67. Matematička nada je prvi početni moment. Prema tome, metoda momenata kao procjena za $\mathbf{M}X$ daje veličinu

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Primjer 68. Disperzija je drugi (centralni) moment. Metoda momenata daje kao procjena za $\mathbf{D}X=\sigma^2$ veličinu

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Primjer 69. Za kovarijaciju metoda momenata daje procjenu

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y}). \tag{92}$$

Primjer 70. Za koeficijente korelacije se, prema metodi momenata, dobiva procjena

$$R=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}} \tag{93}$$

Kovarijaciju i koeficijent korelacije možemo razmatrati onda i samo onda, kada se u osnovnom skupu pojavljuju dva parametra X i Y. Uzorak dimenzije n se tada sastoji iz niza parova $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n))$.

Metoda najveće plauzibilnosti. Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ uzorak dimenzije n osnovnoga statističkog skupa s neprekinutom razdiobom obilježja X. Neka gustoća vjerojatnosti X sadrži nepoznati parametar γ koji treba procijeniti po uzorku; ona prema tome ima oblik $f(x, \gamma)$.

Funkcijom plauzibilnosti nazivamo funkciju γ

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma)=f(x_1, \gamma)\, f(x_2, \gamma)\ldots f(x_n, \gamma). \tag{94}$$

Za diskretni X s mogućim vrijednostima $x_1, x_2, \ldots$ i vjerojatnostima $\mathbf{P}(X=x_j)=p_j(\gamma)$ označimo sa x_r najveću od svih mogućih vrijednosti u promatranom uzorku, a sa $f_1, f_2, \ldots, f_r$ apsolutne učestalosti od $x_1, \ldots, x_r$ u uzorku $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i=n\right)$.

Funkcijom plauzibilnosti u tom slučaju nazivamo funkciju

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma)=p_1^{f_1}(\gamma)\, p_2^{f_2}(\gamma)\ldots p_r^{f_r}(\gamma). \tag{95}$$

Metoda najveće plauzibilnosti sastoji se u tome da se za procjenu parametra γ uzme vrijednost za koju funkcija plauzibilnosti dostiže svoj maksimum. Ta vrijednost $\hat{\gamma}$ je funkcija od $x_1, \ldots, x_n$:

$$\hat{\gamma}=\Gamma(x_1, \ldots, x_n).$$

Odgovarajuću funkciju uzorka $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ nazivamo *najplauzibilnijom procjenom od* γ.

Parametar $\hat{\gamma}$ (i istovremeno $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$) odredi se rješavajući po γ jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}=0. \tag{96}$$

Često se umjesto (96) upotrijebi jednadžba

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \gamma}=\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}=0. \tag{97}$$

Ako gustoća $f(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ ili funkcija vjerojatnosti $\mathbf{P}(X=x_k)=p_k(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ zavisi o l parametara, onda se *najplauzibilnija procjena sistema parametara* $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ dobiva rješavajući sistem jednadžbi

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_i}=0 \qquad (i=1, \ldots, l), \tag{98}$$

ili

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_i}=0 \qquad (i=1, \ldots, l). \tag{99}$$

Najplauzibilnije procjene imaju neka značajna svojstva. One su uz dovoljno opće uvjete osnovne i asimptotski normalne razdiobe (ali ne i uvijek stabilne). One su između svih procjena asimptotski normalne razdiobe najefektivnije. Istinita je slijedeća tvrdnja: ako uopće postoji efektivna procjena, onda se ona dobiva metodom najveće plauzibilnosti.

Primjer 71. Treba procijeniti vjerojatnost p nekog događaja A. Neka je

$$X=\begin{cases}0, & \text{ako se } A \text{ ne dogodi,}\\ 1, & \text{ako se } A \text{ dogodi,}\end{cases}$$

indikator događaja A (B. na strani 793 i dalje); $\mathbf{P}(X=0)=p_0(p)=1-p$, $\mathbf{P}(X=1)=p_1(p)=p$. Neka se u n nezavisnih promatranja događaj A pojavi m puta, tj. $f_0=n-m$, $f_1=m$. Na taj način, prema (95) imamo $L=p^m(1-p)^{n-m}$, $\frac{\partial \ln L}{\partial p}=\frac{m}{p}-\frac{n-m}{1-p}=0$. Odavde slijedi da je $\hat{p}=\frac{m}{n}=w_n(A)$ (učestalost od A). Prema tome $w_n(A)$ je najplauzibilnija procjena od p.

Primjer 72. Neka X ima Poissonovu razdiobu s nepoznatim parametrom λ. Uzmimo uzorak pa dobijmo vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ (x_i su cijeli brojevi). Neka je r najveći od brojeva u uzorku, a $f_0, \ldots, f_r$ apsolutne učestalosti s kojima se brojevi 0, 1, 2, ..., r pojavljuju u uzorku $p_j(\lambda)=\mathbf{P}(X=j)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$. Prema tome, suglasno sa (95) dobivamo $L=\prod_{i=0}^{r}\left(\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)^{f_i}$. U skladu sa (97) dobivamo

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=\sum_{i=0}^{r} f_i\left(\frac{i}{\lambda}-1\right)=0, \text{ odakle je } \hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=0}^{r} i f_i}{\sum_{i=0}^{r} f_i}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k=\bar{x}.$$

Veličina X je prema tome najplauzibilnija procjena za λ a time osnovna, asimptotski normalno distribuirana procjena parametra λ Poissonove razdiobe.

Primjer 73. Neka je X normalne razdiobe s nepoznatim parametrima a i σ. Njih treba procijeniti polazeći od uzorka $(x_1, \ldots, x_n)$ dimenzije n. Funkcija plauzibilnosti je

$$L(x_1, \ldots, x_n; a, \sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\right].$$

Iz toga slijedi da je

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2.$$

Prema (99) dobijemo slijedeće odredbene jednadžbe za a i σ^2:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)=0.$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=0.$$

odakle slijedi da je $\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}$ i $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=s^{*2}$. Prema tome $(\bar{x}, s^{*2})$ je najplauzibilnija procjena parametara (a, σ^2). Mi već znamo da s^{*2} nije stabilna procjena, već samo asimptotski stabilna.

6. UVJERLJIVE PROCJENE

Točkovna procjena daje vrijednost odgovarajućeg parametra iz zadanog uzorka, ali ništa ne kazuje o točnosti i sigurnosti procjene. Takve podatke daju uvjerljive procjene (uvjerljive granice).

Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ neki matematički uzorak iz osnovnog statističnog skupa s obilježjem X kojem razdioba ovisi o parametru γ. Neka su dalje $\underline{\Gamma}(X_1, \ldots, X_n)$ i $\bar{\Gamma}(x_1, \ldots, X_n)$ funkcije uzorka takve da za proizvoljni γ vrijedi

$$\mathbf{P}(\underline{\Gamma}(X_1, \ldots, X_n)<\gamma<\bar{\Gamma}(X_1, \ldots, X_n))=1-\alpha. \tag{100}$$

Tada slučajni interval $(\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma})$ nazivamo *uvjerljivom procjenom* parametra γ s mjerom sigurnosti $1-\alpha$.

Ako je $(x_1, \ldots, x_n)$ realizacija od $(X_1, \ldots, X_n)$, tj. ako je uzet uzorak, onda realizacija uvjerljive procjene daje interval $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ i u većem broju uzoraka istinita vrijednost leži približno u $(1-\alpha)\cdot 100\%$ slučajeva unutar izračunatih uvjerljivih granica. Jednakost (100) može se tumačiti i ovako: slučajni interval $(\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma})$ „pokriva" istinit parametar s vjerojatnošću $1-\alpha$.

Uvjerljiva procjena nepoznate vjerojatnosti pomoću velikih uzoraka. Učestalost $\mathbf{W}_n(A)$ je bila točkovna procjena za $p=\mathbf{P}(A)$. Učestalost $\mathbf{W}_n(A)$ je asimptotski normalne razdiobe sa $\mathbf{MW}(A)=p$, $\mathbf{DW}_n(A)=\frac{pq}{n}$.

Ako je $X\in N(x; a, \sigma)$ onda je $\frac{X-a}{\sigma}\in N(x; 0, 1)$, i za zadani α možemo izračunati z_α iz tablice 25. na stranici 100, tako da je

$$\mathbf{P}\left(-z_\alpha<\frac{X-a}{\sigma}<z_\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} e^{-x^2/2}dx=2\Phi_0(z_\alpha)=1-\alpha.$$

Veličina z_α se dakle određuje iz jednadžbe

$$2\Phi_0(z_\alpha)=1-z. \tag{101}$$

Ako ova razmatranja primijenimo na $\mathbf{W}_n(A)$, onda za zadani α možemo naći z_α, tako da je

$$\mathbf{P}\left(-z_\alpha<\frac{\mathbf{W}_n(A)-p}{\sqrt{pq/n}}<z_\alpha\right)=\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathbf{W}_n(A)-p}{\sqrt{pq/n}}\right|<z_\alpha\right)\approx 1-z.$$

Iz nejednakosti

$$\left|\frac{\mathbf{W}_n-p}{\sqrt{pq/n}}\right|<z_\alpha \text{ slijedi} \qquad p^2\left(1+\frac{z_\alpha^2}{n}\right)-p\left(2\mathbf{W}_n+\frac{z_\alpha^2}{n}\right)+\mathbf{W}_n^2<0.$$

odakle se mogu naći obje vrijednosti $\underline{p}(W_n)$, $\bar{p}(W_n)$, a to i jesu uvjerljive procjene od p. Slučajni interval $(\underline{p}(W_n), \bar{p}(W_n))$ „pokriva" p gotovo sigurno, ako je α odabran dovoljno malim.

Uvjerljiva procjena od a pri nepoznatom σ iz normalne razdiobe po zakonu $N(x;\ a,\ \sigma)$ osnovnog statističkog skupa. Procjena se zasniva na činjenici da uz izrečene pretpostavke veličina $\frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$ odgovara t-razdiobi sa $m=n-1$ stupnjeva slobode. Prema tome, iz tablice 27 (str. 104) za zadani α možemo naći broj $t_{\alpha,n-1}$ za koji vrijedi

$$\mathbf{P}\left(-t_{\alpha,n-1}<\frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}<t_{\alpha,n-1}\right)=1-\alpha$$

ili

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}<a<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right)=1-\alpha.$$

Na taj je način slučajni interval $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1},\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right)$ uvjerljiva procjena od a s mjerom (nivoom) pouzdanosti $p=1-\alpha$.

Uvjerljiva procjena od σ pri nepoznatom a iz osnovnog statističkog skupa normalne razdiobe po zakonu $N(\chi;\ a,\ \sigma)$. Ishodišna točka naših razmatranja je činjenica da uz zadane pretpostavke veličina $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ zadovoljava λ^2-razdiobu sa $n-1$ stupnjeva slobode. Iz tablice 26. određujemo za zadani α i $m=n-1$ stupnjeva slobode dva broja c_1 i c_2 takva da vrijedi

$$\mathbf{P}(\chi^2<c_1)=1-\mathbf{P}(\chi^2>c_1)=\frac{\alpha}{2} \text{ i } \mathbf{P}(\chi^2>c_2)=\frac{\alpha}{2}.$$

$c_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $c_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$. Na primjer za $\alpha=0{,}02$ i $m=19$ nađemo $c_1=\chi^2_{0,99}=7{,}6$ i $c_2=\chi^2_{0,01}=36{,}2$. Brojevi c_1 i c_2 određeni su tako da je

$$\mathbf{P}\left(c_1<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<c_2\right)=1-\alpha$$

ili

$$\mathbf{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{c_1}\right)=1-\alpha.$$

Na taj način je $\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2}, \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right)$ uvjerljiva procjena od σ^2 s mjerom sigurnosti $1-\alpha$.

Uvjerljivi intervali s asimptotski normalnom razdiobom procjena. Ako je Γ neka točkovna procjena γ s asimptotski normalnom razdiobom, onda je z_α određen prema (101), i tada za taj z_α vrijedi $\mathbf{P}\left(-z_\alpha<\frac{\Gamma-\gamma}{\sqrt{\mathbf{D}(\Gamma)}}<z_\alpha\right)\approx 1-\alpha$. Odavde se dobiva uvjerljiva procjena γ s mjerom pouzdanosti $1-\alpha$. Primjer 73 je bio ilustracija konkretne upotrebe ovih općih razmatanja.

C. PROVJERA HIPOTEZA (TESTOVI)

7. FORMULACIJA ZADAĆE

Neka dvije tvornice proizvode kabele. Neka je X prekidna čvrstoća kabela proizvedenog u tvornici A, a Y prekidna čvrstoća kabela proizvedenog u tvornici B. Možemo smatrati da X i Y imaju normalnu razdiobu i da su nezavisni. Pretpostavimo da smo na osnovu mnogogodišnjih promatranja odredili σ_X i σ_Y. Uzeta je bila i provjerena žica iz 50 kalema u obje tvornice. Pri tome su dobivene srednje vrijednosti prekidnih čvrstoća: $\bar{x}=120{,}8\ \mathrm{N/mm^2}$ (u tvornici A) i $\bar{y}=128{,}2\ \mathrm{N/mm^2}$ (u tvornici B). Treba provjeriti, može li se smatrati da je taj raskorak slučajan ili je on značajan (bitan). Pretpostavimo da je ta razlika slučajna, tj. stvarne srednje prekidne čvrstoće se ne podudaraju. Prema tome, tada hipoteza H_0 (nulta hipoteza) kazuje da je $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y$. Pri toj hipotezi veličina

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\mathbf{D}(\bar{X}-\bar{Y})}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$$

ima razdiobu po zakonu $N(x; 0, 1)$. Mi možemo za zadani α (α nazivamo *vjerojatnošću pogreške* ili *nivoom pouzdanosti*) iz tablice 25. na stranici 100 odrediti veličinu z_α takvu da je $\mathbf{P}(|Z|>z_\alpha)=1-2\Phi_0(z_\alpha)=\alpha$. Konkretan uzorak daje za „veličinu testa" Z vrijednosti z. Ako je $|z|>z_\alpha$, onda kažemo da z leži u kritičnom području.

Tada pri jednokratnom pokusu nastupi događaj kojem je vjerojatnost manja od α. Prema pokusnoj činjenici, opisanoj na str. 788 u ovom slučaju moramo odbaciti hipotezu $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y$. Kažemo da je promatrani raskorak značajan. Ako izračunati z ne leži u kritičnom području, (tj. $|z|<z_\alpha$) onda možemo samo utvrditi da predložena hipoteza ne proturječi podacima iz uzorka. Neka u promatranom konkretnom primjeru na početku imamo da je $\sigma_X=8{,}0\,\mathrm{N/mm^2}$ i $\sigma_Y=9{,}4\,\mathrm{N/mm^2}$. Tada vrijedi

$$\sqrt{\mathbf{D}(\bar{X}-\bar{Y})}=\sqrt{\frac{8^2}{50}+\frac{(9{,}4)^2}{50}}=1{,}75\,\mathrm{N/mm^2}.$$

Ako u svojstvu vjerojatnosti pogreške uzmemo da je $\alpha=0{,}05$ onda dobivamo da je $z_\alpha=1{,}96$;

$$z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1{,}75}=-\frac{7{,}4}{1{,}75}=-4{,}23,\quad |z|>z_\alpha=1{,}96;$$

tako izračunati z leži u kritičnom području. Prema tome, hipotezu $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y$ treba odbaciti, tj. kvalitativna razlika između tvornica A i B je bitna; nju ne možemo bolje objasniti slučajnošću uzorka.

8. OPĆA TEORIJA

Na osnovu materijala uzorka treba provjeriti hipotezu H_0. Hipoteza H_0 može, na primjer, biti hipoteza o jednakosti određenih parametara razdiobe, o jednakosti zakona razdiobe, o nekoreliranosti dviju slučajnih veličina i drugo. Za provjeru takve hipoteze nužna je kontrolna veličina T koja je na odgovarajući način odabrana i prisposobljena zadaći funkcije uzorka. Po zadanom nivou pouzdanosti α (vrlo se često uzima da je $\alpha=0{,}05$ ili 0,02 ili 0,01) određuje se područje B nazvano kritičnim područjem koje zadovoljava uvjet

$$\mathbf{P}(T\in B\,|\,H_0 \text{ istinito})\leqslant\alpha. \tag{102}$$

Praktički se B može naći, ako je poznata razdioba (ili bar asimptotska razdioba) kontrolne veličine T.

Metoda provjere sastoji se u slijedećem: uzme se uzorak. On daje vrijednost t kontrolne veličine T. Ako je $t\in B$, tj. ako se zbio događaj koji ima vrlo malu vjerojatnost α, onda se hipoteza H_0 mora odbaciti. Ako t ne leži u B, onda se može samo zaključiti da dana promatranja ne proturječe uzetoj hipotezi.

Čim je manji α, to je manja vjerojatnost da hipotezu H_0 treba odbaciti, premda je ona točna, ili, kako se još kaže, da je učinjena *pogreška prve vrste*.

Pogrešno rješenje, kada se hipoteza H_0 ne odbacuje premda je ona nepravilna, nazivamo *pogreškom druge vrste*. Ako je α zadano, onda se kritično područje B može, prema (102), odabrati na beskonačno mnogo načina. Ono se bira tako da vjerojatnost dopuštanja pogreške druge vrste bude po mogućnosti što manja. Kritička područja testova, koje ćemo u daljnjem razmatrati, biraju se sa tog stajališta.

9. *t*-KRITERIJ

T-kriterij služi za uspoređivanje dviju srednjih vrijednosti iz osnovnih statističkih skupova normalne razdiobe, ako za disperzije σ_X i σ_Y iako nepoznate, možemo s dosta sigurnosti pretpostaviti da su jednake. Prema tome hipoteza H_0 koju provjeravamo tvrdi da je $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y$. Neka su $(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ nezavisni slučajni uzorci iz oba statistička skupa; oni mogu biti raznih dimenzija. Kao kontrolnu veličinu koristimo

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}. \tag{103}$$

Uz navedene pretpostavke (normalna razdioba X i Y i jednakost disperzija) i uz pretpostavku da je H_0 ispravna, T zadovoljava t-razdiobu Studenta sa $k=n_1+n_2-2$ stupnja slobode. Stoga se kritično područje kriterija može ustanoviti na slijedeći način. Za razinu važnosti α iz tablice 27 (str. 104) odredi se $t_{\alpha,k}$, gdje je $k=n_1+n_2-2$.

Ako (prema (103)) *izračunata realizacija t zadovoljava nejednakost* $|t|>t_{\alpha,k}$, *onda se hipoteza* H_0 *odbacuje.*

U odnosu na pretpostavku „normalne razdiobe" t-kriterij nije vrlo osjetljiv. Njega možemo primijeniti, ako statističke razdiobe obaju uzoraka nemaju nekoliko vrhova i nisu jako asimetrične. Pretpostavka da je $\sigma_X=\sigma_Y$, u mnogim se slučajevima može zasnivati na sadržajnoj razini, hipotezu $\sigma_X=\sigma_Y$ moguće je provjeriti i po F-kriteriju (vidjeti dalje).

Primjer 74. Nužno je provjeriti utjecaj dviju različitih krmnih smjesa na povećanje prirasta težina tovljenih svinja. U tu je svrhu tovljeno 10 svinja sa prvom smjesom, a 10 drugih svinja samo sa drugom smjesom ($n_1=n_2=10$). Neka je X prirast težine postignut prvom smjesom, a Y prirast postignut drugom smjesom. Možemo smatrati da veličine X i Y imaju normalnu razdiobu (centralni granični teorem). Dalje se može uzeti da je σ_X i σ_Y, jer se disperzija prirasta težine sastoji iz svojstava pojedinih životinja, a ta su svojstva nezavisna o ishrani.

Na taj način ispunjene su pretpostavke za primjenu t-kriterija. Dobile su se slijedeće empirijske srednje vrijednosti: $\bar{x}=112{,}1$ kg, $\bar{y}=100{,}2$ kg. Empirijske su disperzije bile jednake $s_X^2=211$, $s_Y^2=86$. Prema (103) se dobiva

$$t=\frac{112{,}1-100{,}2}{\sqrt{9\cdot 211+9\cdot 86}}\cdot\sqrt{\frac{10\cdot 10(10+10-2)}{10+10}}=2{,}2.$$

Za $\alpha=0{,}05$ i $k=10+10-2=18$ iz tablice 27. dobivamo $t_{0{,}05;\,18}=2{,}101$. Kako je $|t|>t_{\alpha,k}$, hipoteza H_0 se odbacuje. Prema tome se s vjerojatnosti 0,05 može tvrditi da je prva smjesa bolja od druge.

10. F-KRITERIJ

Hipoteze o disperziji imaju u tehnici veliki značaj, jer je σ^2 mjera takvih brojevnih karakteristika, kao točnost stroja, pogreške mjernih naprava, točnost tehnoloških procesa i slično.

F-kriterij služi za provjeru hipoteze $\sigma_X=\sigma_Y$ uz uvjet da su X i Y normalne razdiobe. Iz ovakvoga općeg statističkog skupa uzmu se uzorci dimenzija n_1 i n_2. Kao kontrolnu veličinu upotrijebi se omjer empirijskih disperzija: $F=S_X^2/S_Y^2$ ili $F=S_Y^2/S_X^2$ (s obzirom na okolnosti veću disperziju stavljamo u brojnik). Veličina F zadovoljava F-razdiobu sa (m_1, m_2) stupnjeva slobode ($m_1=n_1-1$; $m_2=n_2-1$). Kritično područje bira se na slijedeći način. Za razinu važnosti α iz tablice 29. bira se za $p=\frac{\alpha}{2}$ i odgovarajuće stupnjeve slobode m_1 i m_2 vrijednost $F_{p;m_1,m_2}$. Ako je iz uzorka izračunati f veći od te kritične vrijednosti, onda se hipoteza odbacuje s vjerojatnosti pogreške α (tablica je konstruirana tako da je moguće samo $\alpha=0{,}10$ i $\alpha=0{,}02$ što je dovoljno u praksi).

Primjer 75. Sa dva mjerna instrumenta X i Y obavljeno je 10 i 20 mjerenja. Dobijene su slijedeće empirijske disperzije: $s_X^2=12{,}2\,\mu m$, $s_Y^2=8{,}0\,\mu$m, $f=s_X^2/s_Y^2=12{,}2/8{,}0=1{,}525$. Iz tablice 29. za razinu pouzdanosti $\alpha=0{,}10$ uzmemo $F_{0{,}05;\,9;\,19}=2{,}42$. Kako je izračunata vrijednost f manja od kritične vrijednosti, razlika između s_X^2 i s_Y^2 neznatna je, tj. hipoteza da su oba mjerna instrumenta jednako točna ne proturiječi navedenim promatranjima.

11. WILCOXONOV TEST

Wilcoxonov test služi za provjeru hipoteze o tome da li se dva uzorka odnose na jedan te isti statistički skup; drugim riječima, hipoteza $H_0: F_X(x)\equiv F_Y(y)$ provjerava se pomoću jednog uzorka $(x_1, \ldots, x_n)$ iz X i jednog uzorka $(y_1, \ldots, y_{n_2})$ iz Y. Za razdiobe od X i Y ništa ne pretpostavljamo. Načini provjera, pri kojima se za razdiobe u statističkom skupu ništa ne pretpostavlja, nazivamo *načinima slobodnim od parametara* u suprotnosti sa do sada razmatranim parametričkim kriterijima u kojima se pretpostavlja normalna razdioba od X i Y. Vrijednosti $x_1, \ldots, x_{n_1}$ i $y_1, \ldots, y_{n_2}$ obaju uzoraka uspoređuju se zajedno po njihovim veličinama. Neka se, primjerice, za $n_1=4$ i $n_2=5$ dobio slijedeći niz: $y_5x_3x_4y_1y_2x_2y_4y_3x_1$. Ako promotrimo par (x_i, y_j), tada u slučaju da je $y_j<x_i$ kažemo da su te vrijednosti u inverziji. U našem primjeru x_3 i x_4 su sa y_5 u inverziji, y_2 tvori tri inverzije (sa y_2, y_1, y_5), a x_1 tvori pet inverzija (sa svim y_j). Kao kontrolnu veličinu uzima se broj u *svih inverzija.* Ako je hipoteza istinita, onda se u ne mora mnogo razlikovati od svoje matematičke nade $\mathbf{M}u=\frac{n_1n_2}{2}$. Hipotezu odbacujemo ako je $\left|u-\frac{n_1n_2}{2}\right|$ veće od određene kritičke vrijednosti u_α. Kritična vrijednost u_α uzima se za zadanu razinu sigurnosti iz tablice 30. na stranici 112. Za velike n_1 i n_2, za koje se u_α ne može uzeti iz tablice 30, vrijedi

$$\mu_\alpha=z_\alpha\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}},$$

pri čemu se z_α određuje prema (101) iz tablice 25. na stranici 100.

Primjer 76. Iz dvije partije neke proizvodnje uzeto je po 12 detalja i izmjereno neko određeno obilježje. Nužno je provjeriti hipotezu o tome da to obilježje u obje partije ima istu razdiobu, ili drugačije rečeno, proizvodni se proces od partije do partije nebitno mijenja.

Tablica 3 pokazuje rezultate mjerenja.

Tablica 3

Rezultati mjerenja detalja uzetih iz dviju partija neke proizvodnje

	Broj detalja											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Partija I	0,8	1,9	3,0	3,5	3,8	2,5	1,7	0,9	1,0	2,3	3,3	3,4
Partija II	3,1	2,7	1,8	4,0	0,2	1,1	3,6	2,1	1,4	4,7	2,8	1,6

Uspoređivanje po veličini daje: 0,2 (y); 0,8 (x); 0,9 (x); 1,0 (x); 1,1 (y); 1,4 (y); 1,6 (y); 1,7 (x); 1,8 (y); 1,9 (x); 2,1 (y); 2,3 (x); 2,5 (x); 2,7 (y); 2,8 (y); 3,0 (x); 3,1 (y); 3,3 (x); 3,4 (x); 3,5 (x); 3,6 (y); 3,8 (x); 4,0 (y); 4,7 (y).

Broj inverzija je

$$u=1+1+1+4+5+6+6+8+9+9+9+10=69.$$

Prema tome je $\left|u-\frac{n_1 n_2}{2}\right|=|69-72|=3$. Za $\alpha=0{,}05$ iz tablice 30. očitamo da je $u_\alpha=35{,}0$. Prema tome hipotezu $H_0: F_X(x)\equiv F_Y(y)$ ne treba odbaciti.

12. χ^2-KRITERIJ

Pomoću do sada razmotrenih kriterija bilo je moguće provjeriti da li su neke različitosti, koje se pojavljuju u materijalu promatranja dvaju uzoraka, bitne (značajne) ili slučajne. Razmotrimo sada kriterije koji provjeravaju hipoteze, zadovoljava li promatrana slučajna veličina X zadani zakon razdiobe $F_0(x)$. Te kriterije nazivamo *kriterijima suglasnosti.* Kriterij suglasnosti χ^2 služi za provjeru hipoteze H_0 da je $F_X(x)=F_0(x)$. Ovdje je $F_X(x)$ funkcija razdiobe od X, a $F_0(x)$ zadana (hipotetička) razdioba.

Na početku razmotrimo slučaj kada je $F_0(x)$ potpuno određena, tj. ne sadrži nepoznatih parametara. Područje vjerojatnosti slučajne varijable X dade se rastaviti na konačan broj disjunktnih skupova (takozvanih klasa) $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$. Za neprekinute X skupovi Δ_i su intervali, a za diskretne X to su grupe mogućih vrijednosti iz X. Neka je p_i „teorijska vjerojatnost" da X pada u Δ_i, tj. vjerojatnost da je $X\in\Delta_i$, ako je hipoteza H_0 istinita. Ako je $\Delta_i=[a_i, b_i)$, onda za p_i vrijedi

$$p_i=F_0(b_i)-F_0(a_i). \tag{104}$$

Sada se iz X uzme uzorak $(X_1,\ldots,X_n)$ dimenzije n. Neka je M_i broj vrijednosti iz uzorka koje se nalaze u Δ_i. Tada je

$$\sum_{i=1}^{k} p_i=1, \qquad \sum_{i=1}^{k} M_i=n.$$

Rastav na klase je dovoljno proizvoljan. Nužno je, međutim, da za granične klase vrijedi $np_i\geqslant 1$, a za ostale $np_i\geqslant 5$. Ako taj uvjet nije ispunjen, onda klase treba povećati. Ako rastav na klase zadovoljava navedene uvjete, onda je kontrolna veličina jednaka

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(M_i-np_i)^2}{np_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i^2}{np_i}-n, \tag{105}$$

uz pretpostavku da je hipoteza H_0 istinita, imamo asimptotsku χ^2-razdiobu sa $m=k-1$ stupnjeva slobode. Kako je χ^2 mjera odstupanja istinite razdiobe od hipotetske, to hipotezu valja odbaciti, ako je vrijednost izračunata iz konkretnog uzorka po obrazcu (105) veća od određene kritične vrijednosti. Ta se kritična vrijednost χ^2_α za zadanu razinu važnosti α i $m=k-1$ stupnjeva slobode nađe u tablici 26. Ako je $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha$, onda se hipoteza odbacuje. Za $n>30$ vrijednost χ^2_α ne možemo naći u tablici 26, nego ih treba izračunati po formuli

$$\chi^2_\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{2m-1}+z_{2_\alpha})^2,$$

gdje se z_{2_α} računa u suglasnosti sa $2\Phi_0(z_{2_\alpha})=1-2\alpha$, iz tablice 25.

Primjer 77. Od bubnja za izvlačenje lutrijskih brojeva očekuje se da od 90 mogućih ishoda bude jednolika razdioba. Da bismo to provjerili, u bubanj se ubaci 5 kuglica i dobije se $n=100$ pokusnih pojedinačnih

Tablica 4

Rezultati postignuti pri 100 pokusnih izvlačenja

i	Broj m_i pokusa u kojima je izvučena kuglica i	np_i	m_i-np_i	$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$
1	18	20	−2	0,20
2	19	20	−1	0,05
3	21	20	1	0,05
4	26	20	6	1,80
5	16	20	−4	0,80
Σ	100	100	0	2,90

izvlačenja kuglica. Razdioba $F_0(x)$ određuje se u skladu s predloženom jednolikom razdiobom pet mogućih vrijednosti X (X je broj izvučene kuglice) sa vjerojatnostima $p_i = 1/5$ *za* $i = 1, \ldots, 5$. Klase su ovdje sve moguće vrijednosti. U tablici 4 (str. 843) navedeni su rezultati izvlačenja m_i i podaci potrebni za određivanje.

Za $\alpha = 0{,}05$ i $m = 5 - 1 = 4$ stupnja slobode iz tablice 26 nađemo $\chi^2_\alpha = 9{,}5$. Kako je izračunati $\chi^2 = 2{,}9$ manji od χ^2_α, to rezultati izvlačenja ne daju povoda da se sumnja u jednoliku razdiobu.

13. SLUČAJ DOPUNSKIH PARAMETARA

Najčešće je hipotetična razdioba $F_0(x)$ nejednoznačno određena i hipoteza govori samo o tome da se $F_0(x)$ odnosi na određen skup funkcija razdiobe $F(x; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r)$ koja zavisi o r parametara. Primjerice hipoteza bi mogla glasiti: X ima normalnu razdiobu (ovdje imamo dva parametra a i σ) ili X ima Poissonovu razdiobu (ovdje imamo jedan parametar λ). U tom se slučaju postupa ovako: po uzorku se dobivaju najplauzibilnije procjene parametara $\hat{\vartheta}_1, \ldots, \hat{\vartheta}_r$ i uzima se $F_0(x) = F(x; \hat{\vartheta}_1, \ldots, \hat{\vartheta}_r)$. Sada se prema (104) izračuna p_i, a prema (105) χ^2. *Ako se procjenjuje r parametara, onda ostaje samo* $m = k - r - 1$ *stupnjeva slobode.* U ostalom kriterij ostaje kao i prije.

Primjer 78. Pomoću mjerila obavljeno je 200 mjerenja izvjesnih udaljenosti i slučajna pogreška mjerenja zapisana je u μm. Realna os bila je rastavljena na 9 intervala. U tablici 5 navedene su učestalosti za odgovarajuće intervale.

Tablica 5

Statistička razdioba slučajne pogreške u 200 mjerenja

Broj	Interval u mm	Učestalost m_i
1	manje od −15	6
2	−15 do −10	11,5
3	−10 do − 5	15,5
4	− 5 do 0	22
5	0 do 5	47,5
6	5 do 10	42
7	10 do 15	28
8	15 do 20	17
9	više od 20	10,5

Decimalne vrijednosti od m_i pojavljuju se zato jer se obično one vrijednosti koje padaju na granicu klase po pola pripisuju i jednoj i drugoj klasi. Provjerava se hipoteza H_0 o tome da slučajna pogreška mjerenja X ima normalnu razdiobu. Prema tome, hipotetična razdioba ima gustoću $f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$, koja sadrži dva nepoznata parametra a i σ. Po tome uzorku sastavljenom od 200 mjerenja bile su izračunate najplauzibilnije procjene za a i σ. One daju $\bar{x} = 4{,}60\ \mu$m, $s^{*2} = 95{,}2\ \mu\text{m}^2$. Prema tome, funkcija izbora $F_0(x)$, kojom smo provjeravali, ima gustoću $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 95{,}2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4{,}6}{95{,}2}\right)^2}$. Odavde se sada pomoću tablice 25. može izračunati p_i. Na primjer, dobije se

$$p_1 = \mathbf{P}(X < -15) = \mathbf{P}\left(\frac{X-4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < \frac{-15-4{,}6}{\sqrt{95{,}2}}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{X-4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < -2{,}00\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0(2{,}00) = \frac{1}{2} - 0{,}4772 = 0{,}0228.$$

$$p_2 = \mathbf{P}(-15 < X < -10) = \mathbf{P}\left(-2{,}00 < \frac{X-4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < -1{,}49\right) =$$

$$= \Phi_0(-1{,}49) - \Phi_0(-2{,}00) = \Phi_0(2{,}00) - \Phi_0(1{,}49) = 0{,}4772 - 0{,}4319 = 0{,}0453.$$

U tablici 6 sadržani su drugi p_i ($i = 1, \ldots, 9$) i svi podaci neophodni za izračunavanje χ^2.

Tablica 6

Tablica za izračunavanje χ^2

i	m_i	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	6	0,0228	4,56	0,45
2	11,5	0,0453	9,06	0,66
3	15,5	0,0954	19,08	0,67
4	22	0,1557	31,14	2,68
5	47,5	0,1968	39,36	1,68
6	42	0,1928	38,56	0,31
7	28	0,1466	29,32	0,06
8	17	0,0864	17,28	0,05
9	10,5	0,0582	11,64	0,11
Σ	200	1,000	200,00	6,62

$\chi^2=6{,}62$. Kako procjenjujemo dva parametra, imat ćemo $9-2-1=6$ stupnjeva slobode. Za $\alpha=0{,}05$ i $m=6$ iz tablice 26. dobivamo da je $\chi^2_\alpha=12{,}6$. Kako je izračunati χ^2 manji, to hipoteza o normalnoj razdiobi slučajne pogreške mjerenja odgovarajućeg pribora ne proturječi podacima promatranog uzorka.

14. KRITERIJ SUGLASNOSTI KOLMOGOROVA–SMIRNOVA

Taj kriterij neposredno koristi empirijsku funkciju razdiobe od X (vidjeti II. A. na str. 824). U osnovi leži funkcija izbora

$$D_n=\sup_{-\infty<x<+\infty}|\bar{F}_n(x)-F_0(x)|.$$

pri čemu je $F_n(x)$ empirijska funkcija razdiobe, a $F_o(x)$ hipotetična razdioba. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(D_n<\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)=Q(\lambda),$$

gdje je

$$Q(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Kontrolna veličina $\sqrt{nD_n}$ asimptotski ima funkciju razdiobe $Q(\lambda)$. Sada za razinu sigurnosti α iz tablice 31. na stranici 113 nađemo takvu vrijednost λ_0 za koju je $Q(\lambda_0)=1-\alpha$. Ako je $\sqrt{nD_n}\geqslant\lambda_0$, onda se hipoteza H_0 o tome da X ima razdiobu po zakonu $F_0(x)$ odbacuje. Kriterij Kolmogorova–Smirnova općenito nije primjenljiv, ako u $F_0(x)$ ulaze procjene parametara, dobivene iz tog istog uzorka na temelju kojeg je računato $\bar{F}_m(x)$.

D. KORELACIJA I REGRESIJA

15. PROCJENA KORELACIJSKIH I REGRESIVNIH KARAKTERISTIKA POMOĆU UZORAKA

Za slučajni vektor (X, Y) uzorak (dimenzije n) daje n parova vrijednosti obilježja $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. U tom slučaju govori

se o vezanom uzorku nasuprot nezavisnim uzorcima, gdje se sasvim nezavisno jedan od drugoga promatra n_1 vrijednosti x i n_2 vrijednosti y. Za pravce regresije (60) i (61) mogu se naći procjene, točnije rečeno, teorijske karakteristike regresija (62) i (63) mogu se procijeniti na osnovu uzorka. Po funkcijama uzorka iz „Metoda najveće plauzibilnosti" (str. 832) specijalno (92) i (93) dobivaju se slijedeće procjene:

$$\text{za } \mu_X\text{: } \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i; \qquad \text{za } \mu_Y\text{: } \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i;$$

$$\text{za } \sigma_X^2\text{: } s_X^2=\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2; \qquad \text{za } \sigma_Y^2\text{: } s_Y^2=\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

Za kovarijaciju dobivamo u svojstvu procjene takozvanu empirijsku kovarijaciju

$$m_{XY}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$$

Odavde se dobivaju procjene teoretskih korelacijskih i regresijskih karakteristika, zamjenjujući u (62) i (63) teoretske veličine njihovim procjenama (empirijskim veličinama). Dobiva se

$$r=\frac{m_{XY}}{s_X s_Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}; \tag{106}$$

r nazivamo *empirijskim koeficijentom korelacije*. Na isti se način dobivaju *empirijski koeficijenti regresije*:

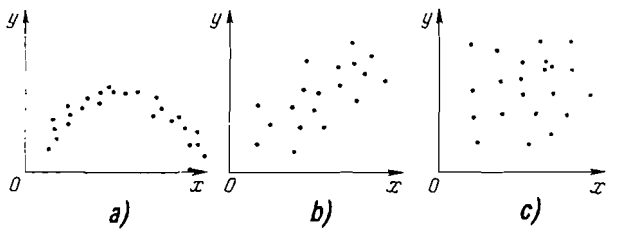
$$b_{Y/X}=r\frac{s_Y}{s_X}=\frac{m_{XY}}{s_X^2}, \qquad b_{X/Y}=r\frac{s_X}{s_Y}=\frac{m_{XY}}{s_Y^2}. \tag{107}$$

Odavde se dobiju empirijski pravci regresije:

$$y=\bar{y}+b_{Y/X}(x-\bar{x}), \qquad x=\bar{x}+b_{X/Y}(y-\bar{y}).$$

Pri približno linearno koreliranim X i Y se pomoću tih pravaca regresije može najbolje predskazati Y za dane vrijednosti od X i najbolje predskazati X za zadane vrijednosti od Y. Pitanje, postoji li približno linearna

korelacija između X i Y, može se samo u rijetkim slučajevima riješiti teoretski. To uspijeva, primjerice, ako je poznato da imaju (X, Y) normalnu razdiobu. Tada su krivulje regresije pravci, tj. postoji točna linearna korelacija. U ovom se slučaju rasuđivanje provodi na slijedeći način. Svakoj vrijednosti uzorka (x_i, y_i) pridružimo jednu točku u ravnini x, y, tako da kompletan uzorak određuje neki skup točaka u toj ravnini. Na slici 435 nacrtana su tri primjera takvih skupova točaka.



Sl. 435

Na slici *a*) je $\bar{y}(x)$ (vidjeti „16. Regresijska zavisnost", na str. 811) parabolična krivulja koja je konveksna prema gore; ovdje bi pretpostavka o linearnoj korelaciji bila neistinita. Na slici *b*) $\bar{y}(x)$ bila bi približno pravac. Na taj način ovdje možemo približno uzeti linearnu korelaciju. Za sliku *c*) pretpostavit ćemo da nema nikakve korelacije.

Pri pretpostavci približno linearne korelacije r je mjera snage veze među X i Y. Ako je $|r|$ blizu jedinice, onda to znači veoma tijesnu vezu, dok tada kada je $|r|$ blizu nule, govorimo o veoma slaboj vezi ili o njenom nepostojanju.

16. PROVJERA HIPOTEZE $r=0$ KADA STATISTIČKI SKUP IMA NORMALNU RAZDIOBU

Prilikom ispitivanja korelacije veoma je važno pitanje, postoji li zaista korelacija različita od nule ili je uopće nema, tj. bitna je vrijednost od r različita od nule. Prema tome, treba provjeriti hipotezu $r=0$. U tu svrhu se od konkretne procjene $\bar{r}$, u skladu sa (106) prelazi na odgovarajuću funkciju uzorka R u skladu sa (93). *Uz pretpostavku da su X i Y normalne razdiobe, R ima asimptotsku razdiobu po zakonu* $N(x;\ r,\ \sigma_R)$, gdje je $\sigma_R \approx s_r = \dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$. Prema tome kritično se područje može odrediti ovako. Za α se s podatkom iz tablice 25. pomoću formule (101) izračuna z_α. Ako za $\bar{r}$ izračunat iz uzorka vrijedi da je $|\bar{r}| > z_\alpha \cdot s_r$, onda se hipoteza $\rho=0$ odbacuje. Taj je kriterij pogodan za velike uzorke. Za male uzorke može se konstruirati kriterij na osnovu činjenice da uz dane pretpostavke veličina $\dfrac{R}{1-R^2}\sqrt{n-2}$ zadovoljava Studentovu t-razdiobu sa $n-2$ stupnja slobode.

17. OPĆA ZADAĆA REGRESIJE

Neka slučajna varijabla Y zavisi od k varijabli $x_1, \ldots, x_k$ i neka Y ima normalnu razdiobu s disperzijom σ koja ne zavisi od x_j i ima matematičku nadu

$$\mathbf{M}Y = \bar{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k. \tag{108}$$

U ovom se slučaju govori da x_j određuju Y samo u srednjem.

Primjer 79. U tehnici se često susreću slučajne varijable slijedećeg tipa: $Y = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_k t^k + Z(t)$, gdje je $Z(t) \in N(t;\ 0,\ \sigma)$; ovdje je sa t označeno vrijeme. Ako stavimo da je $x_j = t^j$ $(j=1, \ldots, k)$, onda je očito da je Y slučajna varijabla prije opisanog tipa.

Zadaća se sastoji u tome da se posredstvom niza od n nezavisnih promatranja $(y_i, x_{1i}, \ldots, x_{ki})$ $(i=1, \ldots, n)$ procijene nepoznati parametri $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$, koji ulaze u jednakost (108). Odvojena razmatranja ne zadovoljavaju točno jednakost (108), već se pojavljuje pogreška δ_k:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \delta_i. \tag{109}$$

Za δ_i se pretpostavlja slijedeće:

1) svi δ_i su međusobno nezavisni,
2) $\delta_i \in N(t;\ 0,\ \sigma)$ za sve i.

Tada za gustoću vektora $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ vrijedi

$$f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\right). \tag{110}$$

Pomoću (110) dobivamo funkciju plauzibilnosti za procjene α, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ zamijenjujući δ_i prema (109):

$$L=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta_1 x_{1i}-\ldots-\beta_k x_{k1})^2\right). \quad (111)$$

Jednadžbe maksimalne plauzibilnosti

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \beta_j}=0 \qquad (j=1, \ldots, k) \quad (112)$$

daju procjene $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_j$, koje se točno podudaraju sa vrijednostima za nepoznate parametre α, β_j metodom najmanjih kvadrata. Na primjer, u jednodimenzionalnom se slučaju dobiva da (109) ima oblik

$$y_i=\alpha+\beta x_i+\delta_i; \qquad \hat{\alpha}=\bar{y}-\beta\bar{x},$$

gdje je

$$\overline{\beta}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i y_i-\overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2}.$$

Tehnika izračunavanja $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}_j$ opisana je u 14. Metoda najmanjih kvadrata, str. 974.

SEDMI DIO

MATEMATIČKO PROGRAMIRANJE

LINEARNO PROGRAMIRANJE

A. FORMULACIJA ZADAĆE LINEARNOG PROGRAMIRANJA I SIMPLEKS METODA

1. OPĆA FORMULACIJA ZADAĆE, GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA I RJEŠENJE ZADAĆA SA DVJE VARIJABLE

Linearno programianje je dio matematike u kojem se proučavaju metode određivanja minimuma ili maksimuma linearne funkcije od n (n je konačan prirodan broj) varijabli, pri čemu varijable moraju zadovoljavati konačan broj dodatnih uvjeta (ograničenja) koji se izražavaju linearnim jednadžbama ili linearnim nejednadžbama.

Prema tome, *zadaća linearnog programiranja* (ZLP) može se općenito formulirati na slijedeći način.

Naći takve vrijednosti realnih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje funkcija

$$Q(x)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$$

prima minimalnu vrijednost na skupu točaka čije koordinate zadovoljavaju uvjete

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\
&x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \ldots, x_n\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Funkciju Q nazivamo još i *funkcijom cilja*. Ovdje su koeficijenti a_{ij}, b_i, p_j ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$) realni brojevi. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$b_1\geqslant 0, \quad b_2\geqslant 0, \ldots, b_m\geqslant 0;$$

Prijelaz od $Q(x)$ na $Q(x)+\text{const}$ ne mijenja položaj minimuma.

Zadaća linearnog programiranja može se u matričnom obliku ovako formulirati:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0},$$

$$Q_{min}(\mathbf{x})=\mathbf{p}^T\mathbf{x},$$

gdje je $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{A}$ matrica $\|a_{ij}\|$ tipa $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$,

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)^T, \qquad \mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_m)^T\geqslant\mathbf{0}$$

(zadnja nejednakost znači da je $b_1\geqslant 0, \ldots, b_n\geqslant 0$; analogni smisao ima i nejednakost $\mathbf{x}>\mathbf{y}$). Donji indeks uz oznaku funkcije cilja označava da se traži njen minimum. Ako se traži maksimum funkcije cilja $G(\mathbf{x})=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$, onda je to ekvivalentno s određivanjem minimuma funkcije $Q(\mathbf{x})=-G(\mathbf{x})=(-p_1)x_1+\ldots+(-p_n)x_n$. Ako se nejednakosti pojavljuju u uvjetima, na primjer $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\leqslant b_i$, onda se uvođenjem *pomoćne varijable* y uvjetne nejednakosti svode na jednakosti $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+y=b_i$. Za novu varijablu je također $y\geqslant 0$. Nova se varijabla u zapisu funkcije cilja pojavljuje s koeficijentom 0. Ako se na varijablu x_j ne postavlja uvjet $x_j\geqslant 0$, onda se mogu uvesti nove varijable $x_j'\geqslant 0$ i $x_j''\geqslant 0$, pri čemu je $x_j=x_j'-x_j''$. Stoga ćemo u nastavku uglavnom razmatrati zadaće minimizacije funkcije cilja $Q(x)$ uz uvjete da su svi slobodni članovi b_i nenegativni i da sve varijable primaju samo nenegativne vrijednosti. Tu zadaću ćemo nazivati zadaćom linearnog programiranja.

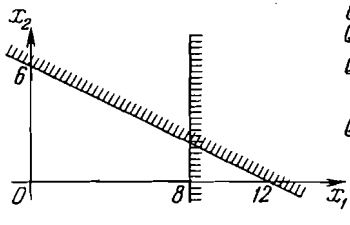
Točku $\mathbf{x}=(x_1,\ldots, x_n)^T$, koja zadovoljava prije navedene uvjete nazivamo *dopustivom točkom.* Skup svih dopustivih točaka nazivamo *dopustivim područjem.* Ako se odbacivanjem nekog uvjeta područje dopustivih točaka ne mijenja, onda taj uvjet nazivamo suvišnim.

U zadaćama s dvje varijable možemo izostaviti prijelaz od nejednakosti na jednakosti i to zato jer linearna nejednakost $a_1x_1+a_2x_2\leqslant b$ dopušta neposrednu **geometrijsku interpretaciju:** sve točke koje zadovoljavaju tu nejednakost leže na pravcu $a_1x_1-a_2x_2=b$ i u jednoj od poluravnina određenih tim pravcem. Ako poluravninu koja zadovoljava navedenu jednadžbu označimo crtkano, i ako to učinimo za sve nejednakosti, onda neiscrtakni dio ravnine određuje područje dopustivih točaka, ili kraće, dopustivo područje.

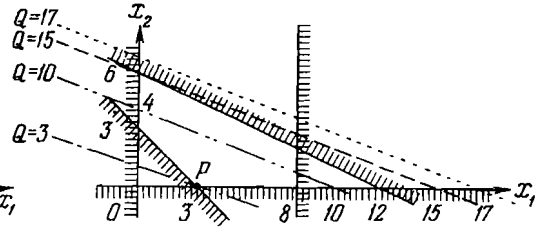
Primjer 1.

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && x_1+2x_2\leqslant 12,\\
&\text{II:} && x_1 \leqslant 8,\\
&\text{III:} && x_1+x_2\geqslant 3,\\
&\text{IV:} && x_1\geqslant 0,\\
&\text{V:} && x_2\geqslant 0,\\
& && Q_{min}(\mathbf{x})=x_1+2{,}5x_2.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Da dobijemo točke koje zadovojavaju uvjet I, nacrtamo pravac $x_1-2x_2=12$ (na primjer tako da stavimo $x_1=0$, zatim $x_2=0$ i nađemo sjecišta pravca s osima x_1 i x_2: pravac siječe os x_2 u točki $x_2=6$, a os x_1 u točki $x_1=12$). Da odredimo poluravninu koja zadovoljava nejednakost I, uzmimo bilo koju točku ravnine koja ne leži na navedenom pravcu pa provjerimo da li ona zadovljava uvjet I ili ne. Ako zadovoljava, onda je dopustiva čitava poluravnina u kojoj leži ta točka, tj. sastoji se od dopustivih točaka (s obzirom na taj uvjet). U protivnom je poluravnina nedopustiva pa je zato označimo crtkano. Na isti način postupamo i sa uvjetom II te ponovo odbacimo točke koje ne pripadaju dopustivom području. Grafički prikaz tih nejednakosti vidimo na slici 436. Na isti se način postupa s uvjetima III, IV i V. Sve točke koje



Sl. 436



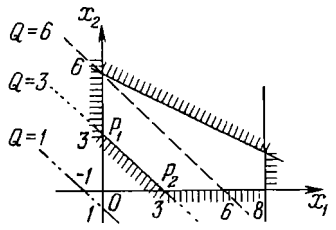
Sl. 437

nisu isključene ovim uvjetima tvore dopustivo područje točaka. Kako obje koordinate moraju biti pozitivne, to će dopustiv skup točaka ležati u prvom kvadrantu. Na slici 437 predočeno je dopustivo područje za naš primjer.

Sve točke u kojima funkcija cilja ima vrijednost 17 leže na pravcu $x_1+2{,}5x_2=17$. Taj pravac nazivamo crtom razine $Q=17$, pridruženoj broju 17 (na slici 437 ta je linija označena točkama). Sve crte razine pridružene drugim brojevima su također pravci paralelni pravcu $Q=17$. Ako pravac $Q=17$ premjestimo u jednom smjeru, dobiti ćemo Q-crtu za $Q<17$, a kada ga premjestimo u drugom smjeru dobiti ćemo Q-crtu za $Q>17$, ili obrnuto. U svakoj točki dopustivog područja funkcija cilja ima onu vrijednost koja je pridružena crti razine koja prolazi tom točkom.

Smjer u kojem treba premjestiti Q-crtu da bi se dobila Q-crta za koju je $Q<17$ može se lako naći tako da se odredi Q-crta za na primjer $Q=15$. Premještajem pravca u smjeru manjih vrijednosti funkcije cilja, u dopustivom području, može se postići da premješteni pravac siječe dopustivo područje u jednoj jedinoj točki. (U općem slučaju premješteni pravac može imati s dopustivim područjem zajedničku dužinu, zraku

ili pravac). U našem primjeru to je točka P koja leži na crti razine pridruženoj broju 3 (vidjeti sliku 437). Sve druge dopustive točke leže na crtama razine koje su pridružene većim vrijednostima. Sve točke koje leže na crtama razine s pridruženim manjim brojevima su nedopustive. Prema tome P je tražena optimalna točka.

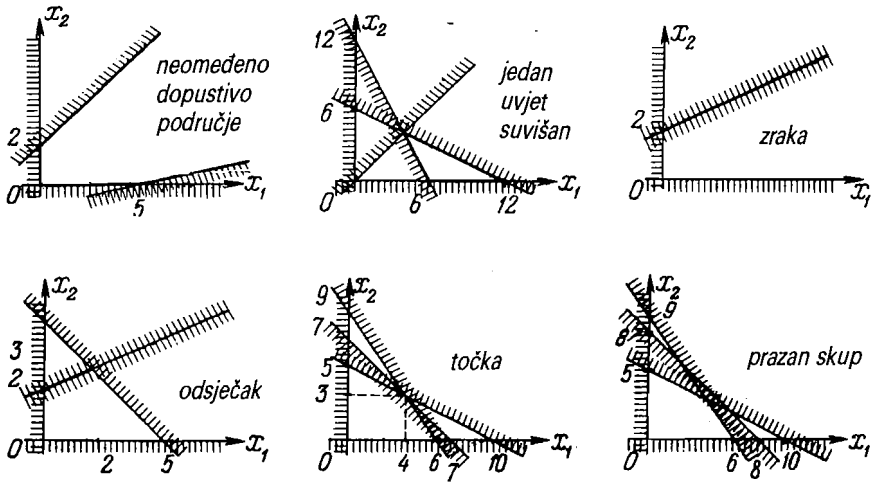


Sl. 438

Primijetimo da je optimalna točka vrh dopustivog područja. U točki P funkcija cilja ne prima relativni minimum, jer ta funkcija uopće nema relativnih ekstrema, tj. P se ne može odrediti metodama diferencijalnog računa.

Sve zadaće linearnog programiranja s dvije varijable mogu se riješiti grafičkom metodom koja je objašnjena u navedenom primjeru.

Skup svih optimalnih rješenja zadaće linearnog programiranja je konveksan.



Sl. 439

Da to objasnimo promotrimo dopustivo područje iz primjera 1 (s funkcijom cilja $Q_{\min}(\mathbf{x})=x_1-x_2$, slika 438). Funkcija cilja ima minimum ne samo u vrhovima P_1 i P_2 nego i u svim točkama dužine kojoj su te točke krajevi. Dopustiva područja s određenim osobitostima daju primjeri na slici 439. Odgovarajuće osobitosti mogu naići i u zadaćama linearnog programiranja s više od dvije varijable.

Dopustivo područje za zadaće u $\mathbf{R}^n$. Poopćivši dvodimenzionalni slučaj zaključujemo da se dopustivo područje u prostoru $\mathbf{R}^n$ može dobiti kao presjek konačnog broja poluprostora. Te točke tvore tzv. *poliedarski skup*. Ako je dopustivo poručje omeđeno i nije prazno, onda je ono *konveksan poliedar*, i zadaća linearnog programiranja je u tom slučaju uvijek rješiva, a funkcija cilja dostiže optimalnu vrijednost u bar jednom od vrhova tog poliedra. Ako je dopustivo područje prazan skup, onda zadaća linarnog progamiranja nije rješiva. Ako je dopustivo područje neomeđeno (vidi prvi primjer na slici 439), onda zadaća linearnog programiranja može biti ili rješiva ili nerješiva. Ako zadaća ima rješenje, onda postoji bar jedan vrh u kojemu funkcija cilja ima optimalnu vrijednost.

Točku dopustivog područja u $\mathbf{R}^n$ nazivati ćemo *vrhom* tog područja, ako je ona presjek n linearno nezavisnih nadravnina. (Svakom linearnom jednadžbom zadana je neka nadravnina. Svakom linearnom nejednakosti određen je poluprostor omeđen jednom nadravninom; ta se nadravnina dobije tako da se znak nejednakosti zamijeni znakom jednakosti.) Za vrh ćemo reći da je *degeneriran*, ako je on presjek više od n nadravnina. Vrh $\mathbf{x}$ ne može se prikazati u obliku konveksne linearne kombinacije dviju drugih točaka iz dopustivog područja ($\mathbf{x}\neq\lambda\overset{1}{\mathbf{x}}+(1-\lambda)\overset{2}{\mathbf{x}}$ za sve dopustive $\overset{1}{\mathbf{x}}\neq\overset{2}{\mathbf{x}}$ i sve λ takvih da je $0<\lambda<1$).

Svako dopustivo područje ima konačan broj vrhova. Ako je dopustivo područje određeno sa n nejednakosti $x_j\geqslant 0$ ($j=1,\ldots,n$) i m jednadžbi, onda ono može imati najviše C^m_{n+m} vrhova.

Ako je dopustivo područje poliedar, onda svaka dopustiva točka $\mathbf{x}$ ima bar jedan prikaz oblika

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overset{i}{\mathbf{x}},$$

gdje je $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geqslant 0$ za $i=1,\ldots,k$ pri čemu su $\overset{1}{\mathbf{x}},\ldots,\overset{k}{\mathbf{x}}$ vrhovi poliedra.

Ako poliedarski skup ima bar jedan vrh, onda svaka točka tog skupa ima bar jedan prikaz oblika

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overset{i}{\mathbf{x}}+\sum_{j=1}^{h}\mu_j\overset{j}{\mathbf{r}},$$

gdje je $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geqslant 0$, za $i=1,\ldots,k$, $\mu_j\geqslant 0$, za $j=1,\ldots,h$; $\overset{i}{\mathbf{x}}$ su vrhovi, a $\overset{j}{\mathbf{r}}$ vektori smjera beskonačno dugih bridova poliedarskog skupa.

Napomena. Dopustivo područje ZLP (ako ono nije prazno) ima bar jedan vrh.

2. KANONSKI OBLIK. PRIKAZ VRHOVA U SIMPLEKS TABLICI

Osnovni algoritam rješavanja zadaća linearnog programiranja je simpleks metoda (vidi u 3. na str. 859). Ona se može primijeniti onda kada je zadaća programiranja zdana u specijalnom kanonskom obliku. Kasnije će biti prikazano kako se svaka zadaća linearnog programiranja s nepraznim dopustivim područjem može svesti na takav oblik (vidi D. str. 890).

Na str. 851 i dalje formulirali smo ZLP i pri tome smo imali jednadžbe

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\ &x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0,\\ &Q(x)=p_1x_1+\ldots+p_nx_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Za te jednadžbe kažemo da imaju *kanonski oblik*, ako svaka i-ta jednadžba sadrži varijablu x_{λ_i} s koeficijentom 1, a u svim drugim jednadžbama taj je koeficijent jednak 0.

Ako je pri tome $b_1\geqslant 0,\ldots,\ b_m\geqslant 0$, onda kažemo da se radi o *dopustivom kanonskom obliku*. Varijable x_{λ_i} nazivamo bazičnim (osnovnim) varijablama, a ostale varijable nazivamo *slobodnim*.

U slijedećem primjeru, koji se odnosi na dopustiv kanonski oblik, bazične varijable su istaknute tako da su potcrtane:

$$\begin{aligned} 3x_1+\underline{x_2}+2x_3 &= 5,\\ -x_1+3x_3+\underline{x_5} &= 9,\\ x_1-4x_3+\underline{x_4} &= 1. \end{aligned}$$

Ovdje je $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=4$. Ako su jednadžbe zadane u kanonskom obliku, onda se funkcija cilja može lako predočiti pomoću slobodnih varijabli. Ako funkcija cilja ima oblik

$$Q(\mathbf{x})=x_1+13x_2+17x_4+3x_5,$$

onda od tog izraza oduzmemo prvu jednadžbu pomnoženu sa 13 (jer u prvoj jednadžbi imamo x_2, a u funkciji cilja se x_2 pojavljuje s koeficijentom 13), zatim drugu jednadžbu pomnoženu sa 3, i na kraju, treću jednadžbu pomnoženu sa 17. Kao rezultat se za funkciju cilja dobije oblik $Q(\mathbf{x})=-52x_1+35x_3+109$. Ta funkcija cilja zajedno s navedenim jednadžbama u kanonskom obliku i zahtjevom da su varijable pozitivne daju ZLP u kanonskom obliku

$$\begin{aligned} 3x_1+\underline{x_2}+2x_3 &= 5,\\ -x_1+3x_3+\underline{x_5} &= 9,\\ x_1-4x_3+\underline{x_4} &= 1,\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ldots,\ x_5\geqslant 0,&\\ Q_{\min}=-52x_1+35x_3+109.& \end{aligned} \tag{3}$$

Vrijednost $Q(0)=109$ označimo sa Q_0.

Simpleks tablica. ZLP u kanonskom obliku možemo zapisati u tablicu koja izgleda ovako: lijevi krajnji stupac sadrži indekse bazičnih varijabli, a najgornji redak sadrži indekse slobodnih varijabli. U sjecištu retka, koji odgovara vrijednosti λ_i, i stupca, koji odgovara vrijednosti λ_{m+j}, stoji koeficijent slobodne varijable u i-toj jednadžbi sa izdvojenom bazičnom varijablom x_{λ_i}. Desna tablica je navedeni zapis za naš konkretni primjer (3). Zdesna su zapisani koeficijenti uz slobodne varijable, a dolje koeficijenti funkcije cilja izraženi pomoću slobodnih varijabli. To da je u desnom donjem kutu zapisana vrijednost $-Q_0$, omogućava primjenu simpleks metode.

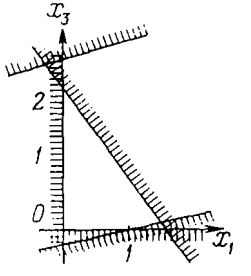
Simpleks tablica

U općem slučaju

	λ_{m+1}	$\ldots$	λ_n	
λ_1	$a_{1\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	$a_{1\lambda_n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
λ_m	$a_{m\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	$a_{m\lambda_n}$	b_m
	$p_{\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	p_{λ_n}	$-Q_0$

Za primjer 3

	1	3	
2	3	2	5
5	−1	3	9
4	1	−4	1
	−52	35	−109



Sl. 440

Kanonskom obliku ZLP ili odgovarajućoj simpleks tablici možemo pridružiti točku s koordinatama $x_{\lambda_1}=b_1$, $x_{\lambda_2}=b_2,\ldots,\ x_{\lambda_m}=b_m$, $x_{\lambda_{m+1}}=\ldots=x_{\lambda_n}=0$. Koordinate te točke zadovoljavaju n linearno nezavisnih uvjeta ZLP: m jednadžbi i $n-m$ nejednadžbi $x_i\geqslant 0$ za slobodne varijable. Ako je osim toga $b_i\geqslant 0$ (dopustiv kanonski oblik), onda je ta točka dopustiv vrh (vidi A.1. str. 851). U primjeru (3) dobiva se točka $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=9$. Ako (3) usporedimo sa zadaćom od dvije varijable, koja je grafički prikazana na slici 440

$$3x_1+2x_3\leqslant 5, \qquad -x_1+3x_3\leqslant 9,$$
$$x_1-4x_3\leqslant 1, \qquad x_1\geqslant 0, \qquad x_3\geqslant 0,$$
$$Q=-52x_1+35x_3+109,$$

onda, uzimajući x_2, x_5, x_4 za pomoćne varijable, zaključujemo da je traženi vrh u ishodištu koordinatnog sustava.

Svojstva vrhova i invertiranje baze. Vrh koji je dobiven pomoću ZLP kanonskog oblika ima slijedeća svojstva: $n-m$ koordinata tog vrha ima vrijednost 0 (slobodne varijable); m koordinata ima vrijednost $\geqslant 0$ (bazične varijable); vektori-stupci matrice A, koji korespondiraju bazičnim varijablama, su linearno nezavisni, tj. tvore bazu prostora $\mathbf{R}^m$. Nedegeneriranu matricu tih vektora-stupaca nazivamo *bazičnom matricom.*

Ako je broj linearno nezavisnih jednadžbi iz uvjeta ZLP u prostoru $\mathbf{R}^n$ jednak m, onda su ti uvjeti nužni i dovoljno da njima određena točka bude vrh dopunskog područja (čak i onda kada ZLP nije zadana u kanonskom obliku).

Ako je vrh poznat, onda se uvijek može naći odgovarajući kanonski oblik ZLP, pomnoživši matricu koeficijenata i stupac „desnih strana" s lijeva s matricom, koja je inverzna bazičnoj matrici. Pri takvim transformacijama sistema jednadžbi dopustivo područje se ne mijenja.

U Primjeru (3) točka $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=10$, prema prije navedenom kriteriju, je također vrh zato jer stupci u (3), koji odgovaraju bazičnim varijablama x_1, x_2, x_5, tvore nedegeneriranu matricu pa su prema tome linearno nezavisni:

bazična matrica
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Nađimo kanonski oblik koji odgovara tom vrhu:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9\\ 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 14 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 10\end{array}\right).$$

Dobivamo kanonski oblik jednadžbi

$$\begin{aligned} \underline{x_1} \quad -4x_3 \quad +x_4 \quad &= 1,\\ \underline{x_2}+14x_3-3x_4 \quad &= 2,\\ -x_3 \quad +x_4+\underline{x_5} &= 10,\end{aligned}$$

iz kojega možemo odmah odrediti vrh. Da dobijemo kanonski oblik ZLP, treba uz to funkciju cilja izraziti pomoću novih slobodnih varijabli x_3, x_4.

Bazična rješenja. Vrh koji ima navedena svojstva (na str. 858) određuje dopustivo *bazično rješenje.* Ako vrh ima m pozitivnih koordinata (m je broj linearno nezavisnih jednadžbi među uvjetima), onda odgovarajuće varijable treba odabrati kao bazične varijable, i tada vrhu korespondira točno jedno bazično rješenje. Ako vrh ima manje od m pozitivnih koordinata (degenerirani vrh), onda je moguće da mu korespondira nekoliko bazičnih rješenja.

Poznavajući bazično rješenje uvijek se jednoznačno može odrediti pripadni vrh.

3. SIMPLEKS METODA PRI ZADANOJ POČETNOJ TABLICI

Kako se rješenje ZLP dostiže bar u jednom vrhu, dovoljno je razmotriti vrijednosti ciljne funkcije samo u vrhovima.

Zadanoj dopustivoj simpleks tablici odgovara jedno bazično rješenje, tj. jedan vrh. Provjera izdvaja vrh, kojeg treba smatrati optimalnim. U drugim slučajevima metoda nas vodi ili na zaključak da je zadaća nerješiva (tj. minimalna vrijednost funkcije cilja je u dopustivom području jednaka $-\infty$) ili na novo bazično rješenje kod kojega vrijednost funkcije cilja nije veća nego u prvom slučaju. Polazeći odatle metoda se još jednom primjenjuje. U općem slučaju, nakon konačno mnogo koraka dostiže se vrh u kojemu funkcija cilja ima optimalnu vrijednost. Ako su vrhovi degenerirani, vrlo se rijetko događa da ponovo i opet ponovo prolazimo istim ciklusom bazičnih rješenja, koja se odnose na jedan te isti degenerirani vrh. Sada nećemo razmatrati taj posebni slučaj. On će biti razmotren u A.5. na str. 867.

Dopustivoj simpleks tablici korespondira točka minimuma, ako su svi koeficijenti funkcije cilja pozitivni:

$$p_{m+1}\geqslant 0,\ldots, p_n\geqslant 0.$$

Tada je Q_0 minimalna vrijednot funkcje cilja*). (Taj će kriterij postati razumljivijim, ako se sjetimo da sve varijable funkcije cilja $Q=p_{\lambda_{m+1}}x_{\lambda_{m+1}}+\ldots+p_{\lambda_n}x_{\lambda_n}+Q_0$ mogu primati samo nenegativne vrijednosti). Ako su svi koeficijenti funkcije cilja pozitivni, onda je vrh koji korespondira tablici jedinstvena optimalna točka.

*) $p_{\lambda_{m+1}}\leqslant 0,\ldots, p_{\lambda_n}\leqslant 0$ je kriterij maksimalnosti; polazeći od njega možemo također opisati etape metode maksimizacije funkcije cilja (primjetimo da množenjem funkcije cilja sa -1 možemo lako prijeći od maksimizacije na minimizaciju).

Ako kriterij nije ispunjen, onda prelazimo s jednog dopustivog bazičnog rješenja na susjedno dopustivo, tj. na takvo u kojem su skupovi bazičnih i slobodnih varijabli promijenjeni za jedan element. U nedegeneriranom slučaju ovome geometrijski odgovara prijelaz od jednog vrha na drugi duž brida koji je u dopustivom području (oba vrha pripadaju istom bridu). Ovaj proces također nazivamo *simpleks korakom* ili *zamjenom baza*:

1) Izbor ključnog stupca: između elemenata u tablici uzmemo bilo koji $p_{j^*}<0$ i njemu pridruženi stupac nazivamo *ključnim stupcem.* Preporučuje se da za takav stupac odaberemo stupac koji korespondira minimalnom p_j.

2) Izbor *ključnog retka*: ako je $a_{ij^*}\leqslant 0$ za sve elemente ključnog stupca, onda minimum ne postoji (funkcija cilja u dopustivom području nije omeđena odozdo). Ako to nije tako, onda se za sve pozitivne a_{ij^*} mora izračunati omjer b_i/a_{ij^*}. i-ti redak za kojeg je taj omjer minimalan nazivamo *i^*-tim ključnim retkom*:

$$\min_{a_{ij^*}>0}\frac{b_i}{a_{ij^*}}=\frac{b_{i^*}}{a_{i^*j^*}};$$

zajednički element $a_{i^*j^*}$ ključnog stupca i ključnog retka nazivamo *ključnim elementom.*

3) Zamjena baze pomoću ključnog elementa $a_{i^*j^*}$ je proces koji inducira u tablici kanonsku transformaciju, pri kojoj bazična varijabla x_{i^*} postaje slobodnom i istovremeno slobodna varijabla x_{j^*} postaje bazičnom. Ako je w proizvoljna vrijednost u tablici, onda sa $\hat{w}$ označavamo vrijednost koja se u novoj tablici nalazi na istom mjestu:

	$\dots j \dots$	$j^* \dots$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$\dots a_{ij} \dots$	$a_{ij^*} \dots$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i^*	$\dots a_{i^*j} \dots$	$\boxed{a_{i^*j^*}} \dots$	b_{i^*}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\dots p_j \dots$	$p_{j^*} \dots$	$-Q_0$

$\rightarrow$

	$\dots \hat{j} \dots$	$\hat{j}^* \dots$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{i}$	$\dots \hat{a}_{ij} \dots$	$\hat{a}_{ij^*} \dots$	$\hat{b}_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{i}^*$	$\dots \hat{a}_{i^*j} \dots$	$\hat{a}_{i^*j^*} \dots$	$\hat{b}_{i^*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\dots \hat{p}_j \dots$	$\hat{p}_{j^*} \dots$	$-\hat{Q}_0$

a) $\hat{i}^*=j^*$, $\hat{i}=i$ za sve $i\neq i^*$,
$\hat{j}^*=i^*$, $\hat{j}=j$ za sve $j\neq j^*$;

b) $\hat{a}_{i^*j^*}=\dfrac{1}{a_{i^*j^*}}$;

c) $\hat{a}_{i^*j}=a_{i^*j}\hat{a}_{i^*j^*}$ za sve $j\neq j^*$; $\hat{b}_{i^*}=b_{i^*}\hat{a}_{i^*j^*}$,
$\hat{a}_{ij^*}=a_{ij^*}\hat{a}_{i^*j^*}$ za sve $i\neq i^*$; $\hat{p}_{j^*}=-p_{j^*}\hat{a}_{i^*j^*}$.

Primijetimo da se elementi desnog stupca i nižeg retka preračunavaju po istom tom principu kao i elementi središnjeg dijela tablice. Na isti način postupamo i u d) i e).

d) $\hat{a}_{ij}=a_{ij}-\hat{a}_{i^*j}a_{ij^*}$ za sve $i\neq i^*$ i $j\neq j^*$,
$\hat{p}_j=p_j-a_{i^*j}p_{j^*}$ za sve $j\neq j^*$.

Ako se računa ručno, tada se preporuča da se izračunavanje d) obavi po stupcima za svaki $j\neq j^*$. Tada ćemo primijetiti da je

$$(\text{novi stupac})=(\text{stari stupac})-\begin{pmatrix}\text{ono, što već stoji}\\ \text{u novom stupcu}\\ \text{nakon operacije c)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{ključni}\\ \text{stupac}\end{pmatrix}$$

„Ono, što već stoji u novom stupcu nakon operacije c)" je broj $\hat{a}_{i^*j}$, koji je konstantan pri određivanju svakog stupca.

e) $\hat{b}_i=b_i-\hat{b}_{i^*}a_{ij^*}$ za sve $i\neq i^*$, $(-\hat{Q}_0)=(-Q_0)-\hat{b}_{i^*}p_{j^*}$.

Desni stupac tablice transformira se analogno kao i normalni ključni stupac, bez izmjene pravila transformacije takvog stupca, koje smo formulirali u d). Jedini broj u stupcu kojeg imamo poslije c) je ovdje $\hat{b}_{i^*}$. Uvijek se mora dobiti $\mathbf{b}_i\geqslant\mathbf{0}$ i $(-\hat{Q}_0)\geqslant(-Q_0)$. Može se desiti da je $\hat{p}_j<0$ iako je $p_j\geqslant 0$.

Primjer 2.

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_3 + 3x_4 + \underline{x}_8 = 1,\\
&\underline{x}_2 + 3x_4 = 2,\\
&2x_1 + \underline{x}_7 = 6,\\
&x_3 + \underline{x}_6 = 6,\\
&-2x_1 + x_3 - 3x_4 + \underline{x}_5 = 2,\\
&x_1\geqslant 0,\dots, x_8\geqslant 0,\\
&Q_{\min}=4x_1-6x_3+9x_4+66.
\end{aligned}\qquad (4)$$

ZLP je zadana u kanonskom obliku. Stoga možemo početi primjenom simpleks metode i napišimo najprije pripadnu simpleks tablicu:

	1	3	4	
8	2	−1	3	1
2	0	0	3	2
7	2	0	0	6
6	0	1	0	6
5	−2	[1]	−3	2
	4	−6	9	−66

1) Izbor ključnog stupca: jedini negativni koeficijent u zapisu funkcije cilja je (-6). Prema tome je $j^*=3$ (ključni stupac je $(-1, 0, 0, 1, 1)^T$). Ključni stupac sadrži pozitivne elemente ($a_{63}=1$, $a_{53}=1$).

2) Izbor ključnog retka: nalazimo da je $\min(6:1, 2:1)=2(=b_5/a_{53})$. Prema tome je $i^*=5$. Ključni element je $a_{53}=1$. On je u tablici uokviren.

3) Zamjena baze.

a) U lijevom stupcu nove tablice umjesto 5 staviti 3, a u gornjem retku umesto 3 staviti 5. Ostali indeksi ostaju na svojim mjestima.

b) Mjesto elementa $a_{53}=1$ u novoj tablici zauzima $\hat{a}_{53}=1:a_{53}=1:1=1$.

c) U novoj tablici umjesto ključnog stupca (osim ključnog elementa) zauzima stupac:

(ono, što već stoji u novom stupcu poslije b))·(ključni stupac, osim ključnog elementa), tj.

$$\hat{a}_{83}=-1\cdot(-1)=1,$$

$$\hat{a}_{23}=-1\cdot 0=0,$$

$$\hat{a}_{73}=-1\cdot 0=0,$$

$$\hat{a}_{63}=-1\cdot 1=-1,$$

$$\hat{p}_3=-1\cdot(-6)=6.$$

U novoj tablici, umjesto ključnog retka (osim ključnog elementa) stoji redak:

(ono, što već stoji u novom retku poslije b))·(ključni redak, osim ključnog elementa), tj.

$$\hat{a}_{51}=1\cdot(-2)=-2,\quad \hat{a}_{54}=1\cdot(-3)=-3,\quad \hat{b}_5=1\cdot 2=2.$$

Na taj smo način dobili slijedeću novu tablicu:

	1	5	4	
8		1		
2		0		
7		0		
6		−1		
3	−2	1	−3	2
		6		

d) U stupac za koji je $j=1$ moramo u novoj tablici unijeti slijedeće elemente (osim elementa -2, koji tamo već stoji poslije c)):

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_{81}\\ \hat{a}_{21}\\ \hat{a}_{71}\\ \hat{a}_{61}\\ \hline \hat{p}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{81}\\ a_{21}\\ a_{71}\\ a_{61}\\ \hline p_1\end{pmatrix}-(-\hat{a}_{51})\begin{pmatrix}a_{83}\\ a_{23}\\ a_{73}\\ a_{63}\\ \hline p_3\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&\hat{a}_{81}=2-(-2)\cdot(-1)=0,\\ &\hat{a}_{21}=0-(-2)\cdot 0=0,\\ &\hat{a}_{71}=2-(-2)\cdot 0=2,\\ &\hat{a}_{61}=0-(-2)\cdot 1=2,\\ &\hat{p}_1=4-(-2)(-6)=-8.\end{aligned}$$

Određivanjem ostala dva stupca dobivamo novu tablicu:

	1	5	4		
8	0	1	0	3	
2	0	0	[3]	2	2:3
7	2	0	0	6	
6	2	−1	3	4	4:3
3	−2	1	−3	2	
	−8	6	−9	−54	

Sve dok ne bude ispunjen uvjet minimalnosti, nužna je daljnja zamjena baze i ona nas dovodi do slijedećih tablica:

	1	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	1/3	2/3	
7	2	0	0	6	6:2
6	[2]	−1	−1	2	2:2
3	−2	1	1	4	
	−8	6	3	−48	

	6	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	[1/3]	2/3	$\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$
7	−1	1	1	4	4:1
1	1/2	−1/2	−1/2	1	
3	1	0	0	6	
	4	2	−1	−40	

	6	5	4	
8	0	1	0	3
2	0	0	3	2
7	−1	1	−3	2
1	1/2	−1/2	3/2	2
3	1	0	0	6
	4	2	3	−38

U posljednjoj tablici su svi koeficijenti funkcije cilja nenegativni (čak i pozitivni). Prema tome, u točki $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=0$, $x_5=0$,, $x_6=0$, $x_7=2$, $x_8=3$ funkcija cilja ima minimalnu vrijednost $Q_0=-(-38)=38$. (Varijablama koje imaju indeks u gornjem retku, se u bazičnom rješenju pripisuje vrijednost 0; to su slobodne varijable. Varijablama kojima je indeks u lijevom stupcu pridružuje se odgovarajući broj zapisan u desnom stupcu tog istog retka; to su bezične varijable.)

4. NALAŽENJE POČETNOG VRHA

Metoda artificijelnih varijabli. Za optimizaciju pomoću simpleks metode mora biti zadana simpleks tablica koja korespondira dopustivom bazičnom rješenju. Neka je najprije zadana ZLP sa n varijabli, koja još nema kanonski oblik (usp. (2)). Uvođenjem artificijelne (balansirajuće, dodatne) varijable x_{n+i} u svakoj i-toj jednadžbi i drugoj funkciji cilja G prelazimo od (2) na slijedeću pomoćnu zadaću koja uvijek ima rješenje:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1} \qquad =b_1. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n+ \qquad x_{n+m}=b_m, \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,\ x_{n+1}\geqslant 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geqslant 0, \\ G_{\min}(x)=x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}. \end{gathered} \tag{5}$$

Ako polazna zadaća (2) ima dopustivu točku, onda je nadopunimo sa $x_{n+1}=0,\ \ldots,\ x_{n+m}=0$, do dopustive točke $\bar{\mathbf{x}}$ zadaće (5). Kako je za sve dopustive točke zadaće (5) $G(\mathbf{x})\geqslant 0$, to je $\bar{\mathbf{x}}$ takva točka da je $G(\bar{\mathbf{x}})=0$, pa je $\bar{\mathbf{x}}$ optimalna točka pomoćne zadaće.

Napomena. Ako je optimalna točka neke zadaće takva točka $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$, da je $G(\bar{\bar{\mathbf{x}}})>0$, onda polazna zadaća nema dopustivih točaka, pa je zato nerješiva.

Rješenje pomoćne zadaće. Jednadžbe pomoćne zadaće (5) već imaju kanonski oblik. Sve umjetne varijable uzimamo za bazične, a sve ostale za slobodne. Transformacija funkcije cilja na nebazične varijable (usp. (2)) daje slijedeći rezultat:

$$G(\mathbf{x})=\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\right)x_1+\ldots+\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{in}\right)x_n+\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\right). \tag{6}$$

Prema tome

	1	...	n	
$n+1$	a_{11}	...	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n+m$	a_{m1}	...	a_{mn}	b_m
	$-\sum_{i=1}^{m}a_{i1}$	...	$-\sum_{i=1}^{m}a_{in}$	$-\sum_{i=1}^{m}b_i$

je dopustiva simpleks tablica za (5). Polazeći od toga, optimalno se rješenje pomoćne zadaće može naći pomoću simpleks metode. Čim neka artificijelna varijabla postane nebazična, onda se njoj korespondentni stupac može ispustiti.

Prijelaz sa optimalne tablice pomoćne zadaće na početnu tablicu polazne zadaće. U optimalnoj tablici polazne zadaće precrtamo sve stupce u kojima su odgovarajuće slobodne varijable artificijelne varijable.

Slučaj I. Optimalna vrijednost funkcije cilja je pozitivna (tj. broj koji se nalazi u donjem desnom kutu je negativan). Tada je dopustivo područje polazne zadaće prazan skup i polazna je zadaća nerješiva.

Slučaj II. Optimalna vrijednost funkcije cilja je $G(\mathbf{x})=0$.

Slučaj IIa. Među bazičnim varijablama nema umjetnih. Tada je bazično rješenje dobiveno tablicom ujedno i dopustivo bazično rješenje polazne zadaće. Ostaje samo da funkciju cilja $Q(\mathbf{x})$ polazne zadaće izrazimo pomoću slobodnih varijabli i u tablicu unesemo novi redak koji joj korespondira.

Slučaj IIb. Među bazičnim varijablama je bar jedna artificijelna. Tada, tako dugo dok ne dobijemo slučaj IIa, primjenjujemo slijedeću metodu: ako su svi koeficijenti u retku koji korespondira artificijelnoj bazičnoj varijabli jednaki 0, redak u tablici brišemo. To možemo ponoviti, ali ne više od $m-r$ puta, gdje je m broj redaka, a r rang matrice **A**. U protivnom, bilo koji koeficijent u tome retku, koji je $\neq 0$, odaberemo za ključni i promijenimo bazu simleks metode i stupac koji korespondira artificijelnoj slobodnoj varijabli precrtamo.

Primjer 3.

$$\begin{aligned} &3x_1 \quad +2x_3 \quad -x_5=12, \\ &x_1-x_2+x_3 \quad =5, \\ &x_1 \quad +x_3+x_4 \quad =6, \\ &x_1\geqslant 0,\ldots,x_5\geqslant 0, \\ &Q=2x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5. \end{aligned} \tag{7}$$

Početna tablica odgovarajuće pomoćne zadaće $G(\mathbf{x})=x_6+x_7+x_8$ ima oblik:

	1	2	3	4	5	
6	[3]	0	2	0	−1	12
7	1	−1	1	0	0	5
8	1	0	1	1	0	6
	−5	1	−4	−1	1	−23

Rješenje pomoćne zadaće je:

	6	2	3	4	5	
1	1/3	0	2/3	0	−1/3	4
7	⋮	−1	1/3	0	1/3	1
8	⋮	0	1/3	[1]	1/3	2
		1	−2/3	−1	−2/3	−3

	2	3	8	5	
1	0	2/3	⋮	−1/3	4
7	−1	1/3	⋮	[1/3]	1
4	0	1/3	1	1/3	2
	1	−1/3		−1/3	−1

	2	3	7	
1	−1	1	⋮	5
5	−3	1	3	3
4	1	0	⋮	1
	0	0		0

Došli smo na slučaj IIa. Funkcija cilja zadaće (7) izražena pomoću varijabli x_2, x_3 je $Q(\mathbf{x})=-3x_2-2x_3+10$, tj.

	2	3	
1	−1	1	5
5	−3	1	3
4	1	0	1
	−3	−2	−10

je dopustiva početna tablica za (7).

5. DEGENERIRANI SLUČAJ I NJEGOVO RAZMATRANJE POMOĆU SIMPLEKS METODE

Kao što je bilo spomenuto u A.3. (str. 859), primjena simpleks metode može nas dovesti do poteškoća, ako je simpleks tablici korespondentni vrh degeneriran i ako imamo nekoliko rješenja. U tom je slučaju u tablici jedan b_i jednak nuli. Tada za ključni redak obično moramo izabrati redak u kojem je $b_i=0$; vrijednost ciljne funkcije se pri zamjeni baze ne mijenja. Teoretski (u primjerima iz prakse vrlo rijetko!) se tada može dogoditi da poslije nekoliko zamjena baze opet dođemo do iste tablice, i tako nikada ne dostignemo optimalne vrijednosti (tu pojavu nazivamo cikliranjem).

Ako simpleks metoda ponavljano vodi na degeneriranu tablicu, a da se pri tome ne promijeni funkcija cilja, metodu dopunjujemo tako, da spriječimo pojavu takvih ciklusa. Metoda dopunjavanja se geometrijski može interpretirati kao prethodno unošenje malih promjena u desnu stranu uvjeta, posredstvom kojih se granične nadravnine dopustivog područja pomaknu tako da više nema degeneriranih vrhova.

Leksikografski poredak vektora. Za vektor $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k)^T$ kažemo da je *leksikografski manji* od vektora $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_k)^T$ (što označavamo sa $\mathbf{x}-<\mathbf{y}$), ako postoji takav j da je $x_1=y_1,\ldots,x_{j-1}=y_{j-1}$, $x_j<y_j$. Tada također pišemo $\mathbf{y}>-\mathbf{x}$.

Primjer 4. $\mathbf{y}>-0$ znači da je prva koordinata od $\mathbf{y}$, koja je različita od 0, pozitivna (ostale koordinate mogu biti bilo kakve).

Nadopuna simpleks tablice. Svaki se element b_i na desnoj strani nadopuni do vektora $(b_i, b_{i1},\ldots, b_{im})^T$ sa m brojeva takvih da bude $(b_{i1},\ldots, b_{im})^T>-0$ i da su ti vektori linearno nezavisni. Taj će uvjet biti ispunjen ako na primjer stavimo $b_{ii}=1$ i $b_{ik}=0$ za $i\neq k$. Dalje se $-Q_0$ nadopunjuje bilo kakvim brojevima (na primjer nulama) do vektora $(-Q_0, -Q_1,\ldots, -Q_m)^T$. Dobivamo ovu tablicu

	λ_{m+1}	...	λ_n				
λ_1	$a_1\lambda_{m+1}$	...	$a_i\lambda_n$	b_1	b_{11}	...	b_{1m}
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
λ_m	$a_{m\lambda_{m+1}}$	...	$a_{m\lambda_n}$	b_m	b_{m1}	...	b_{mm}
	$p_{\lambda_{m+1}}$	...	p_{λ_n}	$-Q_0$	$-Q_1$	...	$-Q_m$

Nadopune simpleks metode (vidi A.3, str. 859).

2) Za sve i se pomoću kvocijenata b_i/a_{ij^*}, takvih da je $a_{ij^*}>0$, promatra vektor $\left(\frac{b_i}{a_{ij^*}}, \frac{b_{i1}}{a_{ij^*}},\ldots, \frac{b_{im}}{a_{ij^*}}\right)^T$; Od tih vektora je leksikorafski minimalan onaj koji korespondira i^*-tom retku.

3b) $\hat{b}_{i^*k} = b_{i^*k}\hat{a}_{i^*j^*}$ za sve k.

3e) $\hat{b}_{ik} = b_{ik} - \hat{b}_{i^*k}a_{ij^*}$ za sve $i = i^*$ i sve k;

$(-\hat{Q}_k) = (-Q_k) - \hat{b}_{i^*k}p_{j^*}$ za sve k.

Uvijek će se dobiti da je $(\hat{b}_i, \hat{b}_{i1}, \ldots, \hat{b}_{im})^T > -0$; osim toga vektori će sigurno biti linearno nezavisni. Dalje je $(-\hat{Q}_o, -\hat{Q}_1, \ldots, -Q_m)^T > -(-Q_0, -Q_1, \ldots, -Q_m)^T$, a to nam garantira da se pri daljnjem računanju nikada više nećemo vratiti na tablicu koju smo već jednom imali.

Ta se proširena simpleks metoda može primjenjivati i u općem slučaju. Međutim, nadopunjivanja se ispuštaju čim je $b_i > 0$ za sve i.

Primjer 5. Slijedeća tablica predstavlja jedan od primjera u kojemu postoji mogućnost da se poslije nekoliko zamjena baze opet vratimo na tu istu tablicu:

	3	4	5	6	
1	1	−1	−1	3	0
2	2	−1	−1/2	1	0
	−1	−1	−3	8	2

Redom možemo izabrati slijedeće i^*/j^*: 1/3, 2/4, 3/5, 4/6, 5/1, 6/2. Na taj način dobivena tablica bit će posvema jednaka polaznoj. Ako pak ponovo odaberemo $j^* = 3$ i primijenimo simpleks metodu s leksikografskim proširenjem:

	3	4	5	6			
1	1	−1	−1	3	0	1	0
2	[2]	−1	−1/2	1	0	0	1
	−1	−1	−3	8	2	0	0

onda je vektor $(0, 1, 0)^T$, dobiven za $i = 1$, leksikografski veći od vektora $(0, 0, 1/2)^T$ dobivenog za $i = 2$; to pak znači da treba odabrati $i^* = 2$, što daje novu tablicu

	2	4	5	6			
1	−1/2	−1/2	−3/4	5/2	0	1	−1/2
3	1/2	−1/2	−1/4	1/2	0	0	1/2
	1/2	−3/2	−13/4	17/2	2	0	1/2

Iz ove tablice neizbježno slijedi zaključak da je zadaća nerješiva, jer funkcija cilja nije u dopustivom području omeđena odozdo.

6. DUALNOST U LINEARNOM PROGRAMIRANJU

Teorem o dualitetu. Svakoj ZLP možemo pridružiti njoj „dualnu" ZLP; veza između njih je dana na slijedeći način:

ZLP	Dualna ZLP
$\mathbf{A}_{11}\overset{1}{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_{12}\overset{2}{\mathbf{x}} \geqslant \overset{1}{\mathbf{b}}$,	$\mathbf{A}_{11}^T\overset{1}{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{21}^T\overset{2}{\mathbf{u}} \leqslant \overset{1}{\mathbf{p}}$,
$\mathbf{A}_{21}\overset{1}{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_{22}\overset{2}{\mathbf{x}} = \overset{2}{\mathbf{b}}$,	$\mathbf{A}_{12}^T\overset{1}{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{22}^T\overset{2}{\mathbf{u}} = \overset{2}{\mathbf{p}}$,
$\overset{1}{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}$ $\overset{2}{\mathbf{x}}$ je proizvoljan,	$\overset{1}{\mathbf{u}} \geqslant \mathbf{0}$, $\overset{2}{\mathbf{u}}$ je proizvoljan
$Q_{\min}(\mathbf{x}) = \overset{1}{\mathbf{p}}^T\overset{1}{\mathbf{x}} + \overset{2}{\mathbf{p}}^T\overset{2}{\mathbf{x}}$	$G_{\max}(\mathbf{u}) = \overset{1}{\mathbf{b}}^T\overset{1}{\mathbf{u}} + \overset{2}{\mathbf{b}}^T\overset{2}{\mathbf{u}}$.

Pri tome su vektori varijabli $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$ i tome odgovarajući vektori desnih strana i koeficijenata funkcije cilja bili prikazani kao zbroj dvaju vektora. Matrica koeficijenata sastoji se od četiri podmatrice.

U prvoj je zadaći po predznaku ograničeno upravo onoliko varijabli koliko je nejednadžbi između uvjeta druge zadaće.

Važni posebni slučajevi:

ZLP	Dualna ZLP	Primjedbe
$\mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $Q_{\min}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x}$;	$\mathbf{A}^T\mathbf{u} \leqslant \mathbf{p}$, $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, $G_{\max}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$;	Ako je $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, onda se uz pomoć pomoćnih varijabli u dualnoj zadaći može odmah odrediti početna tablica.
$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ je proizvoljan $Q_{\min}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{b}$, $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, $-G_{\min}(\mathbf{u}) = -\mathbf{b}^T\mathbf{u}$	Kako je istovremeno prvotna zadaća zadana bez ograničavanja predznaka, to njoj dualna zadaća ima oblik ZLP

Teorem o dualitetu. Ponovni prijelaz na dualnu zadaću opet nas vodi na polaznu zadaću.

Ako je u jednoj zadaći dopustivo područje prazno, onda u drugoj funkcija cilja nije omeđena odozdo (u slučaju minimizacije) ili odzogo (u slučaju maksimizacije).

Ako je jedna zadaća rješiva, onda je to i druga i optimalne se vrijednosti funkcija cilja pri tome podudaraju.

Ako prvobitna zadaća ima dopustivu točku $\mathbf{x}$ i njoj dualna zadaća dopustivu točku $\mathbf{u}$, onda su obje zadaće rješive i pri tome je $G(\mathbf{u}) \leqslant \max G = \min Q \leqslant Q(\mathbf{x})$.

Ako za dva dopustiva rješenja vrijedi $G(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{x})$, onda su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{x}$ optimalna rješenja.

Teorem o komplementarnosti. Ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$ dopustivi u prvobitnoj, odnosno dualnoj zadaći, onda su oni optimalna rješenja ako je i samo ako je zadovoljen slijedeći uvjet:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}^T\left(\mathbf{A}_{11}\overset{1}{\mathbf{x}}+\mathbf{A}_{12}\overset{2}{\mathbf{x}}-\overset{1}{\mathbf{b}}\right)=0 \quad \text{i} \quad \overset{1}{\mathbf{x}}^T\left(\mathbf{A}_{11}^T\overset{1}{\mathbf{u}}+\mathbf{A}_{21}^T\overset{2}{\mathbf{u}}-\overset{1}{\mathbf{p}}\right)=0.$$

To znači, da u točki u kojoj se postiže optimalno rješenje ne može istovremeno biti i-ta komponenta vektora rješenja pozitivna, a i-ta nejednakost druge zadaće stroga.

Ako je poznato optimalno rješenje $\mathbf{u}$ dualne zadaće, onda njegovim uvrštavanjem u malo prije navedene uvjetne jednakosti dobivamo linearne jednadžbe za $\mathbf{x}$. Zajedno sa $\mathbf{A}_{21}\overset{1}{\mathbf{x}}+\mathbf{A}_{22}\overset{2}{\mathbf{x}}=\overset{1}{\mathbf{b}}$ one daju sistem iz kojega se može naći optimalno rješenje prvobitne zadaće.

Skrivene cijene. Ako su zadane dvije zadaće koje odgovaraju prvom od gore navedenih „važnih posebnih slučajeva", onda za svako i optimalnu vrijednost x_i nazivamo *skrivenom cijenom* jedinice ingredijenta omeđenog i-tom nejednakosti dualne zadaće. Njena vrijednost pokazuje za koliko bi se uvećala optimalna vrijednost G, ako bi se granica p_i tog ingredijenta uvećala za jedinicu. Skrivena cijena podudara se s koeficijentom i-te slobodne varijable funkcije cilja u optimalnom kanonskom obliku dualne zadaće. Ona se prema tome može odrediti bez razmatranja prvobitne zadaće.

Dualna simpleks metoda. Dualna simpleks metoda je kopiranje izračunavanja zadaće zadane u tablici, a trebalo bi ga obaviti u dualnoj zadaći kada se primijeni simpleks metoda.

Simpleks tablicu koja odgovara kanonskom obliku ZLP (usp. A.2. str. 856) nazivamo *dualno dopustivom*, ako je $p_k \geqslant 0$ za sve koeficijente funkcije cilja, tj. za $k = m+1, \ldots, n$. Njoj geometrijski odgovara sjecište od n graničnih nadravnina dopustivog područja (ta točka ne mora biti dopustiva).

Dualna simpleks metoda daje niz dualno dopustivih tablica, sve dok se ne nađe dopustiva tablica. Optimalna točka će biti određena po kriteriju minimalnosti. Geometrijski to znači da polazimo izvana (kroz dopustive točke sjecišta) do optimalnog vrha dopustivog područja.

Dualno dopustivoj tablici odgovara točka minimuma, ako su sve desne strane nenegativne: $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$.

Ako taj kriterij nije ispunjen, onda se na novu tablicu prijeđe u tri koraka.

1) Izbor ključnog retka: od brojeva $b_i < 0$ u tablici odaberemo bilo koji, a odgovarajući redak proglasimo ključnim; za b_{i^*} preporučuje se odabrati minimalni b_i.

2) Izbor ključnog stupca: ako je $a_{i^*j} > 0$ za sve elemente ključnog retka, onda minimum ne postoji (dopustivo područje je prazan skup). Ako nije tako, onda se za sve negativne a_{i^*j} odredi kvocijent $\frac{p_j}{|a_{i^*j}|}$. j-ti stupac za koji je kvocijent minimalan uzmemo kao ključni stupac j^*:

$$\min_{a_{i^*j}<0} \frac{p_j}{|a_{i^*j}|} = \frac{p_{j^*}}{|a_{i^*j^*}|}.$$

3) Baze zamijenimo kao i za simpleks metodu (vidi A.3. str. 859).

Dualno dopustivu tablicu nazivamo *dualno degeneriranom* ako je $p_j = 0$.

7. MODIFICIRANE METODE: DODATNA IZMJENA ZADAĆE

Modificirana simpleks metoda. Na početku pretpostavimo da ZLP već ima kanonski oblik (ako nema onda vidi „Nalaženje početnog vrha", str. 876) i da su varijable tako prenumerirane da $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ budu bazične varijable:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} = \beta_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{m,n-m}x_{n-m} + x_n = \beta_m,\\
&x_j \geqslant 0, \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, n,\\
&Q_{\min}(\mathbf{x}) = \pi_1 x_1 + \ldots + \pi_{n-m}x_{n-m} + \gamma_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ova ZLP prikazana je slijedećom osnovnom tablicom:

	$1 \ \ldots n-m$	$n-m+1 \ \ldots n$	
$n-m+1$	$\alpha_{11} \ldots \alpha_{1,n-m}$	$1 \quad 0 \ldots 0$	β_1
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$0 \quad \ddots \quad \vdots$ $\vdots \quad \ddots \quad 0$	$\vdots$
n	$\alpha_{m1} \ldots \alpha_{m,n-m}$	$0 \ldots \quad 0 \quad 1$	β_m
	$\pi_1 \ \ldots \pi_{n-m}$	$0 \ldots \quad\quad 0$	$-\gamma_0$

(9)

Oznake: $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_m)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_j=(\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{mj})^T$ za $j=1,\ldots,(n-m)$, $\boldsymbol{\alpha}_j=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ s jedinicom na j-tom mjestu za $j=(n-m+1),\ldots,n$.

Modificirana simpleks tablica. Umjesto simpleks tablice imamo slijedeću modificiranu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1\ldots n-m & n-m+1\ \ldots\ n & \\ \hline \lambda_1 & & a_{1,\,n-m+1}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots\qquad\quad\ \vdots & \vdots \\ \lambda_m & & a_{m,\,n-m+1}\cdots a_{mn} & b_m \\ \hline & p_1\cdots p_{n-m} & p_{n-m+1}\quad\cdots p_n & -Q_0 \end{array} \tag{10}$$

Oznake:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{1,\,n-m+1}\cdots a_{1n} \\ \vdots\qquad\quad\ \vdots \\ a_{m,\,n-m+1}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\quad \pi=\begin{pmatrix}\pi_{\lambda_1}\\ \vdots\\ \pi_{\lambda_m}\end{pmatrix}=\quad \mathbf{p}=\begin{pmatrix} p_{n-m+1}\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}.$$

Prvi razmještaj brojeva u modificiranoj simpleks tablici dobit ćemo ako na mjesta označena slovima stavimo odgovarajuće podatke osnovne tablice.

Tako modificirana simpleks tablica ima slijedeća svojstva.

Lijevi stupac pokazuje indekse bazičnih varijabli.

Stupac **b** sadrži vrijednosti bazičnih varijabli u sjecištu predočenom tablicom (za $\mathbf{b}\geqslant 0$ imamo vrh).

Veličina Q_0 je vrijednost funkcije cilja u tom sjecištu.

Veličine $p_1,\ldots,p_n$ su koeficijenti funkcije cilja koja je izražena pomoću slobodnih varijabli.

Stupci matrice **A** su oni stupci kanonskog oblika koji korespondiraju varijablama $x_{n-m+1},\ldots,x_n$; pri tome je **A** inverzna matrica bazične matrice.

Sva navedena svojstva sačuvana su pri prijelazu na novu modificiranu simpleks tablicu prema dalje navedenoj metodi.

Ako su u dopustivoj modificiranoj simpleks tablici svi koeficijenti ciljne funkcije pozitivni, tj.

$$p_1\geqslant 0,\ldots,p_n\geqslant 0,$$

onda toj tablici korespondira točka minimuma. Minimalna vrijednost funkcije cilja je tada Q_0.

Ako taj kriterij nije ispunjen, onda se modificirana simpleks metoda vodi na takve prijelaze od vrha do vrha, kao i u simpleks metodi, a mijenja se samo način transformacije. Određuju se samo one vrijednosti u simpleks tablici koje služe za traženje ključnog elementa. Zatim se zamjene baze samo za one vrijednosti koje se pojavljuju u modificiranoj simpleks tablici. Ova se metoda zasniva na činjenici da poznavajući matricu inverznu bazičnoj možemo, ako to zatreba, potpuno odrediti kanonski oblik (vidi A.2. str. 856).

1) Izbor ključnog stupca: od svih $p_j<0$ u tablici odaberemo po volji $p_{j^*}<0$; ako je $j^*\geqslant n-m+1$, onda je poznat odgovarajući stupac kanonskog oblika; u protivnom ga tražimo pomoću formule $(a_{1j^*},\ldots,a_{mj^*})^T=\mathbf{A}\alpha_{j^*}$ i unosimo u tablicu. Uvijek je stupac koji odgovara j^* ključni stupac.

2) Ključni redak se izabere kao i za simpleks metodu (vidi A.3. str. 859).

3) Zamjena baze pomoću ključnog elementa $a_{i^*j^*}$ je jednostavnija nego što je to za nemodificiranu simpleks metodu zato što su indeksi stupaca fiksirani, pa odgovarajući gornji redak ostane nepromijenjen. Označimo sa $\hat{w}$ element nove tablice koji stoji na mjestu elementa w.

a) $\hat{\lambda}_i=\lambda_i$ za sve $i\neq i^*$; $\hat{\lambda}_{i^*}=j^*$;

b) $\hat{a}_{i^*j}=a_{i^*j}/a_{i^*j^*}$ za sve $j=(n-m+1),\ldots,n$; $\hat{b}_{i^*}=b_{i^*}/a_{i^*j^*}$;

c) $\hat{a}_{ij}=a_{ij}-\hat{a}_{i^*j}a_{ij^*}$ za sve $i\neq i^*$ i sve $j=(n-m+1),\ldots,n$;
$\hat{p}_j=p_j-a_{i^*j}p_{j^*}$ za sve $j=(n-m+1),\ldots,n$.

Ako je $(n-m+1)\leqslant j^*$, onda to ne znači da se ne mogu primijeniti formule navedene u b) i c). (Usporedi napomenu u 3d)) pri opisu simpleks metode (vidi A.3. str. 859).

d) $\hat{b}_i=b_i-\hat{b}_{i^*}a_{ij^*}$ za sve $i\neq i^*$, $-\hat{Q}_0=(-Q_0)-\hat{b}_{i^*}p_{j^*}$.

Desna se strana određuje na isti način kao i stupci u c).

e) $\hat{p}_j=\pi_j+\hat{\mathbf{p}}^T\alpha_j$ za sve $j=1,\ldots,n-m$ (vektor $\hat{\mathbf{p}}$ već je poznat iz rezultata u c)).

Uvijek se mora dobiti $\hat{b}_i\geqslant 0$ i $(-\hat{Q}_0)\geqslant(-Q_0)$. Može se dogoditi da je $\hat{p}_j<0$ iako je $p_j\geqslant 0$. Koeficijenti novih bazičnih varijabli u funkciji cilja moraju biti jednaki nuli; stoga možemo odmah smatrati da su jednaki 0. Za degenerirani slučaj vrijedi sve ono što je bilo rečeno o simpleks metodi.

Prednosti modificirane simpleks metode. U simpleks metodi mogu pogreške do kojih dolazi zaokruživanjem neograničeno rasti od tablice do tablice zato jer je prijelaz na slijedeću tablicu određen samo vrijednostima u prethodnoj tablici, a te su vrijednosti već približne. Naprotiv, za modificirane metode se upotrijebe π_j, α_j koji su određeni

osnovnom tablicom. Nasuprot tome možemo nakon određenog velikog broja koraka „obnoviti" sve podatke (odstraniti pogreške zaokruživanja), uzevši iz osnovne tablice bazičnu matricu (sastavljenu od α_j, koji odgovaraju bazičnim varijablama x_{λ_i} i to redosljedom u kome se nalaze u modificiranoj tablici) i odredivši njen inverz. Na taj se način dobije obnovljena matrica **A**. Pomoću nje možemo odrediti obnovljene $\mathbf{b}=\mathbf{A}\beta$, $\mathbf{p}^T=-\pi^T\mathbf{A}$ i $-Q_0=-\pi^T\mathbf{b}$. Ostali p_j $(j=1,\ldots,m)$ računaju se iz formule $p_j=\pi_j-\mathbf{p}^T\alpha_j$ pomoću obnovljenog **p** i podataka iz osnovne tablice. Prema tome čitava modificirana tablica može se neposredno dobiti na osnovu podataka iz osnovne tablice, ako su još zadani indeksi bazičnih varijabli.

Nadalje, modificirana metoda zahtijeva manje računskih operacija u usporedbi sa simpleks metodom, ako je broj varijabli jednak bar trostrukom broju jednadžbi i mnogi su koeficijenti jednaki nuli.

Primjer 6. U ovome primjeru nije potrebno prenumerirati varijable. Zapis „$j=1,\ldots,(n-m)$", odnosno „$j=(n-m+1),\ldots,n$" treba shvatiti kao „j je u lijevom dijelu", odnosno „j je u desnom dijelu tablice".

Ponovo ćemo se poslužiti primjerom 2 koji je bio riješen pomoću simpleks metode. Za osnovnu tablicu dobivamo:

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8	2	−1	3	1	0	0	0	0	1
2	0	0	3	0	1	0	0	0	2
7	2	0	0	0	0	1	0	0	6
6	0	1	0	0	0	0	1	0	6
5	−2	1	−3	0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

Odavde dobijemo prvu modificiranu simpleks tablicu, te u skladu s 1) nađemo da je $j^*=3$, pa izračunamo $(a_{13},\ldots,a_{53})^T=\mathbf{A}\alpha_3$ i to unesemo u tablicu (razumije se da ćemo u praksi upotrebljavati tu istu tablicu).

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8				1	0	0	0	0	1
2				0	1	0	0	0	2
7				0	0	1	0	0	6
6				0	0	0	1	0	6
5				0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

$\overrightarrow{j^*=3}$

Prva tablica

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8		−1		1	0	0	0	0	1
2		0		0	1	0	0	0	2
7		0		0	0	1	0	0	6
6		1		0	0	0	1	0	6
5		[1]		0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

$\overrightarrow{j^*=3}$

Prva tablica s unesenim ključnim stupcem

U skladu sa 2) nađemo da je $b_4:a_{43}=6:1=6$, $b_5:a_{53}=2:1=2$, tj. $i^*=5$. Prema tome uokvireni broj 1 je ključni element. U skladu sa 3) dobijemo drugu tablicu:

	1	5	4	8	2	7	6	5	
8				1	0	0	0	1	3
2				0	1	0	0	0	2
7				0	0	1	0	0	6
6				0	0	0	1	−1	4
3				0	0	0	0	1	2
	−8	0	−9	0	0	0	0	6	−54

Ona daje isti vrh koji je bio dobiven nakon prvog simpleks koraka u A.3. na str. 859. Nakon slijedeća tri modificirana simpleks koraka dobijemo modificiranu simpleks tablicu onog vrha u kojem je zadovoljen kriterij minimalnosti (na isti način kako je nakon tri simpleks koraka bila nađena optimalna simpleks tablica tog istog vrha).

Modificirana dualna simpleks metoda. Zadanom kanonskom obliku ZLP, kao i u „modificiranoj simpleks metodi" (str. 871), pridružuje se osnovna i modificirana simpleks tablica. Primijenit ćemo iste oznake kao i u modificiranoj simpleks metodi.

Ako je $(\pi_1,\ldots,\pi_{n-m})^T\geqslant 0$, onda (bez obzira na predznak od β_i). možemo primijeniti dualnu simpleks metodu zato jer je zadan dualno dopustiv oblik. Ona se također može transformirati na modificirani oblik (s onim istim prednostima koje su bile navedene na str. 873).

Kriterij minimalnosti za modificiranu dualnu simpleks metodu je isti kao i za dualnu simpleks metodu.

Ako uvjet minimalnosti nije zadovoljen, onda prijelaz na novu modificiranu simpleks tablicu slijedi ovako.

1) Izbor ključnog retka: od brojeva $b_i<0$ iz tablice odaberemo proizvoljni $n_{i^*}<0$ (na primjer najmanji b_i); zatim izračunamo one elemente tog ključnog retka i^*, koji manjkaju i unesemo ih u tablicu:

$$a_{i^*j}=(a_{i^*,n-m+1},\ldots,a_{i^*n})\,\alpha_j \quad \text{za} \quad j=1,\ldots,n-m.$$

2) Izbor ključnog stupca: j^* se odredi kao i za dualnu simpleks metodu; ako je $j^*\geqslant n-m+1$, onda je odgovarajući stupac kanonskog oblika već poznat. U protivnom ga odredimo pomoću formule $(a_{1j^*},\ldots a_{mj^*})^T=\mathbf{A}\alpha_{j^*}$ i unesemo u postojeću tablicu.

3) Zamjena baze pomoću ključnog elementa $a_{i^*j^*}$ obavi se kao i za modificiranu simpleks metodu.

Nalaženje početnog vrha. Ako dana ZLP još nema kanonski oblik, onda ga možemo dobiti pomoću rješenja pomoćne zadaće (5) kao u metodi artificijelnih varijabli, str. 864. Modificirana simpleks metoda može se primijeniti također i za rješavanje te pomoćne zadaće. Međutim, stupce koji odgovaraju pomoćnim varijablama ovdje ne smijemo precrtati. Ako je nađena optimalna modificirana simpleks tablica pomoćne zadaće takva da je $Q_0=0$, onda za „novu funkciju cilja" pomoćne zadaće možemo uzeti polaznu funkciju cilja*). Zatim računanje produžimo s dopunskim uvjetom da se stupci koji odgovaraju artificijelnim varijablama ne uzimaju za ključne stupce (uvjet minimalnosti se odnosi na ostale stupce).

Prema tome, postoji metoda određivanja prve dualno dopustive modificirane tablice. Međutim, modificirana dualna metoda (isto kao i dualna) primjenjuje se prije svega samo onda kada je takva tablica neposredno zadana ili slijedi iz optimalne modificirane tablice posredstvom nekih njenih izmjena.

B. TRANSPORTNA ZADAĆA

8. LINEARNA TRANSPORTNA ZADAĆA

Linearne transportne zadaće pripadaju osobito važnoj klasi zadaća linearnog programiranja. Zadaća se sastoji u nalaženju takvog plana prijevoza nekog proizvoda sa m skladišta $i=1,\ldots,m$ do $j=1,\ldots,n$ potrošača kod kojeg su troškovi minimalni. Troškove transporta jedinice proizvoda (po ravnom putu) do potrošača j iz skladišta

*) U slučaju $Q_0>0$ u optimalnoj točki pomoćne zadaće je dopustivo područje polazne zadaće prazan skup, pa je prema tome sama zadaća nerješiva.

i, označavamo sa p_{ij}. Pretpostavlja se da su troškovi transporta proporcionalni količini prevažanog proizvoda, tj. cijena prijevoza k jedinica proizvoda jednaka je kp_{ij}. Dalje se pretpostavja da je

$$\sum_{i=1}^{m} b_i=\sum_{j=1}^{n} a_j, \tag{11}$$

gdje je b_i količina proizvoda uskladištenog u skladištu i, da a_j označava potražnju (potrebu) potrošača j.

Napomena. Ako je $\sum_{i=1}^{m} b_i>\sum_{j=1}^{n} a_j$, onda na skladištima ostaje količina proizvoda jednaka $\sum_{i=1}^{m} b_i-\sum_{j=1}^{n} a_j$. U tom slučaju uvodi se „fiktivni" potrošač $n+1$ s potražnjom $\sum_{i=1}^{m} b_i-\sum_{j=1}^{n} a_j$ i pretpostavlja se da su troškovi transporta $p_{i,n+1}$ jednaki 0 za sve i. Tada je $x_{i,n+1}$ količina proizvoda koja je ostala na skladištima i. Ako je $\sum_{i=1}^{m} b_i<\sum_{j=1}^{n} a_j$, onda se potražnja ne može pokriti. U ovom slučaju početne uvjete treba mijenjati tako da proizvodnja zadovoljava potražnju.

Označimo sa x_{ij} onu količinu proizvoda koja je sa skladišta i poslana potrošaču j. Uz pretpostavku (11) moramo riješiti slijedeću ZLP:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j \quad \text{za} \quad j=1,\ldots,n;\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i \quad \text{za} \quad i=1,\ldots,m;\\
&x_{ij}\geqslant 0 \quad \text{za} \quad i=1,\ldots,m \quad \text{i} \quad j=1,\ldots,n;\\
&K_{\min}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Transportnu zadaću možemo okarakterizirati *transportnom tablicom* i *tablicom troškova*:

	a_1 ... a_n
b_1	
⋮	
b_m	

p_{11} ...	p_{1n}
⋮	⋮
p_{m1} ...	p_{mn}

Dopustiv plan prijevoza predstavljat ćemo u obliku transportne tablice:

	a_1	...	a_n
b_1	$\bar{x}_{11}$	...	$\bar{x}_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
b_m	$\bar{x}_{m1}$	...	$\bar{x}_{mn}$

Zbrojevi redaka moraju biti jednaki b_i, a zbrojevi stupaca a_j i svi $\bar{x}_{ij}$ moraju biti nenegativni.

Primjer 7.

	20	5	10	10	5
15					
15					
20					

5	6	3	5	9
6	4	7	3	5
2	5	3	1	8

Na taj način dobivamo slijedeću ZLP:

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} &&= 15,\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} &&= 15,\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} &&= 20,\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31} &&= 20,\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32} &&= 5,\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33} &&= 10,\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34} &&= 10,\\
&x_{15}+x_{25}+x_{35} &&= 5;
\end{aligned}
$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{za} \quad i=1,2,3;\ j=1,2,3,4,5;$$

$$K_{\min}=5x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+9x_{15}+6x_{21}+4x_{22}+7x_{23}+3x_{24}+5x_{25}+2x_{31}+5x_{32}+3x_{33}+x_{34}+8x_{35}.$$

Zadaće ovog tipa svrsishodno je rješavati pomoću specijalne varijante simpleks metode, tzv. *transportne metode* (vidi str. 881).

Sve transportne zadaće imaju uvijek optimalno rješenje. Ako u vrijednosti a_j i b_i u uvjetima transportne zadaće cjelobrojne, onda su i vrijednosti varijabli x_{ij} u svim bazičnim rješenjima (a također i u bilo kojem optimalnom bazičnom rješenju) također cjelobrojne.

Napomena. Rang matrice koeficijenata jedaka je $n+m-1$. Uvjet iz (11) je automatski ispunjen, ako su ispunjeni svi ostali uvjeti.

9. NALAŽENJE POČETNOG RJEŠENJA

Zapišimo tablicu

	a_1	...	a_n
b_1			
$\vdots$			
b_m			

1) Odaberimo ćeliju (i^*, j^*).

2) Na mjestu (i^*, j^*) zapišimo $\bar{x}_{i^*j^*}=\min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}$*):

	a_1	...	a_{j^*}	...	a_n
b_1					
$\vdots$					
b_{i^*}			$\bar{x}_{i^*j^*}$		
$\vdots$					
b_m					

a) $b_{i^*} \leqslant a_{j^*}$: ostale ćelije retka i^* precrtamo (ukupan sadržaj skladišta i^* postavimo u j^*). Tada a_{j^*} zamijenimo sa $(a_{j^*}-b_{i^*})$, a b_{i^*} sa 0.

b) $b_{i^*} \geqslant a_{j^*}$: ostale ćelije stupca j^* precrtamo (potrošač j^* je već dobio čitavu proizvodnju). Tada b_{i^*} zamijenimo sa $(b_{i^*}-a_{j^*})$, a a_{j^*} sa 0.

3) Dobivena tablica ima jedan redak ili jedan stupac manje od prethodne.

Ta se metoda primjenjuje tako dugo dok u tablici ne preostane niti jedna slobodna ćelija.

Nakon konačnog broja takvih koraka, svakoj se ćeliji polazne tablice može pridružiti precrtana ćelija ili ćelija u kojoj je upisan broj $\bar{x}_{ij}$. Na taj smo način našli bazno rješenje: varijable koje korespondiraju precrtanim ćelijama su slobodne varijable; ostale varijable su bazične i njima pridružujemo vrijednosti $\bar{x}_{ij}$. U tom će se slučaju u svakom retku i svakom stupcu nalaziti bar jedna bazična varijabla (moguće s vrijednosti 0, što odgovara degeneriranom slučaju).

*) Ako je $\min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}=0$ u tablicu se unese 0. Treba razlikovati unošenje 0 od ne unošenja nikakvog broja!

Da nađemo najekonomičnije početno bazično rješenje obično odaberemo ćeliju (i^*, j^*), kojoj korespondiraju minimalni transportni troškovi:

$$\min_{i,j} p_{ij} = p_{i^*j^*}.$$

Ako odaberemo lijevu gornju ćeliju, onda metodu izbora nazivamo *pravilom sjeverozapadnog kuta.*

Promotrimo određivanje početnog rješenja na primjeru 7.

I. Primjena pravila sjeverozapadnog kuta: u lijevu gornju ćeliju upišemo min $\{15, 20\} = 15$, a preostali dio retke precrtamo:

		5				
		[20]	5	10	10	5
0	[15]	15	—	—	—	—
	15					
	20					

U lijevu gornju ćeliju dobivene tablice upišemo min $\{5, 15\} = 5$, a preostali dio stupca precrtamo:

		0				
		[5]				
		[20]	5	10	10	5
0	[15]	15	—	—	—	—
10	[15]	5				
	20	|				

Na kraju dobijemo tablicu

				0		0		
				[5]	0	[5]	0	0
				[20]	[5]	[10]	[10]	[5]
		0	[15]	15	—	—	—	—
0	[5]	[10]	[15]	5	5	5	—	—
0	[5]	[15]	[20]	|	|	5	10	5

Njoj odgovara bazično rješenje $x_{11} = 15$, $x_{21} = 5$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 5$, $x_{33} = 5$, $x_{34} = 10$, $x_{35} = 5$ (bazične varijable); ostale varijable su slobodne i njima u bazičnom rješenju korespondira vrijednost 0.

II. $\min_{i,j} p_{ij} = 1 = p_{34}$. U ćeliju (3, 4) upišemo min $\{20, 10\} = 10$ i ostatak stupca precrtamo.

$\min_{j \neq 4} p_{ij} = 2 = p_{31}$. U ćeliju (3, 1) upišemo min $\{10, 20\} = 10$ i ostatak trećeg retka precrtamo.

$\min_{\substack{i \neq 3 \\ j \neq 4}} p_{ij} = 3 = p_{13}$. U ćeliju (1, 3) upišemo min $\{15, 10\} = 10$ i ostatak trećeg stupca precrtamo. Nastavljajući na isti način dalje dobijemo tablicu:

				0				
				[5]				
				[10]	0	0	0	0
				[20]	[5]	[10]	[10]	5
	0	[5]	[15]	5	|	10	|	—
0	[5]	[10]	[15]	5	5	|	|	5
	0	[10]	[20]	10	—	—	10	—

10. TRANSPORTNA METODA

Pretpostavimo da imamo transportnu tablicu koja korespondira početnom rješenju $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$ za bazične varijable i $x_{ij} = 0$ za slobodne varijable (ćelije koje korespondiraju slobodnim varijablama ostaju prazne). U daljnjem razmatranju stalno ćemo se pozivati na primjer 7, koji je opisan na str. 878.

p_{11}		p_{1j}		p_{1n}	u_1
	⋮		⋮		⋮
p_{i1}		p_{ij}		p_{in}	u_i
	⋮		⋮		⋮
p_{m1}		p_{mj}		p_{mn}	u_m
v_1	⋯	v_j	⋯	v_n	

Sl. 441

Nalaženje simpleks faktora. Popunimo tablicu troškova (rashoda) ostavivši praznima one ćelije koje korespondiraju slobodnim varijablama. U desni krajnji stupac upišimo vrijednosti nepoznanica $u_1, \ldots, u_m$, a u najniži redak vrijednosti nepoznanica $v_1, \ldots, v_n$ (slika 441).

Tih $n+m$ nepoznanica moraju za sve (i, j) koje korespondiraju bazičnim varijablama zadovoljavati sistem linearnih jednadžbi

$$u_i+v_j=p_{ij}.$$

Moguće je dokazati da taj sistem za sva bazična rješenja ima trokutast oblik i da ima rang $n+m-1$; sistem se, prema tome, uvijek može riješiti na slijedeći način: na prvom koraku stavimo da je $v_n=0$. Ako na k-tom koraku nađemo vrijednost nepoznanice, onda u sistemu još uvijek nije određena nepoznanica koja se jednoznačno može naći na $(k+1)$-om koraku iz jednadžbe $u_i+v_j=p_{ij}$, i to zato jer je vrijednost druge nepoznanice u toj jednadžbi već poznata. To vrijedi tako dugo dok ne nađemo sve nepoznanice. Koju nepoznanicu možemo naći na $(k+1)$-tom koraku, odredimo pokusom. Varijable u_i i v_j nazivamo „*simpleks faktorima*" („*simpleks množiteljima*"). Ponekad ih nazivamo i „*potencijalama*", a transportnu metodu „*metodom potencijala*".

Primjer 8.

5					u_1
6	4	7			u_2
		3	1	8	u_3
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

$v_5=0\rightarrow u_3=8$, jer je $u_3+v_5=p_{35}=8$, $\rightarrow v_4=-7$, jer je $u_3+v_4=p_{34}=1$,

$\rightarrow v_3=-5$, jer je $u_3+v_3=3$, $\rightarrow u_2=12\rightarrow v_2=-8\rightarrow v_1=-6\rightarrow u_1=11$.

Simpleks množitelji potrebni su zato da pronađemo slobodnu ćeliju (i, j) koja pri zamjeni baze prelazi u bazičnu (to odgovara traženju ključnog stupca u simpleks metodi). Da odredimo simpleks množitelje na slobodna mjesta u tablici unosimo vrijednosti

$$p'_{ij}=p_{ij}-u_i-v_j$$

(koeficijenti funkcije cilja preračunati za slobodne varijable). Ako su svi $p'_{ij}\geqslant 0$, onda je bazično rješenje optimalno (vidi uvjet minimalnosti). U protivnom odaberemo proizvojni $p'_{\alpha\beta}<0$, a najčešće najmanji među njima. Indeksom (α, β) označena je slobodna varijabla $x_{\alpha\beta}$ koja mora ući u bazu. Odgovarajuću ćeliju transportne tablice označit ćemo predzankom $+$.

Primjer 9.

p_{ij}:

5	6	3	5	9	
6	4	7	3	5	
2	5	3	1	8	

,

5					11
6	4	7			12→
		3	1	8	8
−6	−8	−5	−7	0	

5	3	−3	1	−2
6	4	7	−2	−7
0	5	3	1	8

minimalni element: $-7\rightarrow(\alpha, \beta)=(2, 5)$.

U transportnoj tablici označimo znakovima $-$ i $+$, pored ćelije (α, β) i druge ćelije zauzete brojevima tako da u svakom retku i svakom stupcu transportne tablice broj znakova $+$ bude jednak broju znakova $-$. To se uvijek može postići na jedinstven način, pri čemu je u svakom retku i svakom stupcu maksimalno po jedan znak $+$ i $-$.

Primjer 10.

15				
5	5	5		+
		5	10	5

→

15				
5	5	5^-		+
		5^+	10	5^-

(znak $+$ postavljen je u ćeliju (2, 5). Prema tome, u posljednji stupac valja staviti $-$; to se može samo u ćeliju (3, 5). Iz toga slijedi da u posljednji redak valja staviti $+$. U ćeliju sa brojem 10 se taj znak ne može postaviti, jer se tada u odgovarajućem stupcu ne bi nalazio znak $-$, itd.).

Zatim nađemo minimum M svih elemenata označenih znakom $-$, pa odaberemo onu ćeliju (γ, δ) u kojoj se taj minimum dostigne. U našem primjeru je $M=5$ pa odaberemo ćeliju $(\gamma, \delta)=(2, 3)$; pri tome (γ, δ) označava onu bazičnu varijablu koja mora biti slobodna, tj. koja korespondira indeksu ključnog retka simpleks metode.

Zamjena baze (prijelaz na novu transportnu tablicu) rastavlja se na slijedeće korake.

a) U ćeliju (α, β) nove tablice upišemo broj M.

b) Ćeliju (γ, δ) ostavimo praznom.

c) U ostalim ćelijama označenim znakovima $-$ ili $+$ odbijemo M od broja koji je upisan u tu ćeliju ili M dodamo tome broju. Rezultat unesemo u odgovarajuću ćeliju nove tablice.

d) Neoznačene brojeve (brojeve bez predznaka) prenesemo u novu tablicu bez izmjene. Preostale ćelije u novoj tablici ostavimo praznima.

Primjer 11.

15				
5	5	5^-		+
		5^+	10	5^-

→

15				
5	5			5
		10	10	0

Na taj se način dobije nova transportna tablica i s njome se čitav postupak ponovi. Nakon konačnog broja koraka bit će ispunjen uvjet minimalnosti (ako ne uzmemo u obzir teoretski mogući slučaj zaciklira-nja u degeneriranom slučaju).

Primjer 12. Hod rješavanja primjera 7 sa str. 878 je slijedeći:

	20	5	10	10	5
15	15				
15	5	5	5^-		+
20			5^+	10	5^-

5	3	−3	1	−2	11
6	4	7	−2	−7	12
0	5	3	1	8	8
−6	−8	−5	−7	0	

↓

15				
5^-	5			5^+
+		10	10	0^-

5	3	4	8	5	4
6	4	7	5	5	5
−7	−2	3	1	8	8
1	−1	2	0	0	

↓

15^-		+		
5	5			5
0^+		10^-	10	

5	3	−3	1	5	4
6	4	0	−2	5	5
2	5	3	1	7	1
1	−1	2	0	0	

↓

5		10		
5^-	5		+	5
10^+			10^-	

5	3	3	1	5	4
6	4	3	−2	5	5
2	5	3	1	7	1
1	−1	−1	0	0	

↓

↓

5		10		
	5		5	5
15			5	

$K_{opt} = 150$

5	1	3	1	3	6
2	4	5	3	5	5
2	3	3	1	5	3
−1	−1	−3	−2	0	

Prvu transportnu tablicu na str. 877 dobili smo pomoću pravila sjeverozapadnog kuta. Kako se dobije prva pomoćna tablica i druga transportna tablica, već je ranije opisano. Zatim redom tražimo novu pomoćnu i novu transportnu tablicu sve dotle dok nakon četiri zamjene baze ne bude dostignut minimum.

Pažnju treba obratiti na pretposljednju transportnu tablicu, jer je ona bila nađena pomoću poboljšane metode nalaženja početnog rješenja sa stranice 879; ako od nje počnemo, trebat će nam samo jedna zamjena baze, dok će pri upotrebi pravila sjeverozapadnog kuta biti potrebne četiri zamjene. U degeneriranom slučaju, kao i u slučaju simpleks metode, primijenit će se posebna metoda za otklanjanje zacikliranja onda i samo onda kada je M nakon nekoliko uzastopnih koraka jednak 0.

Ako imamo degeneriranu transportnu tablicu (raspoznajemo je po nulama), onda zamijenimo a_m sa $a_m + n\varepsilon$ i sve b_j sa $b_j + \varepsilon$, gdje je $\varepsilon > 0$ vrlo mali, pa ispravimo $\bar{x}_{ij}$ bazičnih varijabli tako da se za nove a_i i b_j dobije bazično rješenje. To se uvijek može učiniti na jedinstven način (kao i pri traženju simpleks množitelja):

15				
5	5			5
		10	10	0

	$20+\varepsilon$	$5+\varepsilon$	$10+\varepsilon$	$10+\varepsilon$	$5+\varepsilon$
15					
15					
$20+5\varepsilon$					

$15+2\varepsilon$				
$5-\varepsilon$	$5+\varepsilon$			$5-2\varepsilon$
		$10+\varepsilon$	$10+\varepsilon$	3ε

Ako je, na takav način dobiveni, element $\bar{x}_{kl}$ negativan, onda u tome istome retku moramo imati pozitivni (još prije promjene) element $\bar{x}_{kr}$, i u tom istom stupcu pozitivni element $\bar{x}_{sl}$. Tada je ćelija (s, r)

uvijek slobodna, pa stavimo znak + i provedemo zamjenu baze. Na taj se način možemo riješiti svih negativnih vrijednosti.*)

Zatim pomoću transportne metode produžimo postupak; na degenerirane više nećemo naići. Ako u optimalnom rješenju provedemo granični proces $\varepsilon \to 0$, dobit ćemo optimalno rješenje polazne zadaće.

C. TIPIČNE PRIMJENE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

11. KORIŠTENJE PROIZVODNIH KAPACITETA

Primjer 13. Treba proizvesti četiri vrste proizvoda A_i u količinama od a_i do b_i ($i=1, 2, 3, 4$). Proizvodna cijena pojedinog proizvoda neka je p_i. Za svaski proizvod A_i treba a_{ij} minuta radnog vremena na svakom od strojeva M_j ($j=1, 2, 3$), ukupno vrijeme upotrebe strojeva mora, s obzirom na izvjesne okolnosti, biti od n_j do m_j minuta. Treba naći plan proizvodnje s minimalnom proizvodnom cijenom. **Varijabla** x_i je broj proizvoda tipa A_i koje treba proizvesti.

Model.

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 \leqslant m_j \quad \text{za} \quad j=1, 2, 3,$$
$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 \geqslant n_j \quad \text{za} \quad j=1, 2, 3;$$
$$x_i \leqslant b_i,\ x_i \geqslant a_i,\ x_i \geqslant 0 \quad \text{za} \quad i=1, 2, 3, 4;$$
$$Q_{\min}(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3.$$

Varijanta. Ako je p_i dobitak po jedinici proizvoda, onda treba tražiti $Q_{\max}(x)$.

Napomena. Za veće količine proizvoda zahtjev cjelobrojnosti može se zanemariti, a kada se računa u jedinicama serije ili obima, ta poteškoća sama po sebi otpada. Ako zaista naiđemo na netom opisani slučaj, onda se u glomaznim zadaćama preporučuje primijeniti specijalnu simpleks metodu za „dvostrano ograničenje zadaće". Vrlo često će, međutim, za mnoge j biti $n_j=0$ ili $m_j=\infty$ (nejednakost je suvišna), a za mnoge i bit će $a_i=0$ ili $b_i=\infty$ (nejednakost je identički jednaka uvjetu predznaka ili suvišna). Tada metode rješavanja koje su bile izložene na stranici (851) i dalje imaju istu učinkovitost.

Drugi primjeri.

A_i	M_j
Vrste kvalificiranih kadrova	Centri koji obrazuju kadrove
Poljoprivredne kulture	Radna snaga, tehnika
Pasmine domaćih životinja	Radna snaga, staje, krmivo

*) Često je dovoljno svagdje ε zamijeniti sa $-\varepsilon$.

12. ZADAĆA O SMJESAMA

Primjer 14. Treba proizvesti slitinu od tri metala M_i s gustoćom a_{i1}. Slitina treba da sadrži a_{i2} ugljika i a_{i3} fosfora, i oni mogu biti korišteni u količinama a_i' do b_i', dok troškovi za izradu slitine mogu biti p_i dinara po kilogramu. Gustoća slitine mora se kretati od n_1 do m_1; sadržaj ugljika od n_2 do m_2, a sadržaj fosfora od n_3 do m_3. Treba proizvesti c kg slitine koja pri tome mora biti što jeftinija.

Varijabla $x_i = \dfrac{\text{količina utrošenog metala } M_i}{c}$.

Model, kao na str. 886, gdje treba staviti da je $a_i = \dfrac{a_i'}{c}$, $b_i = \dfrac{b_i'}{c}$.

Drugi primjer.

M_i	a_{ij}
Krmiva	Sadržaj hranjivih tvari; saržaj štetnih tvari
Plin za grijanje	Kaloričnost; sadržaj sumpora
Sorta cikle	Urod lista; urod korijena

13. RAZDIOBA; SASTAVLJANJE PLANA; USPOREDBA

Primjer 15. Treba proizvesti m tipova proizvoda P_j u količini a_j. Imamo n strojeva M_i sa b_i minuta rada. Svaka jedinica proizvoda P_j može se proizvesti prema izboru na bilo kojem stroju u roku od c_{ij} minuta uz cijenu od p_{ij} dinara. Treba naći najekonomičniju razdiobu po strojevima.

Varijabla x_{ij} je količina proizvoda P_j proizvedena na stroju M_i.

Model: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_j$ za $j=1, \ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \leqslant b_i$ za $i=1, \ldots, n$;

$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ za sve } (i, j),\ Q_{\min}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_{ij}.$$

Model je poopćenje transportnog modela. Zadaća se može riješiti pomoću simpleks metode.

Varijanta. Treba smanjiti na najmanju mjeru ukupno radno vrijeme strojeva i radno vrijeme radnika koji strojeve poslužuju.

Model je analogan prethodnom, ali sa ciljnom funkcijom $Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$.

Drugi primjeri.

P_j	M_i	c_{ij}	p_{ij}	
Poljoprivredne kulture	Sjetvene površine	$=1$	Dohodak od uroda	max
Poduzeća	Izvori energije	$=1$	Koeficijent iskorištenja	max
Proizvodnja	Poduzeća	Troškovi	Dobitak	max
Isporuka u kvartalu j	Produkcija u kvartalu i	$=1$	Proizvodni troškovi + troškovi čuvanja	min

Napomena. Ako je $c_{ij}=1$, može se primijeniti transportna metoda, ali tek nakon što se pomoću uvođenja fiktivnog P_{m+1} dobije $\Sigma a_j=\Sigma b_i$. U neophodnim slučajevima određene se razdiobe moraju isključiti (na primjer, pri sastavljanju plana treba uzeti u obzir da proizvodnju iz trećeg kvartala nije moguće izvesti već u drugom kvartalu). To se može učiniti tako da se u odgovarajuće ćelije stavi $p_{ij}=\infty$.

Za $n=m$, $a_j=1$, $c_{ij}=1$, $x_{ij}\in\{0, 1\}$ za sve i i j, kao poseban slučaj, dobije se *zadaća o uspoređivanju.*

Primjeri.

P_j	M_i	p_{ij}	
n proizvoda	n poduzeća	Proizvodni troškovi	min
n poduzeća koje treba izgraditi	n lokacija	Troškovi ovladavanja proizvodnjom	min
n kompozicija vlakova koje treba sastaviti	n putova	Manevriranje	min
n jedinica osoblja	n radnika	Produktivnost	max
n oblika radne aktivnosti	n radnika	Utrošak vremena	min

Rješenje se može naći pomoću transportne metode (najprije treba obaviti modifikaciju, da bi se izbjegli degenerirani slučajevi).

14. KROJ; PLANIRANJE SMJENA; POKRIĆE

Primjer 16. Za izradu proizvoda oblika šipke duljine l imamo varijante kroja Z_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$). Treba dobiti a_j dijelova T_j duljine l_j ($j=1, 2, 3, 4$). Svakom varijantom kroja dobivamo k_{ij} dijelova T_j. (Pri tome je $k_{i1}l_1+k_{i2}l_2+k_{i3}l_3+k_{i4}l_4\leqslant l$. Ovaj uvjet za koeficijente sadržan je u definiciji „varijante kroja" i on nije uvjet optimizacije.) Potrebna količina dijelova mora se dobiti iz minimalnog broja šipki.

Varijabla x_i je broj šipki koje su razrezane po varijanti Z_i.

Model. $k_{1j}x_1+k_{2j}x_2+k_{3j}x_3+k_{4j}x_4+k_{5j}x_5+k_{6j}x_6\geqslant a_j$ za $j=1, 2, 3, 4$; $x_i\geqslant 0$ za $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, $Q_{\min}(x)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$.

Nkapomena. Uvođenjem pomoćne varijable i množenjem jednadžbi sa -1 odmah dobivamo dualno dopustiv kanonski oblik; svrsishodno je prema tome primijeniti dualnu ili modificiranu dualnu simpleks metodu.

Drugi primjeri.

Sirovina	T_j
Daske iz strugotine	Manje daske
Tkanina namotana u L-metarski smotak ili limena traka širine l	L_j-metarske tkanine ili limena traka širine l_j

Planiranje smjena u knjižnicama ili prodaju karata na blagajnama može se također modelirati na sličan način: Z_i su moguće smjene u toku dana; T_j je određeno vrijeme dana; $k_{ij}=1$ ako Z_i predviđa rad u vrijeme T_j, dok je u protivnom slučaju $k_{ij}=0$; a_j je broj radnika potrebnih u trenutku T_j; x_i je broj radnika u smjeni Z_i. U specijalnom slučaju, kada je $a_j=1$ i $k_{ij}\in\{0, 1\}$, pojavljuju se *zadaće o pokriću*, koje, naravno, treba rješavati uvijek metodama cjelobrojnog linearnog programiranja.

Primjer 17. Za izgradnju hidroelektrana (HE) postoji šest mogućih lokacija Z_i. Svaka HE Z_i mogla bi energijom snabdijevati ($k_{ij}=1$) ili ne bi mogla snabdijevati ($k_{ij}=0$) neko od četiriju područja. Nakon izgradnje minimalnog broja HE svako od četiriju područja mora biti bar jednom „pokriveno".

Varijabla $x_i=1$, ako je u Z_i izgrađena HE, a $x_i=0$, ako HE nije izgrađena.

Model je isti kao model kroja, ali s uvjetom $a_1=a_2=a_3=a_4=1$ i s dopunskim uvjetom „$x_i=0$ ili 1" za $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Varijante primjera. Neka su troškovi gradnje Z_i jednaki p_i. Traži se najjeftinije „pokrivanje" svih područja. Funkcija cilja u ovome slučaju ima oblik:

$$Q_{\min}=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4+p_5x_5+p_6x_6.$$

Može se također zahtijevati n-kratno pokrivanje $\rightarrow a_i=n$.

Drugi primjeri.

Z_i	T_j
Faze regulacije uličnog prometa	Tokovi kretanja kojima treba osigurati put
Kandidati za ekspediciju	Potrebna znanja (medicina, radio veza, strani jezici)

D. PARAMETARSKO LINEARNO PROGRAMIRANJE

15. FORMULACIJA ZADAĆE

Ako svi koeficijenti u uvjetima i funkciji cilja zavise od jednog ili više parametara, onda govorimo o parametarskom programiranju. Praktično primjenljive metode postoje onda kada o parametru linearno zavise samo koeficijenti funkcije cilja (vidi niže). Slučaj, kada od parametra linearno zavise samo desne strane uvjetnih jednadžbi, može se svesti na prethodni pomoću razmatranja dualne zadaće (vidi str. 869). Zaokružena teorija, u kojoj se međutim primjenjuju glomazni računi, postoji također onda kada koeficijenti funkcije cilja linearno zavise o nekoliko parametara (pomoću dualne zadaće također se razmatraju konstantni članovi u uvjetima koji ovise o parametrima). Analogna tvrdnja vrijedi, ako o parametrima linearno zavise kako koeficijenti funkcije cilja tako i konstantni članovi u uvjetima.

Ne postoje opće metode za slučajeve kada od parametara ovise koeficijenti uz varijable u uvjetima.

16. METODA RJEŠAVANJA SLUČAJA „JEDNOPARAMETARSKE FUNKCIJE CILJA"

Parametarska ZLP (PZLP)

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_1\geqslant 0,\ldots,\ x_n\geqslant 0,\\ Q_{\min}=(p_1+q_1t)\,x_1+\ldots+(p_n+q_nt)\,x_n\end{gathered}$$

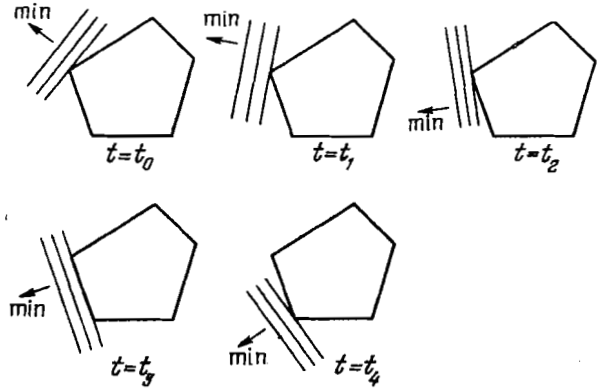
mora se istražiti za sve t, $-\infty<t<\infty$.

(Drugi tipovi zadaća linearnog programiranja s jednoparametarskom funkcijom cilja svode se na taj tip, kako je to opisano u D.15. str. 890).

Geometrijska interpretacija u slučaju dviju varijabli (usporedi A.1.). Za sve vrijednosti od t zadaće

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leqslant b_m,\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\\ Q_{\min}=(p_1+q_1t)\,x_1+(p_2+q_2t)\,x_2\end{gathered}$$

imaju isto dopustivo područje. Promjenom parametra t smjer razina crte postepeno se „zakreće". Na slici 442 predočeno je pet položaja razine crte pri tom „zakretanju". Iz crteža se vidi da se za $t=t_0$, $t=t_1$,



Sl. 442

$t=t_2$ optimalna točka podudara s jednim te istim vrhom. Za određenu vrijednost $t=t_3$ optimalna su dva susjedna vrha (i sve točke brida, koji spaja te vrhove). Za veliko $t=t_4$ optimalan je samo jedan novi vrh.

Ako je vrh PZLP optimalna točka za $t=t_0$, onda postoji potpuno određeni interval $\underline{t}\leqslant t<\overline{t}$ takav da je za funkciju cilja, koja ovisi o parametru t, u tome intervalu taj vrh optimalan, dok istovremeno za t izvan tog intervala taj vrh nije optimalan.

Pri tome su u obzir uzete vrijednosti $\underline{t}=-\infty$, $\overline{t}=\infty$, $\underline{t}=\overline{t}$.

Taj interval tada nazivamo *područjem stabilnosti* vrha. Ako su E_1 i E_2 dva vrha i t' leži unutar oba područja stabilnosti, onda su ta područja identična. Neidentična područja stabilnosti imaju najviše jednu zajedničku točku.

Neka PZLP ima optimalno rješenje bar za jednu vrijednost parametra. Tada u intervalu $-\infty<t<\infty$ postoji konačan broj vrijednosti $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_t$ takvih da:

a) pri $t\to t_0$ ne postoji rješenje PZLP (taj interval može biti prazan, $t_0=-\infty$);

b) interval $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$ je za svaki $i=0, 1,\ldots, r-1$ područje stabilnosti bar jednog vrha PZLP, $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$ može biti područje stabilnosti vrha za neke određene $i=0, 1,\ldots, r$;

c) za $t>t_r$ ne postoji rješenje PZLP (taj interval može biti prazan, $t_r=\infty$).

Ako shvatimo optimalnu vrijednost funkcije cilja za svaku PZLP s fiksiranim t kao funkciju od t, onda dobivamo *funkciju optimalnih vrijednosti* $Q_0(t)$.

Funkcija optimalnih vrijednosti je neprekinuta, konkavna i po dijelovima linearna na intervalu onih vrijednosti od t za koje je ZLP rješiva. Točke loma su karakteristične vrijednosti $t_1, t_2,\ldots, t_{r-1}$.

Metoda rješavanja. Osnovna ideja metode sastoji se u tome da se PZLP riješi za fiksne t i tada postupno mijenja t od jedne karakteristične vrijednosti t_i do druge.

Promatrat ćemo PZLP kanonskog oblika koja se može dobiti na način opisan u A.4. na str. 864. Redak simpleks tablice, koji se odnosi na funkciju cilja (usporedi A.2. str. 856), dijeli se na dva retka, jedan za p_j, a drugi za q_j. U skladu s time je $-Q_0=-Q_{0p}-Q_{0q}t$. Pri zamjeni baze oba se retka transformiraju odvojeno, kao običan redak funkcije cilja:

$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
λ_n	$a_{\lambda_n\lambda_{m+1}}\ldots a_{\lambda_m\lambda_n}$	b_{λ_m}
	$p_{\lambda_{m+1}}\ \ldots p_{\lambda_n}$	$-Q_{0p}$
	$q_{\lambda_{m+1}}\ \ldots q_{\lambda_n}$	$-Q_{0q}$

(ovdje slova označavaju brojeve u odgovarajućoj tablici; općenito to nisu brojevi koji ulaze u prvotno zadani oblik PZLP).

Ako nije poznata ni jedna vrijednost od t za koju je PZLP rješiva, onda se može postupiti na slijedeći način. Najprije nađemo optimalno rješenje za proizvoljno veliki t. To znači da ćemo u svojstvu elementa „upravljajućeg retka" za izbor razrješivog stupca trebati samo q_j, ako su oni $\neq 0$, a p_j samo tada ako je $q_j=0$. Na taj ćemo način provoditi korake simpleks metode tako dugo dok to bude moguće. Na kraju ćemo doći do jednog od slijedeća dva slučaja.

Slučaj I. Svi q_j u dobivenoj tablici su $\geqslant 0$ i tamo gdje je $q_j=0$ svagdje je $p_j\geqslant 0$. To znači da smo dobili optimalnu tablicu, koja korespondira vrhu s područjem stabilnosti koje se prostire do $t_r=+\infty$.

Dalje postupamo onako kako je opisano niže u odjeljku „Određivanje lijeve granice područja stabilnosti".

Slučaj II. Slučaj I ne stoji, tj. za negativan element upravljajućeg retka su svi a_{ij} odgovarajućeg stupca u tablici $\leqslant 0$.

Tada promatramo (nezavisno od p_j i q_j) sve takve stupce gdje je $a_{ij}\leqslant 0$ za sve elemente stupca j.

Neka je J odgovarajući skup indeksa. Odredimo t' kao najveći t za koji je $p_j+q_jt\geqslant 0$ za sve $j\in J$. Ako takav t' ne postoji, onda PZLP nema optimalno rješenje niti za jedan t.

Upotrijebimo p_j+q_jt' kao novi upravljajući redak i primijenimo simpleks metodu. Ako nas ona vodi do optimalnog vrha, onda je $t'=t_r$ desna granica njegovog područja stabilnosti, pa dalje postupamo onako kako je opisano u odjeljku „Određivanje lijeve granice područja stabilnosti". Ako simpleks metoda ne vodi do optimalnog vrha, onda je to zato jer u odnosu na novi upravljajući redak opet imamo slučaj II. Tada čitav postupak ponovimo i dobijemo t'', itd. Poslije konačnog broja koraka dobivamo t_r ili dolazimo do zaključka da je zadaća nerješiva.

Određivanje lijeve granice područja stabilnosti. Poznata nam je desna granica t_{v+1} područja stabilnosti i optimalna tablica koja odgovara vrhu E. Pretpostavimo da smo odabrali t^* jedva nešto manji od t_{v+1} (pri $t_{v+1}=\infty$ uzmemo dovoljno veliki pozitivan broj). Tada postoje dvije mogućnosti: 1) tablica je još optimalna za t^*, i t^* je unutarnja točka područja stabilnosti vrha E; stavimo da je $E=E^*$; 2) tablica više nije optimalna za t^*, onda je t_{v+1} lijeva granica područja stabilnosti vrha E. Nađimo optimalnu tablicu koja odgovara vrijednosti t^* i to pomoću simpleks metode. Ako optimalni vrh ne postoji, onda je $t_{v+1}=t_0$ i PZLP je nerješiva za vrijednosti parametra manjih od t_{v+1}. Ako postoji optimalni vrh, onda ga označimo sa E^*; točka t^* je unutarnja točka njegova područja stabilnosti.

U optimalnoj tablici, koja korespondira vrhu E, odredimo minimalnu t za koju je $p_j+q_jt\geqslant 0$ (to može biti i $-\infty$). Dobivena vrijednost je t_v.

Produžimo li primjenu te metode dobit ćemo rješenje PZLP za sve t za koje ono postoji.

Napomena 1. Metoda se pojednostavnjuje ako je poznata vrijednost parametra za koju je PZLP rješiva. Na početku simpleks metodom odredimo odgovarajuću optimalnu tablicu. Poslije toga primijenimo metodu „određivanja lijeve granice područja stabilnosti" na sve karakteristične vrijednosti koje su lijevo od te vrijednosti i analogno primijenimo metodu „određivanja desne granice područja stabilnosti" na sve karakteristične vrijednosti koje su zdesna. U optimalnoj tablici, koja odgovara vrhu E^*, u tome slučaju, treba naći onu maksimalnu vrijednost od t za koju su svi $p_j+q_j\geqslant 0$.

Napomena 2. Ako je zadana gornja granica $t_{\max}$ iznad koje nas t ne zanima, onda primijenimo simpleks metodu s funkcijom cilja koja korespondira $t_{\max}$ Ako dobijemo optimalnu vrijednost, onda pri „određivanju lijeve granice područja stabilnosti" koristimo $t_{\max}$ kao $t_{\nu+1}$. Ako ne dođemo do optimalne vrijednosti, onda postupak produžavamo kao u slučaju II.

Napomena 3. Ako je zadana donja granica ispod koje nas vrijednosti od t ne zanimaju, onda postupak prekidamo čim postanu karakteristične vrijednosti t ili vrijednosti t', t'', ... u slučaju II manje od $t_{\min}$.

Napomena 4. Degenerirani vrhovi imaju istu ulogu kao i pri rješavanju neparametarske zadaće linearnog programiranja; ovdje se time nećemo baviti.

Primjer 18.

$$\begin{aligned} \underline{x}_4 - x_5 + x_6 &= 1,\\ \underline{x}_1 - x_5 + 2x_6 &= 3,\\ \underline{x}_2 + x_3 + x_6 &= 2,\\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_6 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

$$Q_{\min}=(-3-3t)x_3+(1-t)x_5+(1+3t)x_6.$$

Odmah nalazimo početni vrh, sastavljamo odgovarajuću tablicu (vidi dalje) i upravljajući redak za veliki t. Tablica nije optimalna za po volji veliki t i to zato jer u stupcu $j=3$ (i osim toga u stupcu $j=5$) ne stoji negativni upravljajući element. Odaberimo stupac $j=3$ za ključni i nađimo slijedeću tablicu (vidi dalje). Upravljajući koeficijent korespondentan sa $j=5$ je još uvijek negativan. Međutim, mi ne možemo odabrati stupac $j=5$ za ključni stupac; ovdje nastupa slučaj II. Očito je skup $J=\{5\}$; odredimo najveći t takav da je $p_5+q_5t=1-t\geqslant 0\rightarrow t'=1$. Odredimo upravljajući stupac za $t'=1$

i ustanovimo optimalnost tablice. Dakle je $t_r=1$. Za t^*, koji su malo manji od 1, tablica ostaje optimalna. Odredimo najmanji t za koji su svi $p_j+q_jt\geqslant 0$:

$$3+3t\geqslant 0\rightarrow t\geqslant -1,$$

$$1-t\geqslant 0\rightarrow t\leqslant 1,$$

$$4+6t\geqslant 0\rightarrow t\geqslant -2/3,$$

odatle je $t_{r-1}=-2/3$.

Zapišimo novi upravljajući redak za $t=-\frac{2}{3}$. Za t^* malo manji od $-2/3$ tablica više nije optimalna jer je upravljajući koeficijent za $j=6$ negativan.

Odaberimo stupac $j=6$ za ključni stupac itd. Četvrta tablica, za t^* nešto manje od -1 nije optimalna, ona korespondira vrhu kojemu se područje stabilnosti sastoji samo iz $t=-1$.

	3	5	6	
4	0	−1	1	1
1	0	−1	2	3
2	[1]	0	1	2
	−3	1	1	0
	−3	−1	3	0
$t\rightarrow\infty$	<0	<0	>0	

→

	2	5	6	
4	0	−1	[1]	1
1	0	−1	2	3
3	1	0	1	2
	3	1	4	6
	3	−1	6	6
$t\rightarrow\infty$	>0	<0	>0	
$t=1$	6	0	10	12
$t=-2/3$	1	5/3	0	2

→

	2	5	4	
6	0	−1	1	1
1	0	1	−2	1
3	[1]	1	−1	1
	3	5	−4	2
	3	5	−6	0
$t=-2/3$	1	5/3	0	2
$t=-1$	0	0	2	2

		3	5	4	
	6	0	−1	1	1
→	1	0	1	−2	1
	2	1	[1]	−1	1
		−3	2	−1	−1
		−3	2	−3	−3
$t=-1$		0	0	2	2

→

		3	2	4	
	6	1	1	0	2
	1	−1	−1	−1	0
	5	1	1	−1	1
		−5	−2	1	−3
		−5	−2	−1	−5
$t=-1$		0	0	2	2
$t\to-\infty$		>0	>0	>0	

Rezultat. Za $1<t<\infty$ optimum ne postoji. Za $-\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1$ optimalna je druga tablica, $Q_0(t)=-6-6t$. Za $-1\leqslant t\leqslant -\frac{2}{3}$ optimalna je treća tablica, $Q_0(t)=-2$. Za $-\infty\leqslant t\leqslant -1$ optimalna je peta tablica, $Q_0(t)=3+5t$.

Primjer 19. Matematička formulacija zadaće vidljiva je iz lijeve tablice; $t'=1/4$, a $t_r=t''=0$. Druga je tablica optimalna za sve $t<0$.

	3	4	
1	1	−20	2
2	1/10	−1	1/10
	−2	20	0
	1	−80	0
$t\to\infty$	>0	<0	
$t=1/4$	−7/4	0	0

	2	4	
1	−10	−10	1
3	10	−10	1
	20	0	2
	−10	−70	−1
$t=1/4$	70/4	−70/4	7/4
$t=0$	20	0	2
$t\to-\infty$	>0	>0	

Primjer 20. Matematička formulacija zadaće vidljiva je iz lijeve tablice. Tu imamo slučaj $t_r=\infty$.

	3	4	
1	0	1	1
2	1	1	1
	1	2	0
	1	1/2	0
$t\to\infty$	>0	>0	
$t=-1$	0	3/2	0

	2	4	
1	0	1	1
3	1	1	1
	−1	1	−1
	−1	−1/2	−1
$t=-1$	0	3/2	0
$t\to-\infty$	>0	>0	

E. CJELOBROJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

17. MATEMATIČKA FORMULACIJA ZADAĆE; GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

Ako zadaći linearnog programiranja, na primjer oblika ZLP (vidi A.1.), dodamo još uvjet da sve ili neke varijable mogu primati samo cjelobrojne vrijednosti, onda dobijemo zadaću *cjelobrojnog linearnog programiranja.*

Potpuno cjelobrojno programiranje je linearno programiranje sa zahtjevom da sve varijable budu cjelobrojne.

Mješovito cjelobrojno programiranja je linearno programiranje sa zahtjevom da samo neke, a ne sve, varijable budu cjelobrojne.

Ako sve varijable mogu imati samo vrijednosti 0 ili 1, onda govorimo o *Booleovom programiranju* (potpuno Booleovom). Ako taj zahtjev stavimo samo na neke varijable, onda govorimo o *mješovitom Booleovom programiranju.*

Primjeri primjene cjelobrojnog linearnog programiranja sadržani su u zadaćama o korištenju proizvodnih kapaciteta (vidi str. 886), ako se postojeći ne mogu djelomice koristiti; u zadaćama o smjesama (vidi str. 887), ako se sastojine smjese mogu dodavati samo u određenim omjerima; u transportnim zadaćama (vidi str. 876); u zadaćama o razdiobi (vidi str. 887); u zadaćama o krojenju i pokrivanjima (vidi str. 889) i u mnogim drugim zadaćama.

Geometrijska interpretacija i rješivost zadaća s dvije varijable slijedi iz izlaganja na str. 851, ako uzmemo u obzir da su za potpuno cjelobrojne zadaće dopustive samo točke koordinatne mreže (točke s cjelobrojnim koordinatama) u dopustivom području ZLP. Za mješovite cjelobrojne zadaće dobivaju se segmenti pravaca u dopustivom području ZLP.

Primjer 21.

$$2x_1+x_2\leqslant 4,\qquad 2x_1+3x_2\leqslant 6,$$

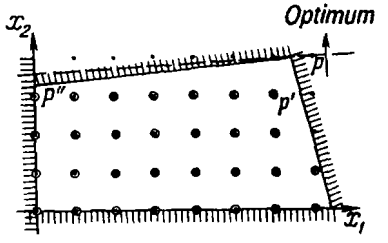
$$x_1\geqslant 0,\qquad x_2\geqslant 0,\qquad x_1,\ x_2 \text{ su cjelobrojni,}$$

$$Q_{\min}=-x_1-x_2.$$

Razrađene su razne metode za rješavanje zadaća cjelobrojnog programiranja:

a) metoda presjeka (vidi E. 18, str. 898)
b) metoda grananja (vidi E. 19, str. 901)

c) dokaz cjelobrojnosti svih bazičnih rješenja odgovarajuće ZLP za posebne tipove zadaća (na primjer, transportna zadaća, vidi str. 876); u tom slučaju rješenje ZLP nezavisno od zahtjeva cjelobrojnosti daje rješenje cjelobrojne zadaće linearnog programiranja;



Sl. 443.

d) približne (aproksimativne) metode, koje daju dobra dopustiva rješenja (ali u općem slučaju neoptimalna).

Napomena uz d): traženje (moguće, dugotrajno) dopustive točke koordinatne mreže, koja je najbliža rješenju ZLP, često vodi u praksi upotrebljivom rješenju. Međutim, u nekim slučajevima, ono može dati točke, koje su po volji daleko od optimalnih (slika 443).

18. GOMORIJEVA METODA PRESJEKA

Potpuno cjelobrojne zadaće linearnog programiranja. Na početku se rješava ZLP koja odgovara cjelobrojnoj zadaći linearnog programiranja. Ako je njezin optimum P točka koordinatne mreže, onda je P rješenje cjelobrojne zadaće. U protivnom se ZLP-u dodaje još jedan uvjet („presjek") tako da taj uvjet zadovoljavaju sve dopustive točke koordinatne mreže, a točka P ne.

Geometrijski to znači da su P i okoline od P odsječeni od dopustivog područja ZLP. Rješava se nova ZLP itd. Odgovarajućom metodom konstruiranja presjeka može se postići da nakon konačnog broja koraka dobijemo ZLP koja ima cjelobrojnu optimalnu točku i ona je ujedno rješenje prvotne cjelobrojne zadaće linearnog programiranja. Prvu takvu metodu razradio je Gomori 1958. godine i na osnovu te metode razvijeno je nekoliko metoda. Stalno dodavanje uvjeta dovodi do toga da se zadaća rješava pomoću dualne ili modificirane dualne simpleks metode.

Upute za konstrukciju modela. Ako prvotna zadaća sadrži dodatne uvjete u obliku nejednakosti, onda uvođenjem pomoćne varijable dođemo do ZLP s uvjetnim jednakostima. Ako su konstantni član i svi koeficijenti nejednakosti cjelobrojni, onda se za pomoćnu varijablu također može zahtijevati da bude cjelobrojna. Nejednakosti s racionalnim koeficijentima treba prije uvođenja pomoćne varijable pomnožiti sa zajedničkim nazivnikom tih koeficijenata. Nejednakosti s iracionalnim koeficijentima vode (ako iracionalni brojevi nisu aproksimirani racionalnim brojevima i transformirani na prije opisani način) na mješovite cjelobrojne zadaće programiranja, jer tada ne smijemo zahtijevati da pomoćne varijable budu cjelobrojne.

Konstrukcija presjeka. Neka je $\{w\}$ razlomljeni dio broja w, $0 \leqslant \{w\} < 1$. Na primjer $\{4{,}1\} = 0{,}1$ zbog toga što je $4{,}1 = 4 + 0{,}1$, ali je $\{-4{,}1\} = 0{,}9$, zato jer je $-4{,}1 = -5 + 0{,}9$.

Neka je zadana optimalna tablica sa m redaka, koja odgovara ZLP, i neka je na svih n varijabli dodan zahtjev cjelobrojnosti. Neka redak, koji odgovara bazičnoj varijabli x_i u simpleks tablici, izgleda ovako

$$i \,|\, a_{i\lambda_1} \ \dots \ a_{i\lambda_{n-m}} \,|\, b_i,$$

pri čemu b_i nisu cijeli brojevi. Tada se tablici pripisuje još jedan redak koji odgovara uvjetu

$$n+1 \,|\, -\{a_{i\lambda_1}\} \ \dots \ -\{a_{i\lambda_{n-m}}\} \,|\, -\{b_i\},$$

i x_{n+1} se interpretira kao cjelobrojna pomoćna varijabla takva da je $x_{n+1} \geqslant 0$. Nakon toga se primjenjuje dualna simpleks metoda.

Upute za upotrebu metode. Ako se u toku procesa dobije optimalna tablica u kojoj pomoćna varijabla ima pozitivnu vrijednost, onda se odgovarajući redak može precrtati. Time sprečavamo prekomjerno uvećavanje broja redaka.

Izbor između nekoliko necjelobrojnih b_i u tablici može biti proizvoljan; preporučuje se da se izabere onaj b_i koji ima maksimalni racionalni dio $\{b_i\}$.

Ako je jasno da optimalna vrijednost funkcije cilja mora biti cijeli broj, onda se također redak funkcije cilja može koristiti za konstrukciju presjeka.

Može se dogoditi da, iako dopustivo područje ZLP nije prazno, ono ne sadrži točaka koordinatne mreže. To se raspoznaje na isti način kao i kod upotrebe dualne simpleks metode (ne nalaze se ključni stupci).

Primjer 22.

$$2x_1 + x_2 + x_3 \quad = 4,$$
$$2x_1 + 3x_2 \quad + x_4 = 6,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ su} > 0 \text{ i cjelobrojni.}$$
$$Q_{\min} = -x_1 - x_2.$$

Na početku riješimo ZLP (ne obazirajući se na zahtjev cjelobrojnosti) pomoću simpleks metode:

	1	2	
3	[2]	1	4
4	2	3	6
	−1	−1	0

→

	3	2	
1	1/2	1/2	2
4	−1	[2]	2
	+1/2	−1/2	2

→

	3	4	
1	3/4	−1/4	3/2
2	−1/2	1/2	1
	1/4	1/4	5/2

U optimalnom rješenju ZLP x_i nije cjelobrojan. Stoga pomoću odgovarajućeg retka moramo konstruirati presjek i riješiti novu ZLP pomoću dualne simpleks metode:

	3	4	
1	3/4	−1/4	3/2
2	−1/2	1/2	1
5	−3/4	[−3/4]	−1/2
	1/4	1/4	5/2

→

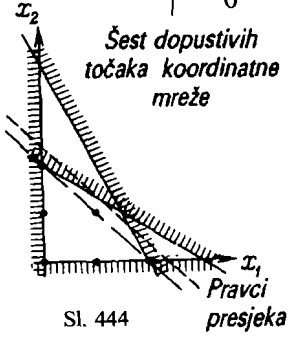
	3	5	
1	1	−1/3	5/3
2	−1	2/3	2/3
4	1	−4/3	2/3
	0	1/3	7/3

Poslužit ćemo se sa $i=4$ za konstrukciju presjeka (u tu svrhu je svrsishodno odmah ostaviti prazan redak u novoj tablici) i ponovo primijeniti dualnu simpleks metodu:

	3	5	
1	1	−1/3	5/3
2	−1	2/3	2/3
4	1	−4/3	−2/3
6	0	[−2/3]	−2/3
	0	1/3	7/3

→

	3	6	
1	1	−1/2	2
2	−1	1	0
4	1	−2	2
5	0	−3/2	1
	0	1/2	2



Sl. 444

Optimalna točka je cjelobrojna pa slijedi da je $x_1=2$, $x_2=x_3=0$, $x_4=0$ **optimalno rješenje** zadaće cjelobrojnog programiranja (ako bismo produžili postupak, onda bi redak koji odgovara x_5 mogli precrtati).

Ako se x_3 i x_4 interpretiraju kao pomoćne varijable, onda se zadaća može u ravnini x_1, x_2 predočiti grafički; presjeci su određeni sa $-3x_1+3x_2\leqslant 7$ i $3x_1+3x_2\leqslant 6$ (slika 444).

Mješovita cjelobrojna zadaća linearnog programiranja. Osnovna ideja je ista kao i za potpuno cjelobrojno programiranje; necjelobrojni b_i u tablici, naravno onda i samo onda daju povod za konstrukciju presjeka kada je na odgovarajuću baziču varijablu stavljen zahtjev cjelobrojnosti. Presjeci se međutim određuju na drugi način:

$$\begin{cases} i\,|a_{i\lambda_1}\dots a_{i\lambda_{n-m}}|b_i, \\ n+1\,|a_{i_{\lambda_1}}\delta_{\lambda_1}\dots a_{i\lambda_{n-m}}\delta_{\lambda_{n-m}}|-\{b_i\}, \end{cases}$$

gdje je

$$\delta_{\lambda_j}=\begin{cases} -1 & \text{za } a_{i\lambda_j}\geqslant 0, \\ \delta=\dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}} & \text{za } a_{i\lambda_j}<0. \end{cases}$$

Primjer 23. Promotrimo ZLP iz potpuno cjelobrojne zadaće linearnog programiranja (primjer 22), ali zahtijevamo cjelobrojnost samo za x_1. Postupak do dobivaja optimalne točke analogan je onome u primjeru 22. Zatim se uvodi presjek i primjenjuje dualna simpleks metoda:

		3	4	
	1	3/4	−1/4	3/2
$\delta=+1$	2	−1/2	1/2	1
	5	[−3/4]	−1/4	−1/2
		1/4	1/4	5/2

→

	5	4	
1	1	−1/2	1
2	−2/3	2/3	4/3
3	−4/3	1/3	2/3
	1/3	1/6	7/3

Optimalna točka ima koordinate $x_1=1$, $x_2=4/3$, $x_3=2/3$, $x_4=0$.

U geometrijskoj interpretaciji primjera 22 presjek je istovjetan dodatnom uvjetu $4x_1+3x_2\leqslant 8$.

19. METODA GRANANJA

Pretpostavka da varijabla može primati samo cjelobrojne vrijednosti (tj. u praktičnim primjerima najčešće samo konačan broj vrijednosti) daje mogućnost da se zadaća riješi provjeravajućim uvrštavanjem u funkciju cilja svih dopustivih vrijednosti i usporedbom dobivenih vrijednosti. Ta je ideja prikladna samo onda kada se suvišak može skratiti dodatnim rasuđivanjem. Ta rasuđivanja zasnovana su na principu grananja kombinatornog programiranja. Za rješavanje opće potpune i mješovite zadaće linearnog programiranja imamo dakle slijedeću metodu.

Za procjenu funkcije cilja na nekom skupu dopustivih rješenja cjelobrojne zadaće služi optimalno rješenje odgovarajućeg ZLP (jer se dodavanjem zahtjeva cjelobrojnosti optimalna vrijednost ne može po-

boljšati). Skup dopustivih rješenja se grana u istoj mjeri, kako na optimalnu tablicu s necjelobrojnim $b_i=[b_i]+\{b_i\}$ (sa $[a]$ je označeno najveće cijelo od a, a sa $\{a\}$ razlomljeni dio broja a, $0\leqslant\{a\}<1$) stavljamo dvije zadaće: I i II (vidi primjer 24) s uvjetima $x_i\leqslant[b_i]$ ili $x_i\geqslant[b_i]+1$. Dopustiva područja obiju zadaća uzete zajedno sadrže tada sva dopustiva rješenja cjelobrojne zadaće.

Preporučljivo je na početku provoditi grananje za sve i za koje je $\{b_i\}$ maksimalno blizak vrijednosti 0,5.

Naravno da grananje treba provoditi samo za sve i za koje x_i mora biti cjelobrojan. Da bi po potrebi imali mogućnost dodati nove uvjete, koristimo se dualnom simpleks metodom.

Primjer 24. Zadaća $A_{cjelobroj}$

$$\begin{aligned} -2x_1+2x_2+x_3 &=3,\\ x_1+2x_2+x_4 &=13,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\text{ svi}\geqslant 0,\\ x_1, x_2 &\text{ cijeli},\\ Q_{\min}&=2x_1-3x_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Dvostruka primjena simpleks metoda na A (neka je to $A_{cjelobroj}$ bez zahtjeva cjelobrojnosti) vodi na optimalnu tablicu

	4	3	
2	1/4	1/4	4
1	1/4	−1/4	5/2
	1/4	5/4	7

x_i ima u toj tablici cjelobrojne vrijednosti.

Grananje

$$A \begin{cases} AI & x_1\leqslant 2\rightarrow x_1+x_5=2,\\ AII & x_1\geqslant 3\rightarrow x_1-x_5=3, \end{cases}$$

pomoću jednadžbe dobivene iz zadnjeg retka tablice

$$x_1-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_3=\frac{5}{2}$$

mora u danom momentu biti pribrojeno nebazičnim varijablama x_4, x_3.

U općem slučaju za formalnu metodu grananja retka i zadaće s n varijabli i m redaka dobivamo:

$$\text{I.}\begin{cases} i & a_{1\lambda_1}\dots\ a_{i\lambda_{n-m}} & b_i,\\ n+1 & -a_{i\lambda_1}\dots -a_{i\lambda_{n-m}} & -\{b_i\}, \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} i & a_{i\lambda_1}\dots a_{i\lambda_{n-m}} & b_i,\\ n+1 & a_{i\lambda_1}\dots a_{i\lambda_{n-m}} & (\{b_i\}-1). \end{cases}$$

U našem se primjeru dobiva

AI

		4	3	
I	2	1/4	1/4	4
	1	1/4	−1/4	5/2
	5	−1/4	1/4	−1/2
		1/4	5/4	7

AII

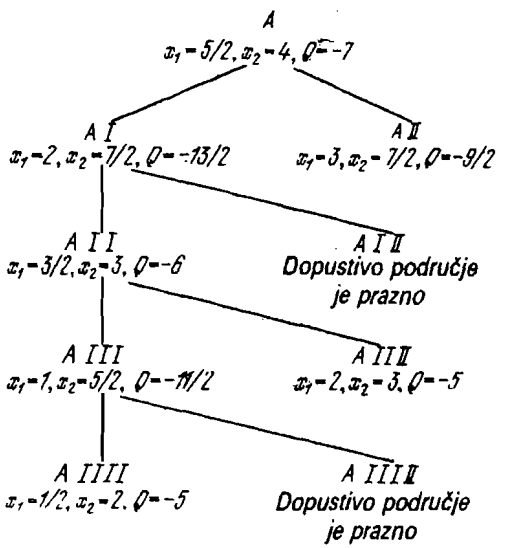
		4	3	
II	2	1/4	1/4	4
	1	1/4	−1/4	5/2
	5	1/4	−1/4	1/2
		1/4	5/4	7

Sada se obje zadaće rješavaju pomoću dualne simpleks metode. Ako se u optimalnoj točki za x_1 i x_2 ne dobiju cjelobrojne vrijednosti, onda se zadaća dalje grana (pomoću najprikladnije optimalne vrijednosti) itd.

Na slici 445 prikazan je hod rješavanja primjera 24; tamo su ukazane optimalne vrijednosti x_1 i x_2 i funkcija cilja.

Rješenje *A I I I I* daje optimalno rješenje cjelobrojne zadaće linearnog programiranja $A_{\text{cjelobroj}}$ $Q_0=-5$. U dopustivim točkama zadaće $A_{\text{cjelobroj}}$ sadržanim u *A* II su vrijednosti funkcije cilja $\geqslant -9/2$, tj. veće nego Q_0.

U dopustivim točkama zadaće $A_{\text{cjelobroj}}$ sadržanim u *A I I I I* su vrijednosti funkcije cilja $\geqslant -5$, tj. među njima bi se mogle nalaziti točke s optimalnom



Sl. 445

vrijednosti Q_0 (to bi se moglo ispitati pomoću daljnjeg grananja), no u svakom slučaju nisu dopustive točke zadaće $A_{\text{cjelobroj}}$ s vrijednostima funkcije cilja manjim od Q_0.

20. USPOREDBA METODA

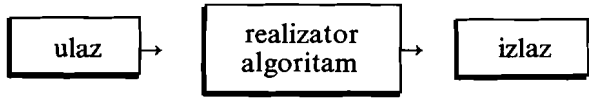
U nekim primjerima mnogo računjanja zahtijeva primjena metode presjeka, a u drugim metode grananja. Obje se metode intenzivno razrađuju tako da se stalno pojavljuju nove varijante čiju je efikasnost teško ocijeniti. Pri upotrebi računskih strojeva metode grananja u pravilu zahtijevaju veliku memoriju, ali su u numeričkom smislu stabilne. Poteškoća za obje metode je u tome što treba rješavati, da li broj b_i, koji u sebi sadrži pogrešku zaokruživanja, smatrati cijelim ili ne.

OSMI DIO

ELEMENTI NUMERIČKIH METODA I NJIHOVE PRIMJENE

I. ELEMENTI NUMERIČKIH METODA

Jedna od najvažnijih zadaća numeričke matematike je nalaženje pravila računanja (algoritama) pomoću kojih se polazni podaci (ulaz ili unos) uz upotrebu ranije pripremljenih pomoćnih shema i uređaja (tablica, stolnih računala, analognih elektroničkih računala, digitalnih elektroničkih računala itd.) pretvaraju u izlazne podatke (izlaz):



Za oblikovanje takvih pravila koja će na osnovu teoretskih postavki omogućiti njihovu praktičnu primjenu, neophodna su specijalna razmišljanja.

Primjer 1. Treba odrediti najmanji korijen jednadžbe $x^2-20x+1=0$. Teoretski rezultat $x=10-\sqrt{99}$ nije pogodan kao osnova za računanje, ako računanje moramo obaviti sa stalnim brojem dekadskih znamenaka (na primjer 3): $10{,}0-0{,}99=0{,}01$. Ako primijenimo ekvivalentni izraz $10-\sqrt{99}=(10+\sqrt{99})^{-1}$, onda dobijemo prigodni algoritam, jer je sada $(10{,}0+0{,}99)^{-1}=19{,}9^{-1}=0{,}05$.

Neke opće postavke

1) Pokazalo se da su matematičke analitičke metode rješavanja često neprikladne ako se upotrijebe kao algoritmi izračunavanja.

2) Algoritmi moraju po mogućnosti biti primjenljivi u ovisnosti o kompletu polaznih podataka; primjetimo da nije uvijek moguće znati grandice unutar kojih se ti podaci mijenjaju.

3) Metoda se može primijeniti kao algoritam onda i samo onda kada je u potpunosti shematizirana. To znači da na svakom koraku moramo jednoznačno znati koji je slijedeći korak.

4) Algoritam mora najčešće biti konstruiran rekurzivno. Rekurzivni algoritam sastoji se od relativno velikog broja sastavnih dijelova koji se nejednokratno realiziraju za različite komplete vrijednosti.

5) Algoritam za izračunavanje mora biti konačan, tj. mora u konačno mnogo koraka voditi do cilja. U skladu s time se beskonačni matematički modeli (nazivi, redovi, ...) moraju svesti na konačne reprezentante.

6) Algoritam za izračunavanje smije imati samo takve operacije koje je moguće obaviti uređajima za računanje (ili usaglasiti sa računalom).

A. POGREŠKE I VRSTE POGREŠAKA

Ako se fizikalne veličine ili realni brojevi predočuju brojevima (tj. u obliku konačnog decimalnog razlomka), onda se realiziraju samo približno, s nekom pogreškom. U skladu s opće prihvaćenim oznakama u matematici se teoretske ili točne vrijednosti veličina označavaju kao i same te veličine: $x, y, z, \ldots, a, b, c, d, \ldots$ itd. Istim slovima, ali s crticom iznad njih (nadcrtom), označavat ćemo približne vrijednosti tih veličina, tj. brojeve s kojima faktički računamo. U skladu s takvim označavanjem $\delta(x)=\bar{x}-x$ znači pravu vrijednost pogreške, $\underline{\delta}(x)$ ili $\bar{\delta}(x)$ njenu donju, odnosno gornju granicu, $\Delta(x)=\max(|\underline{\delta}(x)|, |\bar{\delta}(x)|)$ maksimalnu pogrešku i $\rho(x)=\dfrac{\delta(x)}{x}$ relativnu pravu pogrešku od x. Prema tome imamo

$$x=\bar{x}-\delta(x), \qquad \underline{\delta}(x)\leqslant\delta(x)\leqslant\bar{\delta}(x), \qquad |x-\bar{x}|\leqslant\Delta(x).$$

Za provođenje numeričkih računa neophodno je znati: kakve su polazne vrijednosti; s kojom točnošću moramo dobiti ulazne podatke; koja je moguća točnost obavljanja operacija i u vezi s time koji se algoritam može upotrijebiti.

Postoje tri izvora pogrešaka:

1) pogreška ulaznih podataka,
2) pogreška metode (prekida),
3) pogreška zaokruživanja (strojna pogreška).

Određivanje pogreške izlaza veoma je složen problem. Ako promatramo odvojeni računski korak oblika $x=g(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ u kojem izlazna veličina mora biti izračunata prema pravilu g sa N ulaznih podataka, onda se prava (istinita) pogreška $\delta(x)=\bar{x}-x$ može rastaviti na tri komponente:

$$\delta(x)=\delta_M(x)+\delta_{UU}(x)+\delta_S(x).$$

Pogreška metode (pogreška zbog prekida) je:

$$\delta_M(x)=\bar{g}(a_1, a_2, \ldots, a_N)-g(a_1, a_2, \ldots, a_N).$$

Ona je mjera odstupanja modela računanja od točnog modela i može se pojaviti samo onda kada su ulazni podaci točni (na primjer cijeli brjevi).

Pogreška uvjetovana unosom (ulazom) je:

$$\delta_{UU}(x)=\bar{g}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N)-\bar{g}(a_1, a_2, \ldots, a_N).$$

Ta pogreška je procjena raširenosti pogreške unosa pri izračunavanju.

Dodatna pogreška, slučajna pogreška je:

$$\delta_S(x)=\bar{x}-\bar{g}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N).$$

To je mjera pogrešaka izazvanih zbog strojne realizacije operacija.

Maksimalno točna procjena *pogreške metode* je sastavni dio svake metode izračunavanja. Ona uopće ne ovisi o tome kako se metoda realizira.

Pogrešku izazvanu ulaznim podacima (unosom) moguće je opaziti i ocijeniti ako je algoritam jednostavan i ako zadovoljava neke dodatne uvjete. Za složene zadaće jednostavne i neposredne metode određivanja raširenosti pogreške nemaju djelovanja. Treba uzeti u obzir da ta komponenta pogreške ne ovisi o realizaciji izračunavanja.

Broj znamenaka, kodiranje, nepomični ili pomični*) (brojni) zaraz, posebne operacije obavljene s dvostrukom točnošću i druge, neposredno utječu na raširenost pogreške. Do sada su bitni rezultati postojali u ova tri usmjerenja:

— statističko istraživanje nagomilavanja pogrešaka,

— deterministička analiza promjene pogreške u općim metodama po Wilkinsonu,

— *aritmetika intervala.*

U suprotnosti s do sada razrađenim modelima, u aritmetici intervala se točni model $x=g(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ zamjenjuje s algoritmom kojem intervali služe kao ulazne veličine, a kao izlaz daje interval:

$$\bar{x}=\bar{g}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N),$$

gdje je

$$\bar{a}_i=[A_i\leqslant a_i\leqslant B_i], \qquad \bar{x}=[X_1\leqslant x\leqslant X_2].$$

*) U našoj literaturi se uz izraz *pomični* upotrebljava i *plivajući* zarez, odnosno točka.

Prema tome, u račun treba izravno uključivati intervale zato što otpada potreba specijalnog ispitivanja pogrešaka. Do danas je razrađen čitav niz algoritama aritmetike intervala. Kako ta aritmetika mora obuhvatiti sve slučajeve, to su i izlazni intervali često vrlo veliki; u vezi s time aritmetika točaka bolje prati pogreške i daje točnije rezultate.

Veličina *dodatne pogreške* prvenstveno ovisi o djelovanju tehnike izračunavanja. Glavni uzroci velikih slučajnih pogrešaka su:

— metoda prekida i zaokruživanja preuzeta u stroju;

— *gubitak značajnih znamenaka* pri odbijanju. Ako se dva približna broja istoga reda veličine odbijaju, onda, prema prilikama, njihova razlika može biti sasvim slučajan broj. Tada, ako taj broj ulazi u daljnje računanje, može doći do velikih slučajnih pogrešaka; na primer $3{,}1415\underline{613}-3{,}1415\underline{524}=0{,}0000\underline{089}$; od 8 značajnih znamenaka ostale su samo dvije;

— tehničko stanje stroja;

— gubitak znamenaka kada broj predočujemo s premalim brojem znamenaka (na primjer pri dijeljenju s malim brojevima).

Aritmetički algoritam se sastoji iz niza posebnih operacija koje se stalno ponavljaju. Pri tome se pogreška izlaza svakog koraka poduda-ra s pogreškom ulaza slijedeće operacije, pa točna analiza pogrešaka postaje sve težom te se često moramo ograničiti samo na procjene.

Za numeričku metodu kažemo da je *stabilna* ako je u svim situacijama omjer pogrešaka izlaza i ulaza manji od neke fiksirane granice.

B. NUMERIČKE METODE

1. RJEŠAVANJE LINEARNIH SISTEMA JEDNADŽBI

Promotrimo homogeni sistem linearnih jednadžbi

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{aligned}$$

koji uz pretpostavku da $\det \mathbf{A}\neq 0$, ima za sve vrijednosti b_i $(i=1,\ldots,n)$ jednoznačno određeno rješenje $\mathbf{x}^T=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Za određivanje vektor-rješenja postoje dvije metode: metoda eliminacije i metoda uzastopnih aproksimacija (iteracija).

Direktne metode (Gaussova metoda eliminacije).

(1) *Pojednostavnjena Gaussova metoda.* Poznata metoda eliminacije se nakon algoritmiranja sastoji iz dva ciklička postupka.

Transformacija matrice **A** *na trokutast oblik*:

1. Neka je $k=1$.

2. Treba provjeriti da li je a_{kk} različit od nule.

3. Ako jest, onda se k-ti redak uzme za *radni redak* i a_{kk} je njegov dijagonalni element. Ako pak nije, onda k-ti redak zamijenimo sa onim l-tim $(l>k)$ za kojeg je $a_{ll}\neq 0$.

4. Za $i=k+1, k+2,\ldots, n$ odredimo nove matrične elemente za koje, slično prijašnjima, uvodimo oznake

$$q_i=\frac{a_{ik}}{a_{kk}},$$

$$a'_{ij}=0 \qquad \text{za } j=k,$$

$$a'_{ij}=a_{ij}+q_i a_{kj} \qquad \text{za } j\neq k$$

i analogno za članove na desnoj strani (slobodne članove):

$$b'_i=b_i+q_i b_k.$$

5. Uvećamo k za jedinicu i ponovo počnimo od točke 2 i to samo onda kada je novi k manji od n. U protivnom je postupak metode eliminacije završen Dobili smo gornju trokutastu matricu

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12}\ldots a'_{1n}\\ 0 & a'_{22}\ldots a'_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0\ \ldots a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Određivanje vektor-rješenja $\mathbf{x}^T=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$:

1. Treba izračunati $x_n=\dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$

2. Za $i=n-1, n-2,\ldots, 1$ treba odrediti

$$x_i=\frac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i-\sum_{j=1}^{n-i} a'_{i,\,i+j}\,x_{i+j}\right).$$

(2) *Gauss-Jordanova metoda.* Modificirati ćemo pojednostavnjenu Gaussovu metodu i to baš tako da u točki 4 uzmemo da broj retka i poprima vrijednosti od 1 do $k-1$ i od $k+1$ do n. Ono vodi na to da svi elementi k-tog stupca, osim dijagonalni, postanu jednaki nuli. Umjesto gornje trokutaste matrice dobit ćemo najzad dijagonalnu matricu

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a'_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Time se određivanje vektor-rješenja bitno pojednostavnjuje:

$$\mathbf{x}^T=\frac{b'_1}{a'_{11}},\ldots\frac{b'_n}{a'_{nn}}.$$

Međutim, u ovoj je metodi ipak neophodno obaviti više operacija nego u pojednostavnjenoj Gaussovoj metodi.

Odlučujuće za točnost računanja jest dijeljenje sa a'_{kk} koje je neophodno pri određivanju q_1. Stoga je uvjet 2 za izbor dijagonalnog elementa suviše slab s gledišta točnosti pa zato često primjenjujemo slijedeću shemu.

Zamjenom redaka i stupaca (oni moraju biri „označeni" i reproducirani pri određivanju vektor-rješenja) postiže se da element koji je najveći od svih, a ranije nije bio dijagonalni element, postane dijagonalan.

Primjer 2. Proces potpune dijagonalizacije Gauss-Jordanovom metodom (tablica 1).

Tablica 1

i	A			b_i	s_i	q_i	S_i
1	−1	3/2	1	9/2	−6	1/2	
2	2	1	0	−1	−2	dijagonala	
3	−1	−1	7/4	7/2	−13/4	1/2	
1	0	2	1	4	−7	dijagonala	0
2	2	1	0	−1	−2	1/2	0
3	0	−1/2	7/4	3	−17/4	1/4	0
1	0	2	1	4	−7	−1/2	0
2	2	0	−1/2	−3	3/2	1/4	0
3	0	0	2	4	−6	dijagonala	0
1	0	2	0	2	−4		0
2	2	0	0	−2	0		0
3	0	0	2	4	−6		0
$\mathbf{x}^T=(1, -1, 2)$							

Stupci s_i i S_i za provjeru ($a_{i,n+1}=b_i$) jesu:

$$s_i=\left(\sum_{k=1}^{n+1} a'_{ik}-b'_i\right),\quad S_i=\sum_{k=1}^{n+1} a'_{ik}+b'_i+s_i\equiv 0.$$

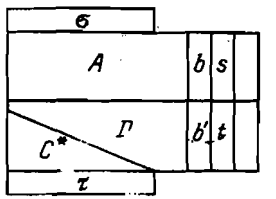
(3) *Vezani algoritam* (*Gauss-Banahievičeva metoda*). Do vrlo zorne i kompaktne numeričke sheme možemo doći ako pojedine korake Gaussove metode eliminacije rasporedimo tako da radimo samo s brojevima koje se u daljnjem postupku ne prerađuje pa ih se stoga samo „prepisuje".

Računska shema primjera 2 (vidi sliku 446 i tablicu 2):

$$s_i=-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}-b_i,$$

$$\sigma_k=-\sum_{i=1}^{n} a_{ij},\quad \sigma=-\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

$$d_{ik}=a_{ik}-\sum_{l=1}^{i-1} c_{il}d_{lk},\quad d_{1k}=a_{1k},$$



Sl. 446

Tablica 2

σ_1 −2	σ_2 1	σ_3 −7	σ_4 7	σ −30	−31 / −31 K_1
a_{11} 2	a_{12} 3	a_{13} −1	a_{14} 0	20	−24
a_{21} −6	a_{22} −5	a_{23} 0	a_{24} 2	−45	54
a_{31} 2	a_{32} −5	a_{33} 6	a_{34} −6	− 3	6
a_{41} 4	a_{42} 6	a_{43} 2	a_{44} −3	58	−67
2	3	−1	0	20	−24
−3	4	−3	2	15	−18
1	−2	1	−2	7	−6
2	0	4	5	−10	5
τ_1 −1	τ_2 1	τ_3 −5	τ_4 −1	K_3: 0	K_4: 0
K_2: −1	−1	−1	−1		
$\underline{x}=$ 1	7	3	−2		

$$b'_i = b_i - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} b'_l,$$

$$t_i = s_i - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} t_l,$$

$$c_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_{11}},$$

$$c_{ik} = \frac{1}{d_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{l=1}^{k-1} c_{il} d_{lk} \right),$$

$$\tau_k = \frac{1}{d_{kk}} \left(\sigma_k - \sum_{l=1}^{k-1} \tau_l d_{lk} \right).$$

Numerički primjer:

$$d_{24} = 2 - 0 \cdot (-3) = 2, \qquad c_{42} = \frac{1}{4}(6 - 2 \cdot 3) = 0,$$

$$\tau_4 = \frac{1}{5}(7 - (0 + 2 + 10)) = -1.$$

Provjera:

$$K_1\colon \sum \sigma_k + \sigma = \Sigma s_i, \qquad K_2\colon \sum_i c_{ik} + \tau_k = -1 \text{ za sve } k,$$

$$K_3\colon \sum \tau_k b'_k - \sigma = 0, \qquad K_4\colon \sum \tau_k t_k - \sum s_k = 0.$$

Sve ove sheme omogućuju da se istovremeno rješava nekoliko sistema jednadžbi s istom matricom **A** i različitim stupcima na desnoj strani (stupcima slobodnih članova). U tu svrhu treba samo imati potreban broj stupaca *b*.

(4) *Invertiranje matrice.* Za svaku singularnu kvadratnu matricu **A** postoji matrica $\mathbf{A}^{-1}$ takva da vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, gdje je **E** jedinična matrica. Matricu $\mathbf{A}^{-1}$ nazivamo *inverznom matricom matrice* **A** ili kraće *inverzom* od **A**.

Kada treba riješiti nekoliko sistema jednadžbi s različitim stupcima slobodnih članova, onda je preporučljivo izračunati inverz matrice **A** zato što se tada vektor-rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ može dobiti naprosto množenjem matrica.

U tu svrhu bilo kojom metodom rješavamo istovremeno *n* sistema jednadžbi $\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{e}^{(k)}$ s desnim stranama

$\mathbf{e}^{(1)T} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}^{(2)T} = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$, $\mathbf{e}^{(n)T} = (0, 0, \ldots, 1)$

i odredimo inverznu matricu od vektor-rješenja $\mathbf{y}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) kao vektor-stupca.

Primjer 3. Treba naći inverz matrice **A** (Gauss-Jordanova metoda).

Tablica 3

i	**A**			**E**			q		
1	[1]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	dija-gonala	-6	—
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	—	—
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	—	—
2	0	[$\frac{1}{12}$]	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	—	dija-gonala	-15
3	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	—	-1	—
1	1	0	$-\frac{1}{6}$	4	-6	0			30
3	0	0	[$\frac{1}{180}$]	$\frac{1}{6}$	-1	1			dija-gonala
1	1	0	0	9	-36	30	$k=1$	$k=2$	$k=3$
2	0	1	0	-36	192	-180			
3	0	0	1	36	-180	180			
	E			$\mathbf{A}^{-1}$					

Metoda iteracije. Postoje različiti načini da se vektorska jednadžba $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$ svede na oblik $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ pomoću dobro odabranih ekvivalentnih transformacija. U ovom se obliku rješenje **x** određuje kao fiksna točka linearne transformacije $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ i to metodom uzastopnih aproksimacija. Niz $[\mathbf{x}^{(m)}]_1^\infty$ vektora definira se sa

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \qquad m = 0, 1 \ldots,$$

gdje je $\mathbf{x}^{(0)}$ konstantni zadani *početni vektor*. Niz konvergira vektor-rješenju **x**, ako matrica **M** nije singularna i ako za normu vrijedi $\|\mathbf{M}\| \leqslant p < 1$.

Pri tome imamo ovu procjenu

$$\|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}\| = \frac{p^m}{1-p} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

(1) *Jacobijeva metoda.* Ako je $\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{R}$, gdje su sumandi matrice

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & a_{n,n-1} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

onda je prema toj metodi

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_J=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R}) \quad \text{i} \quad \mathbf{c}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Prema tome je

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(m+1)}=-(\mathbf{L}+\mathbf{R})\,\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \text{ je zadano.}$$

Metoda konvergira za $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R})\|<1$, tj. za $\|\mathbf{L}+\mathbf{R}\|<\|\mathbf{D}\|$. Ako za normu odaberemo sumarnu normu retka $\|\mathbf{M}\|=\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, onda dobijemo ovaj važan rezultat:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|<|a_{ii}| \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

(uvjet dominacije dijagonale).

(2) *Gauss-Seidelova metoda:*

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_G=-(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{R}.$$

Iteracijska formula glasi

$$(\mathbf{L}+\mathbf{D})\,\mathbf{x}^{(m+1)}=-\mathbf{R}\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \text{ je zadano.}$$

Na taj način dobijemo

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(m+1)}=b_i-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)},$$

pa je prema tome

$$x_i^{(m+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}+\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)}-b_i\right), \qquad i=1, 2, \dots, n.$$

Shema računanja i primjer. Gauss-Seidelova iteraciona metoda (tablica 4).

Tablica 4

	Matrica				$-\mathbf{b}$
	24	−2	2	1	−54
	−1	21	2	−1	61
	1	2	28	−2	−28
	0	1	−2	20	45
n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$x_4^{(n)}$	
0	0	0	0	0	–
1	2,250	−2,7976	1,1195	−1,9982	1
2	2,00683	−3,01097	1,00067	−1,99938	1
3	1,99900	−3,00008	1,00009	−1,99999	1
4	1,99999	−3,00001	1,00000	−2,00000	1
5	2,00000	−3,00000	1,00000	−2,00000	1
6	Dalje ne treba!				

Konvergenciju imamo za $\|(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{R}\|<1$. Dovoljni uvjeti za to su na primjer:

a) $\mathbf{A}$ je simetrična i pozitivno definitna;

b) $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|<|a_{ii}|$ za sve i.

2. LINEARNE ZADAĆE O SVOJSTVENIM VRIJEDNOSTIMA

U principu ima više mogućnosti za određivanje svojstvenih vrijednosti λ_j i njima pridruženih svojstvenih vektora $\mathbf{x}_j$ matrice $\mathbf{A}$ koji su određeni relacijom $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$. Pri izboru metode treba uzeti u obzir ne samo računsko stajalište nego i postavljeni cilj i osobitosti same matrice.

Ograničit ćemo se samo na ramatranje nekih metoda uz dodatnu pretpostavku *simetričnosti* (tj. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$).

Direktne metode. Cilj direktnih metoda je istovremeno određivanje svih vlastitih vrijednosti, a također svojstvenih vektora prema jednoj od metoda. Zato možemo govoriti o *numeričkoj transformaciji na glavne osi* zbog toga što su svojstveni vektori $\mathbf{X}_j$ vektor-stupci matrice transformacije $\mathbf{X}$, a svojstvene vrijednosti λ_j su dijagonalni elementi dijagonalne matrice $\mathbf{D}$ iz jednakosti $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{D}$.

(1) *Rješenje karakteristične (vjekovne, sekularne) jednadžbe.* Svojstvene vrijednosti λ_j su korijeni polinoma $P_\mathbf{A}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, a njegovi se koeficijenti mogu odrediti na različite načine iz elemenata matrice. Da nađemo numeričko rješenje jednadžbe $P(\lambda) = 0$ s racionalnim koeficijentima treba pogledati u B.3. na str. 919.

Svojstvene vektore svake od svojstvenih vrijednosti dobijemo kao vektor-rješenja sistema linearnih jednadžbi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_j \mathbf{x}$, a nalazimo ih odgovarajućim metodama (vidi B.1. str. 908).

Treba međutim istaći da ta metoda narušava *princip neposredne primjene* (usporedi C.10 na str. 963) i sve ga više istiskuju druge metode.

(2) *Jacobijeva metoda.* Promotrimo matrice

$$\mathbf{T}_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\ldots 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0\ldots & \cos\varphi & \ldots & \sin\varphi & \ldots 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 & 1\ldots & 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\ldots & 0 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0\ldots & -\sin\varphi & \ldots & \cos\varphi & \ldots 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 & \ldots & 0 & 1\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ - p\text{-ti redak} \\ \\ \\ \\ - q\text{-ti redak} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

p-ti stupac $\quad$ q-ti stupac

koje nazivamo *Jacobijevim matricama elementarnih rotacija.* Uvijek je moguće odrediti kut φ u intervalu $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ tako da u transformiranoj

matrici $\mathbf{A}' = \mathbf{T}_{pq}^T \mathbf{A} \mathbf{T}_{pq}$ elementi $a'_{pq} = a'_{qp}$ budu jednaki nuli, jer su u $\mathbf{A}'' = \mathbf{T}_{pq}^T \mathbf{A}$, p-ti i q-ti stupac zamijenili svoja mjesta:

$$a''_{pj} = a_{pj} \cos\varphi - a_{qj} \sin\varphi,$$
$$a''_{qj} = a_{pj} \sin\varphi + a_{qj} \cos\varphi, \quad a''_{ij} = a_{ij} \quad \text{za} \quad i \neq p, q.$$

U $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'' \mathbf{T}_{pq}$ su ponovo zamijenjeni p-ti i q-ti stupac u $\mathbf{A}''$:

$$a'_{ip} = a''_{ip} \cos\varphi - a''_{iq} \sin\varphi,$$
$$a'_{iq} = a''_{ip} \sin\varphi + a''_{iq} \cos\varphi, \qquad a'_{ij} = a''_{ij} \quad \text{za} \quad j \neq p, q$$

Uzmemo li to sve u obzir slijedi da su elementi u sjecištu p-tih i q-tih redaka i stupaca dani sa

$$a''_{pp} = a_{pp} \cos^2\varphi - 2a_{pq} \cos\varphi \sin\varphi + a_{qq} \sin^2\varphi,$$
$$a'_{qq} = a_{pp} \sin^2\varphi + 2a_{pq} \cos\varphi \sin\varphi + a_{qq} \cos^2\varphi,$$
$$a'_{pq} = a'_{pq} = (a_{pp} - a_{qq}) \cos\varphi \sin\varphi + a_{pq}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Prema tome, elementi a'_{pq} i a'_{qp} bit će jednaki nuli ako je

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = -\frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}} \quad \text{i} \quad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Ideja metode je u tome da se matrica $\mathbf{X}$ prikaže u obliku produkta takvih specijalnih matrica koje se određuju metodom iteracije.

Ako se na $\mathbf{A}'$ ponovo primijeni Jacobijeva elementarna rotacija, onda dva druga elementa postaju jednaka nuli, a elementi u $\mathbf{A}'$, koji su ranije bili transformirani u nulu, opet postaju različiti od nule.

Jacobijeva se *metoda*, dakle, sastoji u slijedećem:

1. Izbor elementa $a_{pq}^{(k)}$ matrice $\mathbf{A}^{(k)}$.
2. Određivanje $\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{pq}^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{T}_{pq}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.
3. Prekid pri $\sum_{\substack{i \neq j \\ 1}}^{n} |a_{ij}^{(k+1)}|^2 < \varepsilon$, u protivnom bi imali uvećanje k na 1

i prijelaz na točku 1. Pri prekidu $\mathbf{A}^{(k)}$ ima dijagonalan oblik s točnosti do na $\varepsilon > 0$, dijagonalni elementi su približno jednaki vlastitim vrijednostima, a stupci matrice produkta svih primijenjenih T_{pq} približno su jednaki svojstvenim veličinama.

Konvergencija metode veoma bitno ovisi o redosljedu elemenata u procesu. Ona je dokazana za:

a) *klasičnu Jacobijevu metodu*: za osnovni vodeći element izaberemo onaj element koji nije na dijagonali i kojemu je apsolutna vrijednost najveća, $a_{pq}^{(k)} = \max_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|$;

b) *cikličke Jacobijeve metode*: izbor elementa u skladu s ranije definiranim nizom, bilo prema recima bilo prema stupcima. Metoda je pogodna za automatsko računanje (na elektroničkim računalima).

Metode iteracije. Pod ovim metodama razumijevamo sve metode svrsishodnog izračunavanja pojedinih vlastitih vrijednosti ili vektora.

(1) *Jednostavna vektorska iteracija* (*postupna metoda, Mizesova metoda*) za određivanje po veličini najveće svojstvene vrijednosti.

Ako matrica $\mathbf{A}$ ima takvu jednostruku svojstvenu vrijednost λ_1 da je $\lambda_1\ (|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|)$, onda niz vektora definiran sa

$$\mathbf{x}^{(m+1)}=\mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{A}^{(m+1)}\mathbf{x}^{(0)},\ \text{gdje je } \mathbf{x}^{(0)} \text{ zadano,}$$

asimptotski konvergira svojstvenom vektoru $\mathbf{y}_1$ koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1, $\mathbf{x}^{(m)}\sim\lambda_1^m c\mathbf{y}_1$, ako početni vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ ima komponentu (različitu od nule) u smjeru svojstvenog vektora $\mathbf{y}_1$. Svojstvena se vrijednost određuje iz $\lambda_1=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}$ ili bolje iz $\lambda_1=\lim\limits_{m\to\infty}R(\mathbf{x}^{(m)})$. U posljednjoj formuli $R(\mathbf{x})$ označava Rayleghejev kvocijent: $R(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

Svojstveni se vektor može odrediti iz asimptotske formule i to samo u normiranom slučaju. Svojstveni vektor u smjeru $\mathbf{y}_1$ određen je sa

$$\frac{y_{i1}}{|\mathbf{y}_1|}=\lim_{m\to\infty}\frac{x_i^{(m)}}{|\mathbf{x}^{(m)}|}\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Bez ovog normiranja metoda je numerički nestabilna.

Po apsolutnoj vrijednosti najmanja svojstvena vrijednost može se naći ako se uzme u obzir da je ona recipročna vrijednost maksimalne svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A}^{-1}$ (obrnuta vektorska iteracija).

(2) *Metoda parcijalne iteracije Wielanda.* Ta se metoda mora primijeniti onda kada je potrebno odrediti jednu jedinu svojstvenu vrijednost zajedno s pridruženim joj svojstvenim vektorom. Njena se upotreba zasniva na poznavanju dobre aproksimacije $\bar{\lambda}_k$ od traženog λ_k takvog, da je $|\lambda_k-\bar{\lambda}_k|$ malo u usporedbi s $|\lambda_j-\lambda_k|$, $j\neq k$ i na tome da su svojstvene vrijednosti međusobno izolirane.

Matrica $\mathbf{B}(\bar{\lambda}_k)=\mathbf{A}-\bar{\lambda}_k\mathbf{E}$ ima svojstvenu vrijednost $\mu_k=(\lambda_k-\bar{\lambda}_k)$ pridruženu svojstvenom vektoru $\mathbf{x}_k$ matrice $\mathbf{A}$ i to zato jer je $\mathbf{B}(\bar{\lambda}_k)\mathbf{x}_k=\mathbf{A}\mathbf{x}_k-\bar{\lambda}_k\mathbf{x}_k=\lambda_k\mathbf{x}_k-\bar{\lambda}_k\mathbf{x}_k=(\lambda_k-\bar{\lambda}_k)\mathbf{x}_k$. No tada je μ_k^{-1} dominantna svojstvena vrijednost od $\mathbf{B}^{-1}(\bar{\lambda}_k)$ za dovoljno proizvoljni početni vektor $\mathbf{x}^{(0)}$. Zbog toga, ako je $\mathbf{x}^{(m+1)}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}^{(m)}$ ili $\mathbf{B}\mathbf{x}^{(m+1)}=\mathbf{x}^{(m)}$, onda je

$$(\mu_k)^{-1}=\lim_{m\to\infty}R(\mathbf{x}^{(m)}),\quad \lambda_k=\bar{\lambda}_k+\lim_{m\to\infty}R^{-1}(\mathbf{x}^{(m)}).$$

Osim toga $\dfrac{1}{|\mathbf{x}^{(m)}|}x_i^{(m)}$ konvergira prema komponentama svojstvenog vektora $\dfrac{\mathbf{y}_k}{|\mathbf{y}_k|}$.

3. NELINEARNE JEDNADŽBE

Neka je $y=f(x)$ neprekinuta funkcija definirana za $a\leqslant x\leqslant b$ i neka su x_1, x_2 realni brojevi takvi da je $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. Ako su brojevi $f(x_1)$ i $f(x_2($ suprotnog predznaka, onda između x_1 i x_2 funkcije $f(x)$ ima neparan broj nultočaka (korijena).

(1) *Iteracijske metode.* Nelinearna jednadžba $f(x)=0$ može se ekvivalentnim transformacijama na različite načine svesti na oblik $g(x)=h(x)$.

Primjer 4.

$$\begin{aligned}
&x^2-\ln x-2=0, && f(x)=x^2-\ln x-2,\\
&\leftrightarrow x^2-2=\ln x, && g(x)=x^2-2,\quad h(x)=\ln x,\\
&\leftrightarrow x=e^{x^2-2}, && g(x)=x,\quad h(x)=e^{x^2-2},\\
&\leftrightarrow e^{x^2}=xe^2, && g(x)=e^{x^2},\quad h(x)=xe^2 \text{ itd.}
\end{aligned}$$

Konstrukcija konvergentnog niza $[x^{(m)}]_{m=0}^{\infty}$ brojeva po pravilu $g(x^{(m+1)})=h(x^{(m)})$ je zadani $x_i^{(0)}$ nazvana *iteracijskom metodom* za određivanje korijena $\mathbf{x}_N$.

Zbog pretpostavljene neprekinutosti granična vrijednost takvog niza je traženi korijen i to zato što je $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=r$ i $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m+1)}=r$ pa na osnovu neprekinutosti od g i h vrijedi da je $g(r)=h(r)$, tj. $r=\mathbf{x}_N$.

Dovoljni uvjeti konvegencije: $g'(x)$ i $h'(x)$ neprekinute u nekoj okolini od x_N, $x^{(0)}$ leži u toj okolini i u toj okolini vrijedi $|g'(x)|>|h'(x)|$.

Primjer 5. $x^2-\ln x-2=0$, $\ln x=x^2-2$, prema tome je $g(x)=\ln x$, $h(x)=x^2-2$.

Iz presjeka grafova tih funkcija nađemo da je $x^{(0)}=0{,}15$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $h'(x)=2x$, a odavde je $\dfrac{1}{x}>2x$ za $x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707$. Prema tome postupak konvergira.

Tablica 5

m	x_m	x_m^2-2	$\lvert x_{m+1}-x_m\rvert$	$\overline{\lvert x_N-x_m\rvert}$
0	0,15	−1,9775		0,0120652
1	0,138	−1,980956	0,012	0,0000627
2	0,1379373	−1,9809733	0,0000627	0,0000025
3	0,1379349	−1,9809740	0,0000024	0,0000001
4	0,1379348	−1,9809740	0,0000001	0,0000000
5	Tablica se dalje ne dopunjuje zato jer metoda „stoji". Podaci iz zadnjeg stupca su u praksi nepoznati. Navedeni su zato da bi se pokazalo kako razlika dviju uzastopnih iteracija u potpunosti karakterizira konvergentnost.			

Odgovarajućim izborom funkcija $g(x)$ i $h(x)$ može se dobiti čitav niz dobro konvergentnih metoda.

Newtonova metoda:

$$g(x)=x, \quad h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Konvergenciju imamo tada kada je $|h'(x)|=\left|\frac{f''f}{f'^2}\right|<1$ u nekoj okolini od x_N. Ako je x_N jednostruka nultočka, onda je $f'(x_N)\neq 0$ i $h'(x_N)=0$. Prema tome za početnu vrijednost $x^{(0)}$ mora vrijediti

$$|f''(x^{(0)})\cdot f(x^{(0)})|<|f'(x^{(0)})|^2.$$

Iteracijska formula ima oblik

$$x^{(m+1)}=x^{(m)}-\frac{f(x^{(m)})}{f'(x^{(m)})}, \qquad f'(x^{(m)})\neq 0.$$

Metoda sekanata (*pravilo lažnog položaja, metoda tetiva*):

$$x^{(m+1)}=x^{(m)}-\frac{f(x^{(m)})}{s_m} \qquad (m=1, 2,\ldots),$$

$$s_m=\frac{f(x^{(m)})-f(x^{(m-1)})}{x^{(m)}-x^{(m-1)}}.$$

Ovdje su $x^{(0)}$ i $x^{(1)}$ zadani brojevi takvi da je $f(x^{(0)})\cdot f(x^{(1)})<0$.

Jednostruka iteracija. Ako je $g(x)=x$, onda je $x^{(m+1)}=h(x^{(m)})$, i imamo konvergenciju za $|h'(x)|<1$. Ako je $x^{(m)}$ dovoljno blizu ka x_N, onda za pogrešku $e^{(m)}=x_N-x^{(m)}$ vrijedi:

$$e^{(m)}\approx h'(x_N)\,e^{(m-1)}\approx(h'(x_N))^m(x_N-x^{(0)}).$$

Primjer 6. Određivanje vrijednosti drugog korijena.

$x_N=\sqrt{a}$, tj. x_N je korijen jednadžbe $x^2-a=0$, $a>0$. Ako tu jednadžbu napišemo u obliku $2x=x+\frac{a}{x}$, dobit ćemo

$$x^{(m+1)}=\frac{1}{2}\left(x^{(m)}+\frac{a}{x^{(m)}}\right),$$

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right), \quad h'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right).$$

$|h'(x)|<1$ daje $-1<\frac{a}{x^2}<3$, a odavde slijedi ovaj uvjet na $x^{(0)}$:

$$(x^{(0)})^2>a/3.$$

(2) *Određivanje korijena* (*nultočaka*) *polinoma.* Ako je $P_n(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $a_n\neq 0$, gdje su a_i realni brojevi, onda nelinearna jednadžba

$$P_n(x)=0$$

ima točno n korijena n_{N_1}, $x_{N_2},\ldots,x_{N_n}$. Neki od njih, pa čak i svi oni mogu biti realni, neki mogu biti višestruki, a paran broj njih mogu biti konjugirano kompleksni, tj. ako je z korijen, onda je i $\bar{z}$ korijen. Prema tome polinom neparnog stupnja ima bar jedan realan korijen.

Ako je poznat neki korijen x_N, onda se $P_n(x)$ može podijeliti bez ostatka sa linearnim faktorom $(x-x_N)$; zato stupanj polinoma možemo tako snižavati i određivati ostale korijene.

Određivanje vrijednosti funkcije i njenih derivacija moguće je realizirati pomoću navedenog rastavljanja na linearne faktore po *Hornerovoj shemi* (vidi C.12. str. 966).

Naravno da se sve u (1) izložene metode mogu s odgovarajućim promjenama primijeniti i na polinome. Postoji međutim mnoštvo specijalnih metoda koje se po analogiji s metodama za određivanje svojstvenih vrijednosti mogu razvrstati na direktne i iteracijske metode, što ovisi o tome da li se traže svi ili samo pojedini korijeni.

Lobačevskij-Graffeova metoda (kao primjer direktne metode). Radi pojednostavnjenja pretpostavimo da polinom

$$P_n^{(j)}(x)=a_0^{(j)}(x-x_1^{(j)})(x-x_2^{(j)})\ldots(x-x_n^{(j)})=a_0^{(j)}x^n+a_1^{(j)}x^{(n-1)}+\ldots+a_n^{(j)}$$

ima samo realne jednostruke korijene $x_i^{(j)}$ $(i=1, 2,\ldots, n)$. Novi polinom $P_n^{(j+1)}(x)$ odredimo prema slijedećoj shemi (tablica 6).

Tablica 6

$P^{(j)}$	:	$a_0^{(j)}$	$a_1^{(j)}$	$a_2^{(j)}$	$a_3^{(j)}\ldots$
		$(a_0^{(j)})^2$	$(a_1^{(j)})^2$	$(a_2^{(j)})^2$	$(a_3^{(j)})^2\ldots$
	$-$		$-2a_0^{(j)}a_2^{(j)}$	$-2a_1^{(j)}a_3^{(j)}$	$-2a_2^{(j)}a_4^{(j)}\ldots$
	$+$			$+2a_0^{(j)}a_4^{(j)}$	$+2a_1^{(j)}a_5^{(j)}\ldots$
	$-$				$-2a_0^{(j)}a_6^{(j)}\ldots$
$+$	$\vdots$		$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		
$P^{(j+1)}$	:	$a_0^{(j+1)}$	$a_1^{(j+1)}$	$a_2^{(j+1)}$	$a_3^{(j+1)}\ldots$

Tada za korijene tog novog polinoma vrijedi:

$$|x_k^{(j+1)}| = |x_k^{(j)}|^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Moguće je pokazati da uz navedene pretpostavke proces određivanja polinoma $P_n^{(M)}(x)$ praktički završava nakon konačnog broja koraka, kada svi dvostruki produkti u tablici 6 s odabranim brojem znamenaka postanu jednaki nuli s točnošću do pogreške zaokruživanja. Tada imamo

$$\begin{aligned} a_1^{(M)} &= a_0^{(M)} x_1^{(M)}, \\ a_2^{(M)} &= x_0^{(M)} a_1^{(M)} x_2^{(M)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^{(M)} &= a_0^{(M)} x_1^{(M)} x_2^{(M)} \ldots x_n^{(M)}, \end{aligned}$$

odakle nađemo $x_k^{(M)}$ i zatim vađenjem korijena lako izračunamo vrijednosti korijena polaznog polinoma. Predznak korijena možemo odrediti pomoću jednostavnih dodatnih razmatranja ili neposrednom provjerom.

Metodu je moguće modificirati kako za polinome s višestrukim realnim korijenima tako i za polinome s kompleksnim korijenima.

4. SISTEMI NELINEARNIH JEDNADŽBI

Ako su zadane neprekinute funkcije $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ od n nezavisnih varijabli $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definirane na istom području $D \subseteq \mathbf{R}^n$ i ako postoji vektor $\mathbf{x}_N \in D$ takav da je $f_j(\mathbf{x}_N) = 0$ za sve j, onda $\mathbf{x}_N$ nazivamo *vektor-rješenjem* sistema nelinearnih jednadžbi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$:

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})).$$

Zbog toga je zadaća određivanja takvog vektor-rješenja poopćenje zadaća iz I.B.1. str. 908 i I. B. 3. str. 919. Zato se za njegovo određivanje primjenjuju obje odgovarajuće osnovne metode.

(1) *Linearizacija.* Nelinearni $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zamijenimo odgovarajućim linearnim preslikavanjem $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}$ je matrica tipa $n \times n$). Tada je uz određene uvjete rješenje $\mathbf{x}_L$ sistema $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0$ dobra aproksimacija od $\mathbf{x}_N$.

Newton-Kantorovičeva metoda (linearizacija razvojem u Taylorov red). Neka je $\mathbf{x}^{(0)}$ početna aproksimacija od $\mathbf{x}_N$ i $f_j(\mathbf{x})$ bar jednom neprekinuto diferencijabilna funkcija u D; tada je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) + \left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}^{(0)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}).$$

Odbacivanjem ostatka $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ dobijemo

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

gdje je $\mathbf{A}$ *Jacobijeva matrica* (*Jacobijan*) $\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ i ona je nesingularna ako je $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jednoznačno rješiva u nekoj okolini od $\mathbf{x}^{(0)}$. Prema tome, metoda se može opisati na slijedeći način:

1. Izbor aproksimacije $\mathbf{x}^{(0)}$ od $\mathbf{x}_N$.
2. Određivanje matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)})$.
3. Rješenje $\mathbf{z}^{(1)}$ sistema $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = 0$ daje prema $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{z}^{(1)}$ novu aproksimaciju za koju se postupak ponavlja sve dok se promjena $\mathbf{z}^{(j)}$ ne nađe unutar granica pogreške.

Primjer 7. Newton-Kantorovičeva metoda za dvije nelinearne jednadžbe (tablica 7).

Tablica 7

$f_1(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ $f_2(x, y) = 1 - x^2 + y^2$	$-f_{1x} = 2x, \; -f_{1y} = 2y$ $-f_{2x} = 2x, \; -f_{2y} = -2y$		$z_1^{(j)}$ $z_2^{(j)}$	$x^{(j-1)}$ $y^{(j-1)}$
$j = 1$				start
	0	2	0,25	1
	1	2	−0,25	1
$j = 2$				
	−0,125	2,5	−0,025	1,25
	0	2,5	−0,04167	0,75
$j = 3$				
	−0,0024	2,45	−0,0003	1,2247
	0,0011	2,45	−0,0012	0,7071
Točne vrijednosti su: $x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}}$				

(2) *Metoda iteracije.* Ekvivalentna transformacija od $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ na oblik $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ daje mogućnost da se $\mathbf{x}$ odredi kao fiksna točka preslikavanja $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ definiranog na D po iteracijskoj formuli

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{(0)} \text{ je zadano.}$$

Vrijedi slijedeći teorem o konvergenciji tako konstruiranog niza vektora $[\mathbf{x}^{(m)}]_0^\infty$ prema rješenju $\mathbf{x}_N$.

Neka je R pravokutni paralelepiped u n-dimenzionalnom prostoru:

$$R=\{\mathbf{x};\ a_k\leqslant x_k\leqslant b_k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\},$$

i neka je $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ definirana na R i neka zadovoljava slijedeće uvjete:

a) $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ je neka točka iz $\mathbf{R}^n$ za sve $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$.

b) Postoji realna konstanta L, $0<L<1$, takva da je $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{z})\|\leqslant L\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$ za sve $\mathbf{x},\mathbf{z}\in\mathbf{R}\left(\|\mathbf{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\right)$.

Tada:

1) Jednadžba $\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ima *točno jedno rješenje* $\mathbf{x}_N$ u R.

2) Gore navedeni iteracijski niz konvergira prema $\mathbf{x}_N$ za svaki početni vektor $\mathbf{x}^{(0)}\in\mathbf{R}$.

3) Vrijedi

$$\|\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}_N\|\leqslant\frac{L^m}{1-L}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|.$$

5. APROKSIMACIJA

Mnoštvo specijalnih zadaća o aproksimaciji možemo skratiti i razmatrati kao poseban slučaj *općeg problema aproksimacije.*

Promatra se vektorski prostor V kojem su elementi funkcije bilo koje klase definirane na jednom te istom području M i u V je definirana norma $p(f)$ koja ima ista svojstva kao i norme u Euklidskom i Hilbertovom prostoru (točnija opća zadaća aproksimacije razmatra se u funkcionalnoj analizi). Neka je $f\in V$ element od V, a G potprostor od V. Tada se opći problem aproksimacije $AP(f, G, p(f))$ sastoji u slijedećem: treba naći funkciju $\hat{g}(x)\in G$ takvu da je $D(f, G, p(f))=\inf_{g\in G}\{p(f-g)\}=p(f-\hat{g})$. Tada funkciju $\hat{g}(x)$ nazivamo *najboljom aproksimacijom* koja korespondira $AP(f, G, p(f))$, a broj $D(f, G, p)$ *defektom.*

S praktičkog stanovišta ovdje uvijek govorimo o tome da se funkcija f zamijeni s izračunljivom funkcijom $\hat{g}\in G$ *po mogućnosti što točnije* i u vezi s time nikakvu ulogu ne igra činjenica možemo li postići da je $D(f, G, p)=0$ na G, ako se za zadani realni broj $\varepsilon>0$ odgovarajućim izborom G defekt može učiniti manjim od ε.

Pri rješavanju $AP(f, G, p)$ mora se dobiti odgovor na slijedeća pitanja:

a) *Postoji li* najbolja aproksimacija $\hat{g}$?

b) Da li je $\hat{g}$ *jednoznačno* određena?

c) Kako se može izračunati $\hat{g}$ ili u danom slučaju odgovarajuća aproksimacija.

Problem linearne aproksimacije u Hilbertovom prostoru. Neka je V Hilbertov prostor sa skalarnim produktom (f, g) i *normom* $p(f)=\|f\|=\sqrt{(f, f)}$; neka je osim toga $G_n\subseteq V$ n- dimenzionalni *potprostor* s tom istom normom.

$AP(f, G_n, \|\ \|)$ ima jednoznačno određeno rješenje $\hat{g}$ takvo da je $(\hat{g}-f, h)=0$ za sve $h\in G_n$. Ako je $[h_1, h_2,\ldots, h_n]$ neka baza od G_n, onda je

$$\hat{g}=\sum_{k=1}^{n}c_k^{(n)}h_k,$$

pri čemu je

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^{(n)}(h_k, h_j)=(f, h_j)\qquad(j=1, 2,\ldots, n)$$

$$\|f-\hat{g}\|^2=(f-\hat{g}, f-\hat{g})=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^{(n)}(h_k, f).$$

Matrica linearnog sistema iz kojeg se određuju koeficijenti $c_k^{(n)}$gornjeg rastava, je *Gramova matrica baze* $[h_j]$. Tu ćemo matricu označavati sa $\mathbf{A}_n(h_j)$. Njeni elementi su $a_{ij}=(h_i, h_j)$. Matrica je simetrična hermitska u smislu Hilbertovog prostora i pozitivno je poludefinitna; ona je definitna ako su h_j linearno nezavisni. Slijedeće posebne AP potpadaju pod tu teoriju:

(1) *Harmonička analiza, Fourierov rastav*:

$$V=L_2(-\pi, \pi),\qquad G_{2n}=[\sin kx, \cos kx)_{k=0}^{n}$$

(2) *Metoda najmanjih kvadrata*: V je prostor funkcija definiranih na $[a, b]$ takvih da im je kvadrat integrabilan. Skalarni produkt funkcija $f(x)$ i $g(x)$ definiran je sa $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$. Tako dobiveni prostor se obično označavá sa $L_2(a, b)$. Za G_{n+1} uzmimo skup P_n svih polinoma stupnja ne nižega od n s realnim koeficijentima.

$AP(f, G_{n+1}, \|\ \|)$: treba naći polinom $\hat{P}_n(x)=\hat{a}_0-\hat{a}_1x-\hat{a}_2x^2-\ldots-\hat{a}_nx^n$ takav da za sve polinome P_n iz G_{n+1} vrijedi:

$$\int_a^b(f(x)-\hat{P}_n(x))^2\,dx\leqslant\int_a^b(f(x)-P_n(x))^2\,dx.$$

Niz potencija $h_k=x^{k-1}$ $(k=1, 2,\ldots, n+1)$ je prirodna baza u P_n i koeficijenti *minimalnog polinoma* određuju se iz sistema jednadžbi

$$\sum_{l=0}^{n}\hat{a}_l\int_a^b x^{l+k-2}\,dx=\int_a^b x^{k-1}f(x)\,dx\qquad(k=1, 2,\ldots, n+1),$$

$$\sum_{l=0}^{n}\hat{a}_l\frac{1}{l+k-1}(b^{l+k-1}-a^{l+k-1})=\int_a^b x^{k-1}f(x)\,dx.$$

Primijetimo da ovaj sistem nije prikladan i može se rješavati samo s nekom točnošću.

Ako je na primjer $a=0$ i $b=1$, onda govorimo o *Hilbertovoj matrici*

$$\mathbf{H}_n=\begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & \dots 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \dots 1/(n+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots 1/(2n-1) \end{pmatrix},$$

kojoj norma raste kada n neograničeno raste.

Sistem jednadžbi će biti osobito jednostavan ako za bazu $[h_1, h_2, \dots, h_n]$ skupa $\underline{P}^n$ odaberemo ortogonalne polinome. Za takve polinome $Q_i(x)$ vrijedi:

$$\int_a^b Q_i(x)\,Q_j(x)\,dx=0 \text{ za } i\neq j.$$

(Ako je osim toga $\int_a^b Q_i^2(x)\,dx=1$ $(i=0, 1, \dots, n)$, onda je takav sistem *ortonormiran.*)

Za segment $[a, b]=[-1, 1]$ to su opće poznati

Legendreovi polinomi

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad P_o(x)\equiv 1.$$

Ortogonalnost:

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1},\qquad \int_{-1}^{1}P_n(x)\cdot P_m(x)\,dx=0 \text{ za } m\neq n.$$

Rekurentnost: $(n+1)\,P_{n+1}(x)=(2n+1)\,xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$.

Korijeni: $P_n(x)$ ima na $[-1, 1]$ točno n različitih realnih korijena.

Daljnja svojstva ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)\,dx=0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1),\qquad \int_{-1}^{1}x^nP_n(x)\,dx=\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Ako se najbolja aproksimacija $\hat{P}_n(x)$ na intervalu $[-1, 1]$ traži u obliku linearne kombinacije Legendreovih polinoma, tj. $\hat{P}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}P_k(x)$, onda se sistem jednadžbi zbog ortogonalnosti svodi na slijedeće jednadžbe:

$$c_k^{(n)}\equiv c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\cdot P_k(x)\,dx,\quad D^2(f, \mathbf{P}_n, \|\cdot\|)=$$

$$=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}(f, P_k)^2=\int_{-1}^{1}f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n}\left[\int_{-1}^{1}f(x)\,P_k(x)\,dx\right]^2\cdot\frac{2k-1}{2}.$$

Primjer 8. Treba naći parabolu koja najbolje aproksimira funkciju $y=\sin t$ u intervalu $[0, \pi]$ u smislu kvadratnog odstupanja.

1. Transformacija intervala: $x=(2t/\pi)-1$, $y=\sin\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2. Legendreovi polinomi:

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x\cdot x-1)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

3. Koeficijenti rastava:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)dx=\frac{2}{\pi},$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)dx=0,$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)dx=\frac{10}{\pi}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\right).$$

4. Aproksimacija:

$$\hat{P}_2(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{10}{\pi}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\right)\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

ili

$$\hat{P}_2(t)=\frac{2}{\pi}+\frac{10}{\pi}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right).$$

(3) *Rastav po poopćenim ortogonalnim polinomima*:

$$V=L_2([a, b]; q(x));\qquad G_{n+1}=\underline{P}_n.$$

U tome se prostoru skalarni produkt tvori s negativnom ponderirajućom funkcijom $q(x)$:

$$(u, v)=\int_a^b u(x)\, v(x)\cdot q(x)\, dx.$$

Za specijalne ponderirajuće funkcije i interval $[-1, 1]$ poznati su odgovarajući ortogonalni polinomi, kao na primjer, za $q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Čebiševljevi polinomi:

$$T_n(x)=\cos(n \arccos x), \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Ortogonalnost:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)\cdot T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0 & \text{za } m\neq n,\\ \pi/2 & \text{za } m=n\neq 0,\\ \pi & \text{za } m=n=0.\end{cases}$$

Rekurentnost: $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, $T_0(x)=1$, za $n=0, 1, \ldots$

Korijeni: $T_n(x_k)=0$ za $x_k=\cos((2k+1)\pi/2n)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, tj. u intervalu $[-1, 1]$ polinom ima točno n realnih korijena.

Točke ekstrema: $|T_n(x)|\leqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $T_n(x_l)=(-1)^l$ za $x_l=\cos(l\pi/n)$ $(l=0, \ldots, n)$, tj. u intervalu $[-1, 1]$ imamo točno $n+1$ realnih točaka ekstrema.

Rastav po polinomima Čebiševa možemo praktički također obaviti polazeći od Taylorova razvoja koji konvergira u $[-1, 1]$ i zamjenjujući potenciju od x polinomima Čebiševa, uzevši u obzir da je:

$$1=T_0(x), \quad x=T_1(x), \quad x^2=\frac{1}{2}(T_0(x)+T_2(x)),$$

$$x^3=\frac{1}{4}(3T_1(x)+T_3(x)) \text{ itd.}$$

Primjer 9.

$$e^x=1+x+0{,}5x^2+0{,}16667x^3+0{,}04167x^4+R_5(x)=P_4(x)+R_5(x).$$

Rastav po polinomima Čebiševa ima oblik:

$$P_4(x)=1{,}2656T_0+1{,}1250T_1+0{,}2708T_2+0{,}0417T_3+0{,}0052T_4.$$

Na ovom primjeru želimo objasniti važno svojstvo rastava po polinomima Čebiševa: ako se traži aproksimacija trećeg reda, onda prema našim općim teoremima

$$P_3(x)=1{,}2656\,T_0+1{,}1250\,T_1+0{,}2708\,T_2+0{,}0147\,T_3$$

daje optimalni rezultat takve aproksimacije. Ako pak radimo s Taylorovim razvojem i naprosto ispustimo članove višeg reda počev od članova 4. reda, onda dobijemo 8 puta veću pogrešku.

Aproksimacija Čebiševa. Promatrajmo prostor $V=C([a, b])$ neprekinutih funkcija definiranih na intervalu $[a, b]$ i zadajmo zadatak da nađemo aproksimaciju $AP(f, G, p)$ s normom $p(f)=\sup_{x\in B}|f(x)|$, gdje je B neki podskup intervala $[a, b]$.

Za sistem funkcija G obično se uzima P_n.

(1) *Jednolika aproksimacija.* Ako specijalno odaberemo $B=[a, b]$, onda je

$$p(f)=\sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Ako je $G_{n+1}=\underline{P}_n=\{P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,\ a_k \text{ realni}\}$, onda vrijede slijedeći iskazi:

1. Postoji jedinstven polinom najbolje aproksimacije

$$\hat{P}_n(x)\in\underline{P}_n \text{ sa } D(f, G_{n+1}, \|\cdot\|_C)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\hat{P}_n(x)|\leqslant\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|$$

za sve $P_n\in\underline{P}_n$.

2. *Čebiševljev teorem o alternansi.* Postoji skup od $n+2$ točke $a\leqslant x_o<x_1<\ldots<x_{n+1}\leqslant b$ i jednoznačno određen polinom $\tilde{P}_n(x)$ takav da je

$$|f(x_j)-\tilde{P}_n(x_j)|=D(f, G_{n+1}, \|\cdot\|_C),$$

i

$$(f(x_j)-\tilde{P}_n(x_j))+(f(x_{j+1})-\tilde{P}_n(x_{j+1}))=0 \qquad \text{za} \qquad j=0, 1, \ldots, n.$$

Tada je $\tilde{P}_n(x)\equiv\hat{P}_n(x)$. Skup točaka $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ nazivamo *Čebiševljevom alternansom.*

3. *Weierstrassov teorem.* Za neku na $[a, b]$ neprekinutu funkciju $f(x)$ i za svaki realni broj $\varepsilon>0$ postoji polinom $P(x)$ takav da je $\|P(x)-f(x)\|<\varepsilon$.

4. U svakom rastavu prema polinomima Čebiševa (vidi str. 925) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j I_j(x)$ svaka parcijalna suma $s_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$ je minimizirajući polinom za $S_{n+1}(x)$ u odnosu na $\underline{P}_n$, tj. iz

$$\max_{x\in[a,\,b]} |S_{n+1}(x)-\hat{P}_n(x)| \leqslant \max_{x\in[a,\,b]} |S_{n+1}(x)-P_n((x)|$$

(za sve $P_n(x)\in\underline{P}_n$) slijedi: $\hat{P}_n(x)=S_n(x)$.

U praksi se za određivanje minimizirajućeg polinoma $\hat{P}_n$ prije svega koristimo svojstvima 2 i 4.

Polazeći od skupa $M^{(0)}=[x_j^{(0)}]_{j=0}^{n+1}$, $a\leqslant x_0^{(0)}<x_1^{(0)}<\ldots<x_{n+1}^{(0)}\leqslant b$ kao početne aproksimacije Čebiševljeve alternanse, u skladu s točkom 2 određujemo odgovarajući $P_n^{(0)}(x)$ i defekt.

Pomoću zamjene *pojedinih* ili *svih* elementa $M^{(0)}$ postižemo smanjenje *defekta* i dolazimo do novog skupa $M^{(1)}$ s kojim postupamo analogno, itd. Proces će završiti kada je u granicama točnosti smanjenje defekta nemoguće.

Primjer 10: $y(x)=e^x$, $n=1$, i zadane su tri točke

$$\begin{array}{lccc} M^{(0)} & : & -1 & 0 & 1 \\ y(x^{(0)}) & : & 0{,}368 & 1{,}000 & 2{,}718 \end{array} \qquad \tilde{P}_1^{(0)}(x)=a^{(0)}x+b^{(0)},$$

$$a^{(0)}(-1)+b^{(0)}+D^{(0)}=0{,}368,$$

$$a^{(0)}(0)+b^{(0)}-D^{(0)}=1{,}000.$$

$$a^{(0)}(1)+b^{(0)}+D^{(0)}=2{,}718.$$

Rešenje sistema jednadžbi na četiri znamenke daje $\tilde{P}^{(0)}(x)=1{,}175x+1{,}272$; $D^{(0)}=0{,}272$, $\max_{x_k=-1+k\cdot 0{,}1} |\tilde{P}^{(0)}(x)-e^x|=0{,}286$ za $x_k=0{,}2$.

Stoga u $M^{(0)}$ umjesto $x_2^{(0)}=0$ uvrstimo da je jednako 0,2 pa imamo:

$$\begin{array}{lccc} M^{(1)} & : & -1 & 0{,}2 & 1 \\ y(x_j^{(1)}) & : & 0{,}368 & 1{,}221 & 2{,}718 \end{array} \qquad \tilde{P}_1^{(1)}(x)=a^{(1)}x+b^{(1)}$$

Prema rješenju odgovarajućeg sistema dobijemo sada $\tilde{P}_1^{(1)}(x)=1{,}175x+1{,}264$, $D^{(1)}=0{,}278$.

Maksimum pogreške $|\tilde{P}_1^{(1)}(x)-e^x|$ u okolini od 0,2 s veličinom koraka 0,01 jednak je 0,279 za $x=0{,}16$:

$$M^{(2)}: \quad -1 \quad 0{,}16 \quad 1.$$

Međutim pri našem broju točaka to vodi na jedan te isti polinom. Prema tome $\tilde{P}_1^{(1)}(x)$ u granicama naše točnosti treba smatrati najboljom aproksimacijom prvog stupnja funkcije e^x.

Metoda teleskopa (približna jednolika aproksimacija). Ako je $f(x)\in C(a,b)$ i $\sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(x)$ red funkcija koji jednoliko konvergira prema $f(x)$, onda se za najbolju aproksimaciju $\hat{P}_n(x)$ uzima $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k F_k(x)$. Pri tome je razlika $\|S_n-P_n\|_{C(a,\,b)}$ minimalna, ako se radi o rastavu od f prema polinomima Čebiševa.

(2) *Diskretna aproksimacija Čebiševa.* Ako su $x_1<x_2<\ldots<x_N$ potporne točke, onda se *diskretna Čebiševljeva norma* uvodi sa $\|f\|_T^N=\max_{x_j}|f(x_j)|$. Dalje se promatra $\tilde{A}P(f, G_{n+1}, \|\cdot\|_T^N)$ sa $G_{n+1}=\underline{P}_n$.

Za $N\geqslant n+1$ vrijede izreke analogne izrekama za neprekinutu Čebiševljevu aproksimaciju.

Za $n+1=N$ govorimo o interpolacijskom problemu (vidi I.B. 6. niže) i odgovarajući minimalni polinom nazivamo *interpolacijskim polinomom.* Za $n+1=N$ on je jednoznačno određen, a za $n\leqslant N$ nije.

6. INTERPOLACIJA

Interpolacijski polinom. Neka je u intervalu $[a, b]$ zadano $n+1$ potpornih (čvornih) točaka $a\leqslant x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n\leqslant b$. Neka je osim toga zadano $n+1$ realnih brojeva y_j $(j=0, 1, \ldots, n)$ (na primjer kao vrijednosti funkcije $f(x)$ u čvornim točkama). Tada imamo slijedeći problem interpolacije.

Treba naći polinom $I_n(x)$ stupnja ne višeg od n takav da je $I_n(x_j)=x_j$ za $0\leqslant j\leqslant n$.

Interpolacijski polinom je *uvijek jedinstven.* Taj se polinom može prikazati u različitim oblicima.

Lagrangeov oblik:

$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x),$$

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}.$$

Tu su polinomi L_j stupnja n i oni predstavljaju produkt od n linearnih faktora; prema tome je n *najveći* stupanj od I_n. Osim toga, odmah se vidi da je $L_j(x_j)=1$, $L_j(x_k)=0$ za $k\neq j$. Prema tome je $I_n(x_j)=y_j$.

Newtonov oblik:

$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j N_j(x),$$

$$N_0(x)=1, \quad N_j(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1}) \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

$$c_j=[x_o x_1 \ldots x_j]=[x_j x_{j-1}\ldots x_0],$$

$$[x_j x_{j-1}\ldots x_0]=\frac{1}{x_j-x_0}([x_j x_{j-1}\ldots x_1]-[x_{j-1}\ldots x_0]),$$

$$[x_j]=y_j \qquad (j=0, 1, \ldots, n).$$

Izraz $[x_0 x_1 \ldots x_j]$ nazivamo *uređenom razlikom.*

Primjer 11. Određivanje interpolacijskog polinoma.

j	x_j	y_j	$[x_j x_{j-1}]$	$[x_j x_{j-1} x_{j-2}]$	$[x_j x_{j-1} x_{j-2} x_{j-3}]$
0	4	$\boxed{1}$			
			$\frac{1}{2}\cdot 2=\boxed{1}$		
1	6	3		$\boxed{\frac{3}{8}}$	
			$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{12}}$
2	8	8		$\frac{7}{8}$	
			6		
3	10	20			

Newtonov polinom:

$$I_3(x)=1+1\cdot(x-4)+\frac{3}{8}(x-4)(x-6)+\frac{1}{12}\cdot(x-4)(x-6)(x-8)=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot(2x^3-27x^2-142x-240).$$

Lagrangeov polinom:

$$I_3(x)=1\cdot\frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)}+3\cdot\frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)}+$$

$$+8\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)}+20\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-6)(10-8)}=$$

$$=-\frac{1}{48}(x-6)(x-8)(x-10)+\frac{3}{16}(x-4)(x-8)(x-10)-$$

$$-\frac{1}{2}(x-4)(x-6)(x-10)+\frac{5}{12}(x-4)(x-6)(x-8),$$

$$I_3(x)=\frac{1}{24}(2x^3-27x^2+142x-240).$$

Interpolacije primjenjujemo uglavnom onda kada su s obzirom na određenu funkciju $y=f(x)$ poznate samo njene diskretne vrijednosti i kada treba odrediti njezinu vrijednost između dviju susjednih čvorišta *(interpolacija)* ili iza intervala čvorišta *(ekstrapolacija)*. Funkcija se aproksimira polinomom, pri čemu je $f(x_j)=I_n(x)$ $(j=0, 1, \ldots, n)$.

Ako je funkcija $f(x)$, koju treba interpolirati u nekom intervalu, dovoljan broj puta diferencijabilna, onda se može izvesti formula za *pogrešku interpolacije*:

$$f(x)-I_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

gdje je ξ neki broj između a i b koji ovisi o x.

Za određivanje polinoma u Newtonovu obliku primjenjujemo, kao što je bilo pokazano u primjeru, *shemu spuštanja*

j	x_j	$[x_j]$	$[x_j x_{j+1}]$	$[x_j x_{j+1} x_{j+2}]$	$[x_j x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3}]$
0	x_o	$\boxed{y_o}$	$\boxed{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$		
1	x_1	y_1		$\boxed{\frac{[x_1x_2]-[x_0x_1]}{x_2-x_o}}$	
			$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$\boxed{\frac{[x_1x_2x_3]-[x_0x_1x_2]}{x_3-x_0}}$
2	x_2	y_2		$\frac{[x_2x_3]-[x_1x_2]}{x_3-x_1}$	
			$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		$\frac{[x_2x_3x_4]-[x_1x_2x_3]}{x_4x_1}$
3	x_3	y_3		$\frac{[x_3x_4]-[x_2x_3]}{x_4-x_2}$	
...	...	...	...	...	...

Koeficijenti c_j Newtonova polinoma su oni brojevi koji se javljaju u gornjem spuštajućem retku (uokvireni su).

Često primjenjujemo *ekvidistantne čvorne točke* (čvorne točke koje su na pravcu tako raspoređene da su razmaci susjednih točaka uvijek jednaki)

$$x_0 = a,$$
$$x_1 = x_0 + h,$$
$$x_2 = x_0 + 2h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_0 + nh = b$$
$$\left(\text{tj. } h = \frac{b-a}{n}\right)$$

Lako se vidi da tada vrijedi

$$[x_k x_{k+1} \ldots x_{k+n}] = \frac{1}{n! h^n} \Delta^n y_k.$$

Razlike $\Delta^n y_k$ n-tog reda definiraju se induktivno:

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k) \quad (n = 1, 2, \ldots, k)$$

i

$$\Delta^0 y_k = y_k, \quad \Delta^1 y_k = \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Da se nađe Newtonov polinom, može se konstruirati veoma jednostavna *shema diferencije.*

Shema formula ima oblik

$$I_n(x) = y_o + \frac{1}{h}\Delta y_0 (x - x_0) + \frac{1}{2! h^2}\Delta^2 y_o (x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n! h^n}\Delta^n y_0 (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Ako uvrstimo da je $x = x_0 + th$, gdje je t realan broj između nule i n, onda formula dobije oblik

$$I_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \Delta^k y_0.$$

Određivanje i upotreba diferencija može se formalizirati uvođenjem operatora.

Važniji operatori i formule.

Identičnosti: $Iy_k = y_k$.

Pomak: $Ey_k = y_{k+1} = y_k + h$,

$E^p y_k = y_{k+p} = y_k + ph$, p je realan broj

Razlika: $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ je *prestizajuća razlika*

$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$ je *retardirana razlika*

$\delta y_k = E^{1/2} y_k - E^{-1/2} y_k =$
$= y_{k+(1/2)} - y_{k-(1/2)}$ je *centralna razlika*

Srednja vrijednost:

$$\mu y_k = \frac{1}{2}(y_{k+(1/2)} + y_{k-(1/2)}) = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}) y_k.$$

Pravila računanja:

$$E = I + \Delta = (I - \nabla)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\delta + \mu\right)^2,$$

$$E^n = (I + \Delta)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j,$$

$$\Delta^n = (E - I)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} E^j,$$

$$\Delta E = E\Delta, \qquad \nabla E = E\nabla = \Delta \quad \text{i druge.}$$

Takve formule treba shvatiti tako da primjena operatora na lijevoj i desnoj strani navedenih jednakosti na y_k i f_k daje identitet. Ovdje je sa f_k označena $f(x_k)$. Za ove operatore vrijede mnoge formule (potenciranja, binomna formula itd.). Važniji oblici interpolacijskog polinoma za ekvidistantne čvorne točke navedeni su u tablici 8.

Tablica 8

Newton (ekvidistantne potporne točke): $x = x_0 + th$,

$$f(x) = f_0 + C_t^1 \Delta f_0 + C_t^2 \Delta^2 f_0 + \ldots + C_t^n \Delta^n f_0 + C_t^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi);$$
$$x = x_n - sh;$$
$$f(x) = f_n - C_s^1 \nabla f_n + C_s^2 \nabla^2 f_n + \ldots + (-1)^n C_s^n \nabla^n f_n + (-1)^{n+1} C_s^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Gauss, I: $x=x_i+th$,

$$f(x)=f_i+C_t^1\delta f_{i+\frac{1}{2}}+C_t^2\delta^2 f_i+C_{t+1}^3\delta^3 f_{i+\frac{1}{2}}+$$
$$+C_{t+1}^4\delta^4 f_i+\ldots+C_{t+A_n}^{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi);$$

Gauss, II:

$$f(x)=f_i+C_t^1\delta f_{i-\frac{1}{2}}+C_{t+1}^2\delta^2 f_i+C_{t+1}^3\delta^3 f_{i-\frac{1}{2}}+$$
$$+C_{t+2}^4\delta^4 f_i+\ldots+C_{t+B_n}^{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi);$$

$A_n=B_n=n/2$, za parne n; $A_n=(n-1)/2$ i $B_n=(n+1)$ za neparne n.

Bessel:

$$\left(\mu\delta^k f_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\delta^k f_i+\delta^k f_{i+1})\right),\quad x=x_i+th,\quad n=2r+1,$$

$$f(x)=f_i+\delta f_{i+\frac{1}{2}}+C_t^2\left(\mu\delta^2 f_{i+\frac{1}{2}}+\frac{t-(1/2)}{3}\delta^3 f_{i+\frac{1}{2}}\right)+$$
$$+C_{t+1}^4\left(\mu\delta^4 f_{i+\frac{1}{2}}+\frac{t-(1/2)}{5}\delta^5 f_{i+\frac{1}{2}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+C_{t+r-1}^{2r}\left(\mu\delta^{2r}f_{i+\frac{1}{2}}+\frac{t-(1/2)}{2r+1}\delta^{2r+1}f_{i+\frac{1}{2}}\right)+C_{t+r}^{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi).$$

Everett: $(n=2r+1,\ s=1-t)$, $x=x_i+th$;

$$f(x)=sf_i+\binom{s+1}{3}\delta^2 f_i+\binom{s+2}{5}\delta^4 f_i+\ldots$$
$$\ldots+tf_{i+1}+\binom{t+1}{3}\delta^2 f_{i+1}+\binom{t+2}{5}\delta^4 f_{i+1}+\ldots+\binom{t+r}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi).$$

Stirling:

$$\left(\mu\delta^k f_i=\frac{1}{2}\left(\delta^k f_{i-\frac{1}{2}}+\delta^k f_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)\quad x=x_i+th,$$

$$f(x)=f_i+C_r^1\left(\mu\delta f_i+\frac{t}{2}\delta^2 f_i\right)+C_{t+1}^3\left(\mu\delta^3 f_i+\frac{t}{4}\delta^4 f_i\right)+\ldots+\text{ostatak}$$

(Ova se formula dobije kao aritmetička sredina obiju Gaussovih formula. Tako se određuje i ostatak!

Splajn-interpolacija. Kod interpolacije na velikim intervalima, tj. u odnosu na velik broj čvornih točaka, pojavljuju se neke dodatne poteškoće. S jedne je strane točnost za velike razmake među čvornim točkama veoma mala, a s druge se strane interpolacijski polinomi visokog stupnja na krajevima intervala mnogo mijenjaju, pa to onda unakazuje ponašanje funkcije. To je naročito važno pri uzastopnom diferenciranju. Pri rješavanju takvih zadaća djelomično pomaže

1) *Interpolacija po dijelovima* nižeg reda: interpolacija se provodi pomoću velikog broja čvornih točaka intervala pa se zatim pomoću tih polinoma dobije tražena interpolacijska funkcija. Pri tome u točkama spoja već prva derivacija ima točku prekida.

2) Primjena *interpolacijskih formula u kojima se javljaju derivacije.* Splajn-interpolacija sve više dobiva na važnosti.

Neka je, kao i prije, zadano $n+1$ čvornih točaka. Funkciju koja na intervalu $[a, b]$ interpolira funkciju $f(x)$ nećemo sada tražiti u skupu polinoma $P_n(x)$, nego između tako zvanih *splajn-funkcija* $S_k(x)$ stupnja k.

Neka je K_n skup čvornih točaka (čvorišta) zadan sa $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Funkciju $S_k(x)$ nazivamo *splajn-funkcijom* stupnja $k\geqslant 0$ na K_n, ako su ispunjeni ovi uvjeti:

a) $S_k(x)\in C^{k-1}([a, b])$;

b) $S_k(x)$ je polinom ne većeg stupnja od k za $x\in[x_{j-1}, x_j]$.

Skup svih splajn-funkcija na K_n označavamo sa $S_k(K_n)$.

Splajn-funkcija $\hat{S}_k(x)\in S_k(K_n)$ nazivamo *interpolirajućom splajn-funkcijom* ako vrijedi

$$\hat{S}_k(x_j)=y_j=f(x_j)\quad (j=0, 1,\ldots, n).$$

U primjenama je često dovoljno uzeti $k=3$ i primijeniti tzv. *kubnu-splajn interpolaciju*:

$$h_j=x_j-x_{j-1}, \qquad S_3(x)=s(x),$$
$$s_j^i=s^{(i)}(x_j) \qquad (i=0,\ 1,\ 2;\ j=0,\ 1,\ldots,\ n).$$

Kako je $s(x)$ polinom trećeg stupnja na svakom od intervala, to za $x\in[x_{j-1},\ x_j]$ vrijedi

$$s''(x)=-s_{j-1}^2\frac{x-x_j}{h_j}+s_j^2\frac{x-x_{j-1}}{h_j}$$

i prema tome

$$s(x)=-s_{j-1}^2\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+s_j^2\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+c_{j1}x+c_{j0}.$$

Ovdje su s_j^2, c_{j1}, c_{j0} nepoznati za $j=1,\ 2,\ldots,\ n$.

Posljednje dvije veličine se pomoću uvjeta $s(x_j)=y_j$ mogu eliminirati pa dobijemo:

$$s(x)=s_{j-1}^2\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+s_j^2\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+$$
$$+\left(\frac{y_j}{h_j}-\frac{s_j^2h_j}{6}\right)(x-x_{j-1})-\left(\frac{y_{j-1}}{h_j}-\frac{s_{j-1}^2h_j}{6}\right)(x-x_j). \qquad (1)$$

Diferenciranjem ove funkcije i uzimanjem u obzir da $s'(x)$ na čitavom intervalu, pa prema tome i u čvorištima, mora biti neprekinuta, dobijemo najzad sistem jednadžbi:

$$s_{j-1}^2\frac{h_j}{6}+s_j^2\frac{h_j+h_{j+1}}{3}+s_{j+1}^2\frac{h_{j+1}}{6}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} \qquad (2)$$
$$(j=1,\ 2,\ldots,\ n-1)$$

za $n+1$ nepoznanica $s_0^2,\ s_1^2,\ldots,\ s_n^2$.

Da bi one bile jednoznačno određene u ovisnosti o samoj zadaći, dodamo još dvije jednadžbe.

Normalni slučaj (N):

$$s_0^1=y_0'=f'(x_0), \qquad s_n^1=y_n'=f'(x_n).$$

Periodički slučaj (P) (tj. $f(x+(x_n-x_0))=f(x)$):

$$s_0^2=s_n^2, \qquad s_1^2=s_{n+1}^2.$$

Zadano zaglađivanje na rubovima (R):

$$s_0^2=\lambda s_1^2, \qquad \mu s_{n-1}^2=s_n^2.$$

Sistem jednadžbi (2) se u navedenim slučajevima mijenja na ovaj način.

Slučaj (N). Dodamo dvije jednadžbe:

$$s_0^2\frac{h_1}{3}+s_1^2\frac{h_1}{6}=\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0',$$

$$s_{n-1}^2\frac{h_n}{6}+s_n^2\frac{h_n}{3}=-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}+y_n'.$$

Slučaj (P). Prvu jednadžbu zamijenimo sa

$$s_1^2\frac{h_1+h_2}{3}+s_2^2\frac{h_2}{6}+s_n^2\frac{h_1}{6}=\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1},$$

i dobijemo novu jednadžbu:

$$s_1^2\frac{h_1}{6}+s_{n-1}^2\frac{h_n}{6}+s_n^2\frac{h_n+h_1}{3}=\frac{y_1-y_n}{h_1}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}.$$

Slučaj (R). Prvu i posljednju jednadžbu zamijenimo sa

$$s_1^2\frac{(1+\lambda/2)h_1+h_2}{3}+s_2^2\frac{h_2}{6}=\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1},$$

$$s_{n-2}^2\frac{h_{n-1}}{6}+s_{n-1}^2\frac{h_{n-1}+(1+\mu/2)h_n}{3}=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}}.$$

Na taj način sistem ima samo $n-1$ nepoznanicu:

$$s_1^2,\ldots,\ s_{n-1}^2.$$

Primjer 12. Splajn-interpolacija funkcije $f(x)=\sin x$, $n=4$.

Ovdje je riječ o periodskom slučaju; primijeniti ćemo (2) i slučaj (P).

j	x_j	y_j	h_j	y_j-y_{i-1}
0	0	0		
			$\pi/2$	1
1	$\pi/2$	1		
			$\pi/2$	-1
2	π	0		
			$\pi/2$	-1
3	$3\pi/2$	-1		
			$\pi/2$	1
4	2π	0		

$$(P): \quad s_1^2\,\pi/3+s_2^2\,\pi/12+s_4^2\,\pi/12=-1\cdot 2/\pi-1\cdot 2/\pi=-4/\pi,$$

$$(2): \begin{cases} s_1^2\,\pi/12+s_2^2\,\pi/3+s_3^2\,\pi/12=-2/\pi+2/\pi=0, \\ s_2^2\,\pi/12+s_3^2\,\pi/3+s_4^2\,\pi/12=2/\pi+2/\pi=4/\pi, \end{cases}$$

$$(P): \quad s_1^2\,\pi/12+s_3^2\,\pi/12+s_4^2\,\pi/3=2/\pi-2/\pi=0.$$

Matrica sistema je simetrična. Lako dobijemo

$$s_1^2=-12/\pi^2, \quad s_2^2=0, \quad s_3^2=12/\pi^2, \quad s_4^2=s_0^2=0.$$

Tada splajn-funkciju dobijemo iz (1):

$$s(x)=\begin{cases} (-4/\pi^3)^3x^3+(3/\pi)\,x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2, \\ (4/\pi^3)^3\,(x-\pi)^3-(3/\pi)\,(x-\pi), & \pi/2\leqslant x\leqslant \pi, \\ (4/\pi^3)\,(x-\pi)^3-(3/\pi)\,(x-\pi), & \pi\leqslant x\leqslant 3\pi/2, \\ (4/\pi^3)\,(x-2\pi)^3+(3/\pi)\,(x-2\pi), & 3\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Važno je uočiti da pored do sada poznatih svojstava interpolirajuća splajn-funkcija ima još dva ekstremalna svojstva.

1) Između svih interpolirajućih dva puta neprekinutih diferencijabilnih funkcija na $[a, b]$ za interpolirajuću splajn-funkciju $\varphi(x)$ stupnja 3 funkcional $J(\varphi)=\int_{x_0}^{x_n}(\varphi''(x))^2\,dx$ prima strogi minimum, tj. vrijedi

$$\int_a^b (s''(x))^2\,dx\leqslant\int_a^b(\varphi''(x))^2\,dx$$

za sve funkcije $\varphi(x)$ takve da je $\varphi(x_j)=y_j$.

2) Za sve $S(x)\in S_3(K_n)$ i dva puta neprekinute i diferencijabilne funkcije f takve da je $f(x_j)=y_j$ vrijedi

$$\int_a^b (f(x)-s(x))^2\,dx\leqslant\int_a^b(f(x)-S(x))^2\,dx$$

i znak jednakosti vrijedi samo za interpolirajuću splajn-funkciju

$$S(x)=s(x).$$

Svojstvo 1) u biti znači da je zakrivljenost interpolirajuće krivulje minimalna; to je svojstvo koje se može približno realizirati elastičnim ravnalom (engleski „spline“) koje je učvršćeno u čvorovima interpolacije. To je mehanička interpretacija splajn-interpolacije.

7. PRIBLIŽNO RAČUNANJE INTEGRALA

Pod ovim naslovom razumijevamo (približno) izračunavanje određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ uz uvjet da su poznate pojedine vrijednosti podintegralne funkcije i neka njena svojstva. Pretpostavljat ćemo da je $f(x)$ (po dijelovima) neprekinuta funkcija.

Formule srednje vrijednosti. Prema teoremu srednje vrijednosti integralnog računa vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(\xi), \quad a\leqslant\xi\leqslant b, \quad m\leqslant f(\xi)\leqslant M,$$

gdje je m najmanja, a M najveća vrijednost funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$.

Na tome se teoremu i zasniva slijedeći opći princip. Neka je u intervalu $[a, b]$ zadano $n+1$ čvornih točaka $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, u kojima neka su i zadane vrijednosti $y_k=f(x_k)$ $(k=0, 1,\ldots, n)$. Ako je $M(y_0, y_1,\ldots, y_n)$ bilo kakva sredina od $y_0, y_1,\ldots, y_n$, onda je $\min\limits_{k=0,\ldots,n} y_k\leqslant M(y_0,\ldots, y_n)\leqslant \max\limits_{k=0,\ldots,n} y_k$; dobijemo formulu srednje vrijednosti:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,M(y_0, y_1,\ldots, y_n)+R_n[f]=J_n[f]+R_n[f],$$

gdje je $R_n[f]$ pogreška integracije.

U praktičkim primjenama ova formula mora zadovoljavati neke uvjete:

(a) $M(y_0, \ldots, y_n)$ je linearna funkcija, tj.

$$M(ay_0+bz_0, ay_1+bz_1, \ldots, ay_n+bz_n)= \\ =aM(y_0, y_1, \ldots, y_n)+bM(z_0, z_1, \ldots, z_n).$$

tada je

$$\int_a^b (af(x)+bg(x))\,dx = aJ_n[f]+bJ_n[g]+aR_n[f]+bR_n[g]= \\ =a\int_a^b f(x)\,dx+b\int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) Za odgovarajuće izabranu porodicu krivulja $[h_k(x)]_{k=0}^{\infty}$ imamo da je $R_n[h_k]=0$, $k\leqslant n$, tj. formula srednje vrijednosti je točna za tu porodicu.

Oba uvjeta bit će istovremeno ispunjena ako se uzme *ponderirana aritmetička sredina*. Stoga se dalje razmatra samo

$$M(y_0, y_1, \ldots, y_n)=\left(\sum_{i=0}^{n} p_i\right)^{-1}\sum_{i=0}^{n} p_i y_i, \qquad p_i>0.$$

U formuli će prema tome ostati sloboda izbora: *broja potpornih točaka, raspored potpornih točaka, izbor težina*. Pogreška integracije $R_n[f]$ bitno ovisi o tom izboru.

Ako pri integriranju umjesto $f(x)$ uzmemo Lagrangeov interpolacijski polinom $I_n(x)$, dobit ćemo čitavu porodicu formula srednje vrijednosti:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} y_i\int_a^b L_i(x)\,dx+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)\,dx.$$

Za ekvivalentne čvorne točke dobijemo tzv. Newton-Cotesove formule (tablica 9):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{n\cdot h}{P_n}\sum_{j=0}^{n} f(a+jh)\,p_{jn}+R_n[f],$$

$$P_n=\sum_{j=0}^{n} p_{jn}, \quad h=(b-a)/n, \quad a=x_0, \quad b=x_n.$$

Tablica 9

n	P_n	p_{0n}	p_{1n}	p_{2n}	p_{3n}	p_{4n}	p_{5n}	p_{6n}	p_{7n}	R_n^*
1	2	1	1							$-\frac{h^3}{12}f^{(4)}(\xi)$
2	6	1	4	1						$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$
3	8	1	3	3	1					$-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$
4	90	7	32	12	32	7				$-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$
5	288	19	75	50	50	75	19			$-\frac{275h^7}{12\,096}f^{(6)}(\xi)$
6	840	41	216	27	272	27	216	41		$-\frac{9h^9}{1400}f^{(8)}(\xi)$
7	17 280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	$-\frac{8\,183h^9}{518\,400}f^{(8)}(\xi)$

Nazivi: $n=1$, trapezna formula,
$n=2$, parabolna (Simpsonova) formula, $x_0<\xi<x_n$.
$n=3$, Newtonova formula;

Napomene.

(a) Dobitak na točnosti, uslijed povišenja reda, djelomično će se umanjiti zbog istovremenog povećavanja pogreške metode tako da se za velike intervale red iznad $n=7$ obično ne primjenjuje. Često se integriranje za pojedine intervale razdiobe provodi prema formulama koje nisu visokog reda. Kao primjer navedimo *Simpsonovu formulu*:

$$x_j=a+jh, \qquad j=0, 1, \ldots, 2N, \qquad h=(b-a)/2N,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+4y_{2N-1}+y_{2N})-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \\ a<\xi<b.$$

(b) Formule za $n=2k$ i $n=2k+1$ daju pogreške istoga reda. Stoga je, za zadani broj točaka, svrsishodno kombinirati te formule.

Primjer 13. Izračunavanje $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ($z=1{,}1,\ldots,\ 2{,}0$) (tablica 10).

Tablica 10

i	x_i	$y_i=\frac{1}{x_i}$	p_i	$\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} p_i y_i$	p_i	$\frac{4}{3}\Sigma p_i y_i$	p_i	$\frac{3}{8}h\Sigma p_i y_i$
0	1,0	1,000000	1					
1	1,1	0,909091	4		−1	0,095311	1	
2	1,2	0,833333	1 1	0,182321	−4		3	
3	1,3	0,769231	4		1 −1		3	
4	1,4	0,714286	1 1	0,336471	4		1	0,262363
5	1,5	0,666667	4		1 1	0,405462		
6	1,6	0,625000	1 1	0,470002	4			
7	1,7	0,588235	4		1 1	0,530624		
8	1,8	0,555556	1 1	0,587781	4			
9	1,9	0,526316	4		1	0,641847		
10	2,0	0,500000	1	0,693138				

Suglasno zaključku Newton-Cotesove formule karakteristične su po tome što daju točan rezultat za integriranje polinoma n-tog stupnja. Može se pokazati da su ovim zahtjevima težine p_{jn} jednoznačno određene.

Integralne formule za koje je $R_n[x^m]=0$ kada je $0\leqslant m\leqslant n$ i $R_n[x^{m+1}]\neq 0$ nazivamo *formulama n-tog reda.*

Ako čvorišta ili njihov broj nisu od početka zadani, onda se težine i čvorišta treba pokušati odrediti tako da se dobije formula najvećeg mogućeg reda. To vodi do tako zvane *Gaussove kvadrature.*

Gaussova kvadratura. Ako je $w(x)$ pozitivna funkcija ponderiranja, onda se uvijek mogu odrediti koeficijenti A_{in} i čvorišta x_{in} ($i=1, 2,\ldots, n$) tako da vrijedi

$$\int_a^b f(x)\cdot w(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in})+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b (\Pi_n(x))^2\cdot w(x)\,dx,$$

$$\Pi_n(x)=(x-x_{1n})(x-x_{2n})\ldots(x-x_{nn}),$$

$$a\leqslant x_{1n}<x_{2n}<\ldots<x_{nn}\leqslant b,\qquad a<\xi<b.$$

Ta je formula, prema tome, reda $2n-1$.

(a) Čvorovi x_{in} su nultočke polinoma stupnja n iz porodice $[P_m(x)]_{m=0}^{\infty}$ ortogonalnih polinoma s obzirom na $w(x)$ (vidi str. 925):

$$\int_a^b P_i(x)\cdot P_j(x)\cdot w(x)\,dx=0\quad \text{za } i\neq j.$$

(b) Težine A_{in} su, kao i ranije, dobivene integriranjem odgovarajućih Lagrangeovih polinoma:

$$A_{in}=\int_a^b L_{in}(x)\cdot w(x)\,dx.$$

Posebni slučajevi (ne smanjujući općenitost stavit ćemo da su $a=-1$, te $b=1$).

Gauss-Legendreova formula (tablica 11): $w(x)=1$, $P_m(x)$ su *Legendreovi polinomi* (vidi str. 925),

$$A_{in}=\frac{2(1-x_{in}^2)}{n^2(P_{n-1}(x_{in}))^2},\qquad \int_{-1}^{1}(\Pi_n(x))^2\,dx=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2}.$$

Tablica 11

n	i	x_{in}	A_{in}
1	1	0	2
2	1	0,5773503	1
	2	−0,5773503	1
3	1	0,7745967	0,5555556
	2	0	0,8888889
	3	−0,7745967	0,5555556
4	1	0,8611363	0,3478548
	2	0,3399810	0,6521455
	3	−0,3399810	0,6521455
	4	−0,8611363	0,3478548
5	1	0,9061798	0,2369269
	2	0,5384693	0,4786287
	3	0	0,5688889
	4	−0,5384693	0,4786287
	5	−0,9061798	0,2369269
6	1	0,9324700	0,1713245
	2	0,6612094	0,3607616
	3	0,2386192	0,4679139
	4	−0,2386192	0,4679139
	5	−0,6612094	0,3607616
	6	−0,9324700	0,1713245

Primjer 14. Gauss-Legendreova kvadratura

$$\int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = J, \qquad n=2.$$

Svođenje na interval $[-1, 1]$ daje relacije

$$t=\frac{\pi}{4}(x+1), \quad \mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x, \quad J=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\sin\left[\frac{\pi}{4}(x+1)\right]\mathrm{d}x,$$

$$x_{12}=-\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_{22}=\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad A_{12}=\frac{2(1-1/3)}{4\cdot 1/3}=A_{22}=1,$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{1/3})\right]=0{,}32589, \quad \sin\left[\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1/3})\right]=0{,}94541,$$

$$J=\frac{\pi}{4}(0{,}32589+0{,}94541)+\frac{2^5\cdot 2^4\cdot\pi^5}{5\cdot 24^3\cdot 4^5}\sin\left[\frac{\pi}{4}(\xi+1)\right]=$$

$$=0{,}99848+\frac{\pi^5}{4^5\cdot 3^5\cdot 5}\sin\tau, \quad 0<\tau<\frac{\pi}{2}.$$

Stvarna pogreška iznosi 0,00152. To je dobar rezultat za formule sa dvije čvorne točke i ukazuje na značaj takvih metoda integriranja.

Gauss-Čebiševljeva formula: $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $P_m(x)$ su Čebiševljevi polinimi $T_m(x)$ (vidi str. 925).

$$A_{in}=\pi/n \quad \text{za sve } i; \quad x_{in}=\cos((2i-1)\pi/2n),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(\Pi_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{2^{2n}}.$$

Primjer 15. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^4/\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x.$

Ako odaberemo $n=3$, onda je $2n-1=5$ i rezultat mora biti točan:

$$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x,$$

$$x_{13}=0, \quad x_{23}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x_{33}=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\int_{-1}^{1}(x^4/\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left(0+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\right)=\frac{3}{8}\pi$$

(što je poznati točni rezultat!)

Gaussova kvadratura može se uspješno primijeniti ako je funkcija analitička ili je dovoljno gusto tabelirana. U ostalim slučajevima je bolje upotrijebiti ne tako točne, ali zato mnogo jednostavnije Newton-Cotesove formule.

Metoda ekstrapolacije. Linearnost formula srednje vrijednosti omogućuje da se dobije poboljšane vrijednosti integrala pomoću linearne kombinacije.

Neka je $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=J_0^l[f]+R_0^l[f]$ linearna formula integracije reda $(n-1)$, tj. $R_0^l[x^k]=0$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, ali je $R_0^l[x^n]\neq 0$. Tada je

$$\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x=pJ_0^l[f]+q\,(J_0^{l/2}[f])+J_{l/2}^l[f]+\hat{R}[f]$$

formula reda n (tj. $\hat{R}[x^n]=0$), gdje je uvršteno $p=-\dfrac{1}{2^n-1}$ i $q=\dfrac{2^n}{2^n-1}$.

Ideja dokaza je za mnoge metode ekstrapolacije toliko važna da je opravdano njeno uvođenje.

Neka je $R_0^l[x^n]=c\cdot l^{n+1}$, gdje je c konstanta koja ne ovisi o duljini l intervala integriranja. Tada je očito $\hat{R}[x^n]=pcl^{n+1}+q\cdot 2c\,(l/2)^{n+1}=$ $=cl^{n+1}(p+q/2^n)$. Izraz u zagradi jednak je nuli, što slijedi iz izbora p i q.

U praktičkoj se primjeni općenito ne koristimo formulama, nego operatorima s brojevnim vrijednostima prema navedenoj shemi:

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	...
T_{00}				
$\downarrow$	$\nearrow T_{11}$			
T_{10}		$\nearrow T_{22}$		
$\downarrow$	$\nearrow T_{21}$		$\nearrow T_{33}$	...
T_{20}		$\nearrow T_{32}$		
$\downarrow$	$\nearrow T_{31}$		T_{43}	...
T_{30}	$\vdots$	T_{42}	$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$		

Jednostavniji slučaj dobijemo za $n=1$ iz trapezne formule:

$$T_{i0}=\frac{h_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{i}(2f(a+jh_i)+f(a)+f(b)\right),$$

$$h_i=(b-a)/2^i \qquad (i=0, 1, \ldots),$$

prema tome je

$$T_{00}=\frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)),$$

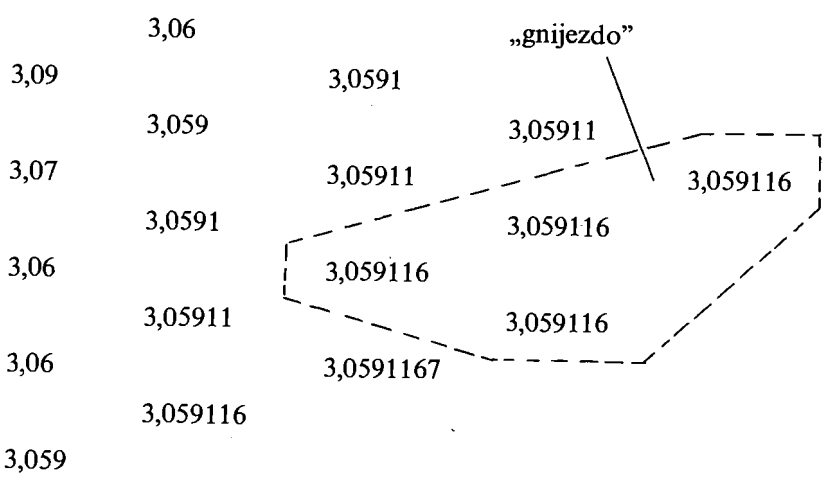
$$T_{10}=\frac{(b-a)}{4}(b(a)+2f(a+(b-a)/2)+f(b))$$

itd. U skladu s time možemo po potrebi izračunati vrijednosti T_{ik}, $k>0$, u redosljedu koji je na skici označen strelicama:

$$T_{ik}=\frac{2^{2k}T_{i,\,k-1}-T_{i-1,\,k-1}}{2^{2k}-1} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Može se pokazati da i stupci i kosi reci konvergiraju prema vrijednosti integrala. Ova je shema pogodna za programiranje. Kako se pri ovoj metodi i pogreške uvećavaju povećanjem reda, možemo ići najviše do $k=7$ i to daje mogućnost da povećavamo i sve dok „gnijezdo" jednakih brojeva ne pokaže da je metoda dovela do rezultata koji je u granicama točnosti računanja.

Primjer 16. $\int_1^2 (e^x/x)\,dx=3{,}059116.$



8. PRIBLIŽNO DERIVIRANJE

Približno određivanje derivacija funkcije uvijek treba obaviti s naročitim oprezom, jer je poznato da je diferenciranje, za razliku od integriranja, uvijek popraćeno „rasklimavanjem". To znači da se kod derivacije kvari svojstvo glatkosti.

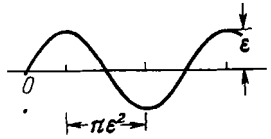
Primjer 17. $f(x)=\varepsilon\sin(x/\varepsilon^2)$. Za tu funkciju je $|f(x)\leqslant\varepsilon$, i $-1/\varepsilon\leqslant f'(x)\leqslant 1/\varepsilon$. Ako odaberemo ε veoma mali i pozitivan, onda se $f(x)$ mijenja unutar veoma uskog područja, dok derivacija prima veoma velike vrijednosti (slika 447).

Numeričko deriviranje. Polazimo od pretpostavke da je funkcija $f(x)$ zadana pomoću konačno mnogo parova vrijednosti (x_i, f_i). Tada tražimo približne vrijednosti f_i', f_i'', f_i''', ... veličina $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, $f'''(x_i)$, ...

Ako vrijednosti funkcije u točkama mreže x_i smatramo točnim u granicama točnosti računanja, onda se deriviraju interpolacijske formule (vidi „interpolacijski polinom", str. 931).

Za izvođenje odgovarajućih formula često se koristimo formalnom operatorskom metodom (vidi str. 931).

Uvedimo operator $Df_i=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}$.



Sl. 447.

Osnovna formula: $e^{hD}=E$,

$$(hl)=\ln E=\ln(I+1)=2\ln\left(\left(I+\frac{\delta^2}{4}\right)^{1/2}+\frac{\delta}{2}\right).$$

Primjer 18.

$$f''(x_i)=D^2f_i=\frac{1}{h^2}(\ln(1+\Delta))^2f_i=\frac{1}{h^2}\left(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\frac{1}{4}\Delta^4+-\ldots\right)^2f_i=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2-\Delta^3+\frac{11}{12}\Delta^4-\frac{5}{6}\Delta^5+-\ldots\right)f_i.$$

Za formulu numeričkog deriviranja primijenit ćemo parcijalnu sumu tog razvoja:

$$f_i''=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2f_i-\Delta^3f_i+\frac{11}{12}\Delta^4f_i\right).$$

Neke važnije formule diferenciranja *Tabica* 12

Formula ($y_j = y(jh)$, $y'_j \approx y'(jh) \ldots$)	Ocjena pogreške
$y'_0 = \frac{1}{2h}(-y_{-1} + y_1)$	$-\frac{1}{6}h^2 y''_0 - \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{12h}(y_{-8} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_{+2})$	$+\frac{1}{30}h^4 y^{(5)}_0 + \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{h}(-y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{2}hy''_0 - \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$	$+\frac{1}{3}h^2 y''_0 + \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{12h}(-3y_{-1} - 10y_0 + 18y_1 - 6y_2 + y_3)$	$-\frac{1}{20}h^4 f^{(5)}_0 + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{h^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{12}h^2 y^{(4)}_0 + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(-y_{-2} + 16y_{-1} - 30y_0 + 16y_1 - y_2)$	$+\frac{1}{90}h^4 y^{(6)}_0 + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$	$+\frac{11}{12}h^2 y^{(4)}_0 + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(11y_{-1} - 20y_0 + 6y_1 + 4y_2 - y_3)$	$+\frac{1}{12}h^3 y^{(5)}_0 + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{180h^2}(-13y_{-2} + 228y_{-1} - 420y_0 + 200y_1 + 15y_2 - 12y_3 + 24y_4)$	$-\frac{1}{90}h^5 y^{(7)}_0 + \ldots$
$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(-y_{-2} + 2y_{-1} - 2y_1 + y_2)$	$-\frac{1}{4}h^2 y^{(5)}_0 + \ldots$
$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(-3y_{-1} + 10y_0 - 12y_1 + 6y_2 - y_3)$	$+\frac{1}{4}h^2 y^{(5)}_0 + \ldots$

Ako su vrijednosti funkcije dobivene kao rezultati mjerenja, a treba ispitati ponašanje derivacije, onda je neophodno numeričko zaglađivanje i nakon toga diferenciranje (vidi I.E. str. 974)!

9. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetima. Postoji mnoštvo posebnih diferencijalnih jednadžbi kojima se rješenje može naći u konačnom obliku. Međutim, mnoge se diferencijalne jednadžbe mogu samo numerički riješiti. Jedna od najjednostavnijih metoda je *Eulerova metoda izlomljene linije.* Ona se grafički lako realizira.

Primjer 19. $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = s.$

Diskretizacija (slika 448): $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

$y'(a) = f(a, s) = \operatorname{tg} \varphi_0,$

$y_1 = s + hy'(a) = s + hf(x_0, y(x_0)),$

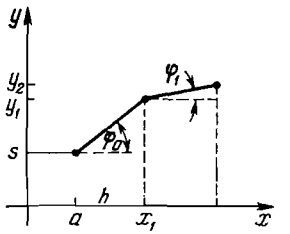
$y'_1 = f(x_1, y_1) = \operatorname{tg}\varphi_1,$

$y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + hf(x_1, y_1),$

. . . . . .

$y'_i = f(x_i, y_i) = \operatorname{tg} \varphi_i,$

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1).$



Slika 448

Primjer 20. $y' = xy^{1/3},\ y(1) = 1.$

Točno rješenje: $y(x) = ((x^2+2)/3)^{3/2}.$

Tablica 13

Rezultati dobiveni Eulerovom metodom

x_i	$h = 0{,}10$	$h = 0{,}01$	Točno
1	1,00	1,00	1,00
2	2,72	2,82	2,83
3	6,71	6,99	7,02
4	14,08	14,63	14,70
5	25,96	26,89	27,00

Opći pojmovi. *Lokalnom pogreškom prekida* nazivamo pogrešku do koje dolazi pri prijelazu od x_j na x_{j+1}, ako se diferencijalna jednadžba zamijeni konačnim izrazom.

Za točno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \cdot f(x_j, y(x_j)) + \frac{1}{2} y''(\xi) h^2,$$

konačna aproksimacija Eulerovom metodom $y_{i+1} = y_1 + hf(x_j, y_j)$, daje lokalnu pogrešku prekida

$$E_j = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_j), \quad x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}.$$

Pogrešku $y(x_j) - y_j$ nazivamo *pogreškom prekida.* Ona je izazvana složenom akumulacijom lokalnih pogrešaka prekida za neki fiksirani j (Ona je u smislu I.A. na str. 906 pogreška metode $\delta_M(x_j)$.).

Pogreškom zaokruživanja nazivamo udio pogreške nastale pri faktičnom provođenju računanja, a također i rastućom neuklonjivom pogreškom nastalom tim zaokruživanjima.

Metoda s jednim korakom. Ako u formuli Eulerove izlomljene linije $f(x_j, y_j)$ zamijenimo općenitijim izrazom $\hat{f}(x_j, y_j)$, dobit ćemo opću formulu metode s jednim korakom:

$$y_{j+1} = y_j + h\hat{f}(x_j, y_j), \quad y_0 = s \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Umjesto diferencijalne jednadžbe rješavamo nelinearnu *diferencijsku jednadžbu.*

Navodimo važne metode s jednim korakom.

Metode tipa Runge-Kutta. Ovdje se $\hat{f}(x_j, y_j)$ konstruira kao ponderirana srednja vrijednost funkcije $f(x, y)$ u odgovarajućim točkama $x = \xi_k$, $y = \eta_k$ tako da je lokalna pogreška prekida veličine reda višeg od h.

Poznavanje reda lokalne pogreške nema praktičkog značenja za procjenu stvarne pogreške prekida ili zaokruživanja. Opće ocjene pogrešaka drugih tipova su većinom također suviše grube. Stoga se ta procjena pogrešaka, za upravljanje hodom računanja ili u danom slučaju za upravljanje veličinom koraka (pod time razumijevamo, često veoma korisnu, izmjenu veličine koraka h u ovisnosti o postignutoj točnosti) sada mnogo primjenjuje *Rungeova metoda.*

Neka je red pogreške metode jednak k. Približnu vrijednost $y(x)$, izračunatu u točki x s korakom duljine l, označimo sa $Y(x, l)$. U točki $x = x_0 + 2n \cdot h$ tada imamo

$$y(x) - Y(x, h) \approx A \cdot 2nh^{k+1} = A(x - x_0) h^k,$$

$$y(x) - Y(x, 2h) \approx A \cdot n(2h)^{k+1} = A(x - x_0) 2^k h^k,$$

Tablica 14

Formule tipa Runge-Kutta

Red pogreške prekida	Formula	Pomoćne veličine	Naziv
h^3	$\hat{f} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$ $k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$	Poboljšana izlomljena crta
	$\hat{f} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$	k_1 — kao što je prije navedeno	
h^4	$\hat{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$	k_1 — kao što je prije navedeno $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$, $k_3 = f(x_i + h,$ $y_i + 2hk_2 - hk_1)$	Heuneova formula
	$\hat{f} = \frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_3$	k_1 — kao što je prije navedeno $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} k_2\right)$	
h^5	$\hat{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	k_1 — kao što je prije navedeno $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$, $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$	Runge-Kuttova formula

tj.

$$Y(x, 2h)-Y(x, h)\approx A(x-x_0)(1-2^k)h^k,$$

i prema tome

$$y(x)-Y(x, h)\approx\frac{Y(x, h)-Y(x, 2h)}{2^k-1}.$$

Time pogreška na koraku h približno ovisi o približnim vrijednostima na koracima h i $2h$.

Izračunavanje uzastopnih vrijednosti y_{j+1} metode s jednim korakom upotrebljavaju samo informaciju iz intervala $[y_j, y_{j+1}]$ i stoga se primjenjuje uvijek kada se računaju prve vrijednosti (početna procedura) ili ako se malo zna o svojstvima neprekinutosti rješenja. Ako su krivulje rješenja dovoljno glatke i poznate su neke početne vrijednosti, onda se točnost aproksimacije rješenja može uvećati zahvaljujući proračunu $k>1$ *prethodnih vrijednosti.*

Metode s više koraka zasnivaju se na zamjeni diferencijalne jednadžbe $y'(x)-f(x, y(x))=0$, $y(a)=s$ pri konstantnom koraku h *diferencijskom jednadžbom k-tog reda*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j^{(k)} y_{n+j}-h\sum_{j=0}^{k} b_j^{(k)} f(x_{n+j}, y_{n+j})=0,$$

$$a_k^{(k)}\neq 0,\ (a_0^k)^2+(b_0^{(k)})^2\neq 0, \qquad n=0, 1, 2, \ldots, y_0=s, y_1, \ldots, y_{k-1}$$

zadane vrijednosti (potrebna je početna procedura!).

Svaki postupak ovog oblika jednoznačno je određen s dva polinoma:

$$\varrho_k(z)=a_k^{(k)}z^k+a_{k-1}^{(k)}z^{k-1}+\ldots+a_0^{(k)},\ \sigma_k(z)=b_k^{(k)}z^k+b_{k-1}^{(k)}z^{k-1}+\ldots+b_0^{(k)},$$

i zato govorimo o (ϱ, σ)-metodi (vidi tablicu 15). Ako je stupanj od σ_k manji od stupnja ϱ_k, onda govorimo o *izravnoj* (ili *otkrivenoj* ili *eksplicitnoj*) metodi, a kada je stupanj od σ_k jednak od ϱ_k, govorimo o *neizravnoj* (*pokrivenoj* ili *implicitnoj*) metodi.

Napomena. Često se formule zapisuju pomoću diferencija. Prebrojavanje je lako ako se upotrijebe operatorne formule (usporedi str. 931, „Interpolacijski polinom").

$$y_{n+j}=E^j y_n, \quad E^j=\sum_{i=0}^{j} C_j^r \Delta^r, \quad \Delta^r=\Delta(\Delta^{r-1}).$$

Pomoću izravnih formula lako se dobije $(n+k)$-ta vrijednost od k prethodnih vrijednosti $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \ldots, y_n$.

Neizravne formule sadrže vrijednost y_{n+k} koju treba izračunati, u linearnom i nelinearnom dijelu formule, tj.

$$a_k^{(k)}y_{n+k}=F(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n; h).$$

Tablica 15

Važnije (ϱ, σ)*-metode*

$\varrho(z)=$	$\sigma(z)=$	Određivanje koeficijenata
Adams ($k=1, 2, \ldots$), izravna metoda		
z^k-z^{k-1}	$z^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} c_j\left(1-\frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j=-\frac{t}{(1-t)\ln(1-t)}$
posebni slučaj $k=1$: Eulerova izlomljena linija		
Adams-Moulton ($k=1, 2, \ldots$), neizravna metoda		
z^k-z^{k-1}	$z^k\sum_{j=0}^{k} d_j\left(1-\frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{i=0}^{\infty} d_j t^j=-\frac{t}{\ln(1-t)}$
posebni slučaj $k=1$: $\sigma(z)=\frac{1}{2}(1+z)$ — trapezno pravilo		
Nyström ($k=2, 3, \ldots$) izravna metoda		
z^k-z^{k-2}	$z^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} f_j\left(1-\frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j=-\frac{t(2-t)}{(1-t)\ln(1-t)}$
posebni slučaj $k=2$: $\sigma(z)=2z$ — pravilo srednje točke		
Henrici-Milne ($k=2, 3, \ldots$), neizravna metoda		
z^k-z^{k-2}	$z^k\sum_{j=0}^{k} g_j\left(1-\frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j=-\frac{t(2-t)}{\ln(1-t)}$
posebni slučaj $k=2$: $\sigma(z)=\frac{1}{3}(z^2+4z+1)$ — Henrici-Milneova metoda		

Često se y_{n+k} odredi pomoću iteracijskog procesa

$$y_{n+k}=\lim_{j\to\infty} y_{n+k}^{(j)},$$

$$y_{n+k}^{(j)}=\frac{1}{a_k^{(k)}}F(y_{n+k}^{(j-1)}, y_{n+k-1},\ldots, y_n; h),$$

$y_{n+k}^{(0)}$ zadaju se kao početne aproksimacije, $j=1, 2,\ldots$

Dvije formule, koje daju pogreške istog reda, moguće je također povezati u jednu metodu, u tako zvanu *metodu „predskazivanja — utočnjavanja"*, i to tako da se pomoću *izravne formule „predskazivanja"* izračuna aproksimacija i ona uvrsti u desnu stranu neizravne formule „utočnjavanja", pa ona daje točniju vrijednost.

Primjer 21.

Adams–Bashforth: $k=4$:

$$y_{n+k}=y_{n+k-1}+\frac{h}{24}(55f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1})-59f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2})+$$
$$+37f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3})-9f(x_{n+k-4}, y_{n+k-4})).$$

Adams–Moulton: $k=3$

$$y_{n+k}=y_{n+k-1}+\frac{h}{24}(9f(x_{n+k}, y_{n+k})+19f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1})-$$
$$-5f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2})+f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3})).$$

Obje formule daju pogreške istog reda.

Konvergencija. Za približnu metodu kažemo da je *konvergentna reda* $p>0$, ako za sve $x_n\in[a, b]$ vrijedi

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^p}|y_n-y(x_n)|=k<\infty.$$

Metoda s jednim korakom je konvergentna onda i samo onda ako:

(a) $\hat{f}(x, y, h)$ za $x_0\leqslant x\leqslant x_N$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant h\leqslant h_0$, je funkcija triju varijabli i ona je neprekinuta;

(b) $\hat{f}(x, y, 0)=f(x, y)$ za $x_0\leqslant x\leqslant x_N$, $-\infty<y<\infty$;

(c) $|\hat{f}(x, y, h)-\hat{f}(x, z, h)|\leqslant L|y-z|$ za $x_0\leqslant x\leqslant x_n$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqslant h\leqslant h_0$.

Od ta tri uvjeta najznačajniji su uvjeti (a) i (b), jer je uvjet (c) za promatrane metode većinom automatski ispunjen, ako diferencijalna jednadžba ima jedinstveno rješenje.

(ϱ, σ)-*metoda konvergira* na $[a, b]$ *jednoliko*

$$\left(\lim_{h\to 0}\max_{x_n\in[a,\ b]}|y_n-y(x_n)|=0\right)$$

samo onda ako

(a) *konvergira primijenjena početna procedura*;

(b) svi korijeni polinoma $\varrho(z)$ leže unutar ili na rubu jediničnog kruga ($|z_i|\leqslant 1$), pri čemu su korijeni z_k, $|z_k|=1$, jednostruki (*uvjet za korijene*);

(c) vrijedi uvjet aproksimacije $\varrho(1)=0$ i $\varrho'(1)=\sigma(1)$.

Rubni problemi za obične diferencijalne jednadžbe. Ograničit ćemo se na linearne rubne probleme oblika

$$L[y]=\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,y^{(i)}(x)=r(x),$$

$$R_i[y]=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}y^{(j)}(a)+b_{ij}y^{(j)}(b))=c_i \qquad (i=1,\ldots, n),$$

$f_i(x)$, $r(x)$ su neprekinute funkcije na $[a, b]$ i vrijedi $f_n(x)\neq 0$.

Svako se rješenje može prikazati u obliku linearne kombinacije

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{i=1}^{n} d_i y_i(x),$$

pri čemu su funkcije $y_i(x)$ linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe $L[y]=0$ (*fundamentalni sistem*), a $y_0(x)$ je partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $L[y]=r$. Ako su te funkcije zadane, onda se koeficijenti d_i određuju iz ovog sistema linearnih jednadžbi

$$\sum_{j=1}^{n} d_j R_i[y_j]=c_i-R_i[y_0] \qquad (i=1, 2,\ldots, n);$$

na tome se zasniva često upotrebljavana *metoda svođenja na zadaću s početnim uvjetima.* Pomoću prikladnog izbora početnih vrijednosti A_{ij} iz $L[y_i]=0$ i $y_j^{(i)}(a)=A_{ij}$ ($i=1, 2,\ldots, n-1$; $j=1, 2,\ldots, n$) formira se fundamentalni sistem. Ako sistem rubnih (graničnih) uvjeta sadrži bar jedan *zaseban rubni uvjet* $R_i[y]=\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}y^{(j)}(a)=c_i$, onda se y_0 lako može dobiti kao rješenje zadaće s početnim uvjetima.

Primjer 22. Svođenje na zadaću s početnim uvjetima:

$$L[y]=y''+(1+x^2)\,y, \quad r(x)=-1;$$

rubni uvjeti: $y(-1)=y(1)=0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Stavimo da je $y(x)=y_1(x)+d\cdot y_2(x)$ gdje y_1 zadovoljava prvi rubni uvjet i nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$L[y_1]=-1, \qquad y_1(-1)=0, \qquad y_1'(-1)=0,$$
$$L[y_2]=0, \qquad y_2(-1)=0, \qquad y_2'(-1)=1.$$

Kako je $y(1)=y_1(1)+d\cdot y_2(1)=0$, to je $d=-y_1(1)/y_2(1)$.

Drugu važnu klasu metoda čine *heurističke metode.* Neka je M skup rješenja diferencijalne jednadžbe, koja su definirana na jednom te istom osnovnom području G, tj.

$$M=\{y(x);\ y\in G \text{ i } L[y]=r\},$$

i neka je

$$B=\{y(x);\ y\in G \text{ i } R_i[y]=c_i\}$$

skup funkcija koje zadovoljavaju rubne uvjete. Tada je skup rješenja L rubnog problema presjek tih dviju skupova: $L=M\cap N$.

Neka je $M_p\subset M$ skup svih funkcija iz M, koje su određene sa p parametara $C_1, C_2,\ldots, C_p$:

$$M_p=\{y;\ y\in M,\ y(x)=\Psi(x, C_1,\ldots, C_p)\},$$

i analogno

$$N_p=\{y;\ y\in N,\ y(x)=\Phi(x, C_1,\ldots, C_p)\};$$

tada za $y\in N_p$ vrijedi

$$L[y]=r+\varepsilon(x, C_1,\ldots, C_p)$$

a za $y\in M_p$

$$R_i[y]=c_i+\delta_i(x, C_1,\ldots, C_p).$$

Ako sada zahtijevamo da se za aproksimaciju rješenja rubnog problema uzme funkcija za koju je:

(1) vrijednost $\varepsilon(x, C_1,\ldots, C_p)$ po mogućnosti što manja, onda se govori o *metodi područja*;

(2) $\delta_i(x, C_1,\ldots, C_p)$ je u izvjesnom smislu minimalno na M_p, onda govorimo o rubnoj metodi.

Takve se metode mogu primjenjivati kako za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi tako i za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Za obične diferencijalne jednadžbe gotovo se uvijek upotrebljavaju metode područja.

Osobito je važan *linearni slučaj.*

Za parametarski skup N_p uzimamo pri tome skup svih linearnih kombinacija oblika $\Phi(x, C_1,\ldots, C_p)=w_0+\sum_{j=1}^{p} C_j w_j(x)$. Pri tome w_0 zadovoljava nehomogene rubne uvjete $R_i[w_0]=c_i$, dok istovremeno linearno nezavisne funkcije $w_j(x)$ zadovoljavaju homogene rubne uvjete $R_i[w_j]=0$.

Tablica 16

Važnije metode područja

Naziv	Zahtjev minimalnosti $\varepsilon(x; C_1, C_2,\ldots, C_p)$
Metoda kvadratne pogreške	
— neprekinuti	$\int_a^b \varepsilon^2\,dx\to\min$
— diskretni	$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2(x_i)\to\min;\quad x_1,\ldots, x_n\in[a, b],\quad n>p$
Metoda Galjerkina (metoda ortogonalizacije)	$\int_a^b \varepsilon\cdot v_j(x)\,dx=0$ za $j=1, 2,\ldots, p$, $[v_j(x)]_1^p$ je sistem linearno nezavisnih neprekinutih funkcija
Metoda parcijalnih područja	$t_1<t_2<\ldots<t_{p+1}\in[a, b]$, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(x, C_1,\ldots, C_p)\,dx=0$ za $i=1, 2,\ldots, p$
Metoda kolokacija	$t_1<t_2<\ldots<t_p\in[a, b]$ (točke kolokacije) $\varepsilon(t_i, C_1, C_2,\ldots, C_p)=0$ za $i=1, 2,\ldots, p$

Diferencijske metode rješavanja rubnih problema za Poissonovu jednadžbu (u ravnini). Izlaganje teorije i praktičkih primjena različitih metoda rješavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u okvirima ovog priručnika je nemoguće. Stoga se problemi i osnovne ideje razmatraju na čitavom nizu konkretnih primjera.

Zadaća. Neka je Ω područje u ravnini x, y s rubom Γ. Traži se funkcija $u(x, y)$ koja u Ω zadovoljava Poissonovu jednadžbu

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = g(x, y).$$

Važniji rubni problemi:

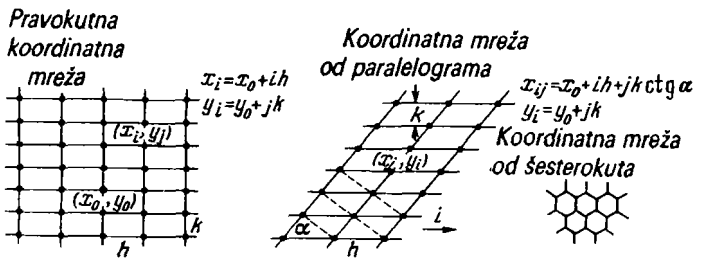
1) $u(x, y)|_{(x,\ y)\in\Gamma} = \varphi(x, y)$ je prvi rubni problem; Dirichletov problem.

2) $\left.\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{(x,\ y)\in\Gamma} = \psi(x, y)$ je drugi rubni problem; Neumanov problem.

3) $a u(x, y) + b \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \chi(x, y)$ je treći rubni problem za (x, y) na Γ.

Diferencijske metode. Ne promatra se kontinuum točaka u ravnini x, y već prebrojiv skup diskretnih točaka $P_{ij} = (x_i, y_i)$ (*točke mreže*), koje tvore mrežu točaka kao diskretni analogon ravnine.

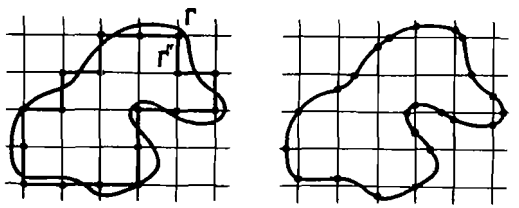
Oblik mreže vidi na slici 449.



Sl. 449

Diskretizacja zadaće.

(1) *Područje.* Ako imamo područje Ω, onda će neke točke mreže biti unutar tog područja, a neke izvan. Diskretno „područje" Ω^*, dobit



Sl. 450

ćemo ako izaberemo one točke mreže koje su najbliže rubu i to ili unutar ili izvan područja (to ovisi o samoj zadaći!) i uzmemo ih kao „rubne točke" novoga diskretnog područja. Tada se diskretno poručje Ω^* sastoji samo od točaka mreže (slika 450a). Druga se mogućnost sastoji u tome da se dobiju točke presjeka Γ s pravcima mreže kao neregularne rubne točke (slika 450b).

(2) *Jednadžba.* Derivacije koje se javljaju u promatranoj diferencijalnoj jednadžbi zamjenjujemo u svakoj točki $P_{ij} = (x_i, y_j)$ mreže sa odgovarajućim *omjerom diferencija*, pri čemu se može ocijeniti lokalna pogreška prekida (vidi str. 949). Tako je primjerice

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,\ j} = \frac{1}{2h}(-u_{i-1,\ j} + u_{i+1,\ j}) + O(h^2).$$

Takve konačne izraze nazivamo još i *molekulama.* Pišemo ih u obliku zornih strukturnih formula.

Molekule od pet točaka za Laplaceov operator

$$\Delta u|_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array}\right] + O(h^2),$$

$$\Delta u|_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & -4 & \\ 1 & & 1 \end{array}\right] + O(h^2)$$

(kvadratna mreža)

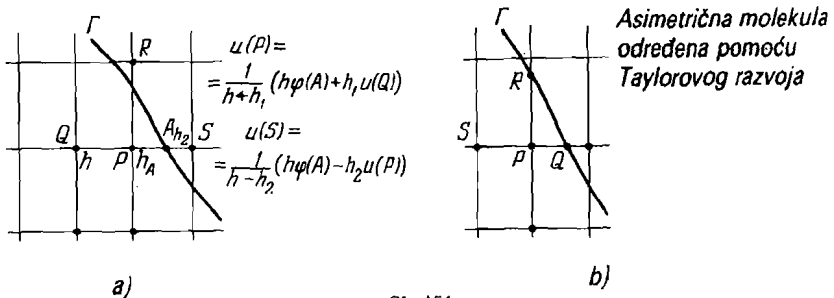
(3) *Rubni uvjeti.* Ako je područje Ω takvo da se u dovoljno jednostavnoj rešeci pri odgovarajuće odabranom položaju rub Γ sastoji samo od pravaca mreže, onda su rubne vrijednosti zadane u rubnim točkama mreže i ulaze u odgovarajuće molekule, dakako ako one uključuju takve točke.

Primjer 23. Pravokutnici u pravokutnoj ili kvadratnoj mreži.

Dirichletov problem. Prema tome, sadrži li područje Ω^* samo *regularne* ili također i *neregularne* točke mreže, postoje dva puta za preradu zadanih rubnih podataka:

(a) Određivanje „rubnih vrijednosti" u regularnim točkama pomoću interpolacije iz zadanih vrijednosti na rubu Γ. Tada imamo prije spomenuti jednostavan slučaj (slika 451a).

(b) Neposredno uključivanje zadanih rubnih vrijednosti u neregularnim točkama i primjena *asimetričnih molekula* u blizini ruba (slika 451b).



Sl. 451

Primjer 24. Poissonova jednadžba u pravokutniku

$$\Omega=\{(x, y);\ 0\leqslant x\leqslant 4h;\ 0\leqslant y\leqslant 3h\}.$$

Mreža: $(x_i; y_j)=(ih, jh)$,

$\Omega^*=\{(ih; jh);\ 0\leqslant i\leqslant 4,\ 0\leqslant j\leqslant 3\}$ regularna grana.

$\Delta u(x, y)=f(x, y),\ u|_\Gamma=\varphi$ (prvi rubni problem).

Primijenimo li prvu od navedenih molekula za Δ, dobit ćemo

$$U_{i-1,j}+U_{i+1,j}+U_{i,j-1}+U_{i,j+1}-4U_{ij}=h^2f_{ij}$$

kao *diskretni analogon Poissonove jednadžbe.*

(Sa U_{ij} je ovdje označena aproksimacija od $u(x_i, y_j)=u_{ij}$.) Ako ispišemo sve jednadžbe za koje je „centralni element" u_{ij} *unutarnja točka* (tj. $1\leqslant i\leqslant 3$, $1\leqslant j\leqslant 2$), onda ćemo dobiti

$$\begin{aligned}
&U_{01}+U_{21}+U_{10}+U_{12}-4U_{11}=h^2f_{11},\\
&U_{11}+U_{31}+U_{20}+U_{22}-4U_{21}=h^2f_{21},\\
&U_{21}+U_{41}+U_{30}+U_{32}-4U_{31}=h^2f_{31},\\
&U_{02}+U_{22}+U_{11}+U_{13}-4U_{12}=h^2f_{12},\\
&U_{12}+U_{32}+U_{21}+U_{23}-4U_{22}=h^2f_{22},\\
&U_{22}+U_{42}+U_{31}+U_{33}-4U_{32}=h^2f_{32},
\end{aligned}$$

Potcrtane vrijednosti su zadane rubne vrijednosti i mogu se prenijeti na desnu stranu tih jednakosti. Tada za *diskretni analogon postavljenog problema* dobijemo slijedeći sistem linearnih jednadžbi:

$$\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_{11}\\U_{21}\\U_{31}\\U_{12}\\U_{22}\\U_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h^2f_{11}-U_{01}-U_{10}\\h^2f_{21}-U_{20}\\h^2f_{31}-U_{41}-U_{30}\\h^2f_{12}-U_{02}-U_{13}\\h^2f_{22}-U_{23}\\h^2f_{32}-U_{42}-U_{33}\end{pmatrix}.$$

U matrici tog sistema demonstrirana su sva karakteristična obilježja matrica dobivenih primjenom diferencijalnih metoda:

- radi se o veoma velikim matricama.
- matrice su simetrične i imaju blokovnu strukturu.
- matrice su razrijeđene, tj. imaju mnogo nula.

Za rješavanje sistema linearnih jednadžbi s takvim matricama obično primjenjujemo iteracijske metode, iako je u posljednje vrijeme razrađen čitav niz direktnih metoda s primjenom blokovne strukture. Te su metode često pogodne za računanje, ali im je nedostatak nedovoljna univerzalnost.

Treba pripaziti da niz kojim prolaze točke mreže pri provedbi iteracije mijenja matricu jednadžbi i odlučujuće utječe na uvjete i konvergenciju iteracijskog procesa.

C. REALIZACIJA NUMERIČKIH MODELA U ELEKTRONIČKIM RAČUNALIMA

Svaka numerička metoda još nije programirljiv *algoritam* sastavljen od *pojedinih operacija koje treba obaviti u točno određenom redoslijedu.* Takav algoritam mora imati *jednoznačno određen početak* i mora biti *dostiziv sa konačno mnogo koraka,* da bi ga se u principu moglo obaviti na računskom stroju.

10. KRITERIJI ZA IZBOR METODE

Za rješavanje postavljenih problema postoji u pravilu čitav niz metoda.

Izbor *određene metode za numeričko rješavanje* postavljenog problema i njeno pretvaranje u programirljiv algoritam uvijek predstavlja

pokušaj optimizacije; pri tome su poznata polazna (izvorna) stanja V_i i dodatno postavljeni zahtjevi F_i koji su zapravo dodatni uvjeti, a najvažniji su slijedeći:

Izvorna informacija:

V_1 je postavljanje problema i opće pretpostavke o njegovu rješenju.

V_2 je dodatna informacija o izvornim podacima (na primjer numeričko područje, specijalni tip matrice, oblik numeričkog materijala i drugo).

V_3 je opća organizacija stroja (na primjer kapacitet memorije, vrijeme pristupa (čitanja), aritmetički sklop, standardne funkcije, programski jezik i drugo).

V_4 je prikaz brojeva, aritmetika, zaokruživanje, točnost specijalnih operacija i slično.

. . . . . .

Zahtjevi:

F_1 je specijalni zahtjev na izlazni podatak (*izlaz*) (na primjer cjelobrojna rješenja, zahtjev točnosti, dobivanje određenih međurezultata, ispisivanje i drugo).

F_2 je stupanj univerzalnosti (treba li rješavati pojednačan problem ili je neophodan univerzalni matematički program s obzirom na dopustiv skup ulaznih podataka).

F_3 je cijena (vrijeme rada) — minimizacija.

F_4 su ograničenja memorije.

. . . . . .

Ovi uvjeti djelomično međusobno proturječe tako da se dobije određeni optimum. U tu se svrhu primjenjuju neka *empirijska pravila.*

— Osnovni princip izbora metode je princip neposrednog rješavanja: znači da, po mogućnosti, treba odabrati metodu koja rješava upravo *postavljeni problem*, a ne vodi zaobilazno do rješenja, rješavajući neke potprobleme. Klasičan primjer: svojstvene vrijednosti se ne izračunavaju kao korijeni karakterističnog polinoma (vidi 2. na str. 916).

— „Matematički elegantna" rješenja često su nepogodna za numeričko računanje u odnosu na stabilnost metode i rasta pogreške.

— Teoretska konvergencija nije pri numeričkom računanju garancija konvergencije. S druge pak strane teoretski divergentne metode mogu biti pogodne u numeričkom smislu.

— Dodatna informacija o ulazu (unosu), međurezultatima ili izlazu mora se moći u potpunosti koristiti i mora pridonositi smanjenju pogreške (na primjer simetrija, red veličine, predznaci, nule itd.).

Važni uzroci prekomjernog nagomilavanja pogrešaka su česte upotrebe diferencija (to dovodi do gubitka značajnih znamenaka) i dijeljenje s brojevima kojima se ne zna red veličine (to dovodi do prekoračenja brojnog kapaciteta mrežice); a to treba izbjegavati pomoću umjetne organizacije programa.

11. METODA UPRAVLJANJA

Svaki praktički upotrebljiv algoritam ne određuje unaprijed i jednoznačno niz operacija koje treba obaviti za bilo koji skup ulaznih podataka. Hod procesa se faktički određuje parametrima upravljanja X_n, a njegove se vrijednosti računaju u toku realizacije. Parametrima upravljanja pripadaju i međurezultati, te neke specijalne veličine (primjerice: norme vektora ili matrice, redovi veličina, broj koraka, adresa ćelije memorije, kapacitet memorije i slično).

Rezultat analize veličina X_n i upravljanja procesom.

Tablica 17

Tablica važnijih pitanja za provjeru pri analizi X_n

Pitanja za provjeru	Napomena
$X_n < a$? (a je zadani broj)	Potrebna je a priori procjena za određivanje broja a. Ako je $a = \varepsilon$ pri upravljanju prekidom iteracije, onda se ε ne može odabrati proizvoljno malo; u protivnom pogreška zaokruživanja može dati drugi oblik prekidu ili mu može zasmetati.
$\|X_n - X_{n-1}\| < \varepsilon$?	Oprez! Pri formiranju razlike postoji mogućnost gubitka na točnosti.
$X_n = a$?	Provjeru treba primjenjivati samo pri cjelobrojnim izračunavanjima!
$X_n < A_n$? (A_n je izračunjiva konstanta)	A_n se određuje a posteriori.
$X_n < X_{n-1}$?	Primjenjuje se za provjeru teorijske monotonosti parametra.
Vrijeme računanja $> T$ (T je zadano).	Osigurava zaustavljanje, ako se ne prođe kroz potpuni ciklički proces (na primjer, ako iteracija ne konvergira).

12. IZRAČUNAVANJE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

Aritmetički sklop računala u pravilu može izvršavati samo četiri osnovne računske operacije, a u posebnim slučajevima također i posve određene specijalne operacije, kao na primjer, izračunavanje skalarnog produkta ili drugog korijena. Vrijednosti elementarnih funkcija, maksimum ili minimum od n brojeva itd. određuju se pomoću univerzalnih potprograma (standardne funkcije).

Glavne metode izračunavanja vrijednosti funkcija.

(1) Polinom — Hornerova shema. Polinom

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

s realnim koeficijentima karakterizira se na elektroničkom računalu vektorom $(a_0, a_1,\ldots, a_n; n)$. *Potpuna Hornerova shema* sadrži sve operacije koje su bitne za određivanje vrijednosti polinoma za zadani argument $x=x_0$:

$$\begin{array}{lccccc}
 & a_n^{(0)} & a_{n-1}^{(0)} & a_{n-2}^{(0)} & \ldots & a_1^{(0)} & a_0^{(0)} \\
 & - & x_0a_n^{(1)} & x_0a_{n-1}^{(1)} & \ldots & x_0a_2^{(1)} & x_0a_1^{(1)} \\
x=x_0 & a_n^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} & a_{n-2}^{(1)} & \ldots & a_1^{(1)} & \boxed{a_0^{(1)}} \\
 & - & x_0a_n^{(2)} & x_0a_{n-1}^{(2)} & \ldots & x_0a_2^{(2)} & \\
x=x_0 & a_n^{(2)} & a_{n-1}^{(2)} & a_{n-2}^{(2)} & \ldots & \boxed{a_1^{(2)}} & \\
 & - & x_0a_n^{(3)} & \ldots & & & \\
x=x_0 & a_n^{(3)} & \ldots & & & & \\
 & \ldots & & & & & \\
x=x_0 & \boxed{a_n^{(n+1)}} & & & & &
\end{array}$$

Opće pravilo: $a_k^{(j)}=a_k^{(j-1)}+x_0a_{k+1}^{(j)}$

$j=1, 2,\ldots, n+1;\qquad k=n, n-1,\ldots, j-1;$

$a_{n+1}^{(j)}=0,\qquad j=1, 2,\ldots, n+1;$

$a_k^{(0)}=a_k,\qquad k=n, n-1,\ldots, 0.$

Primjer 25 $x_0=-1.$

$$P(x)=2x^4+x^3-x+1.$$

$$\begin{array}{lccccc}
 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
 & - & -2 & 1 & -1 & 2 \\
x=-1 & 2 & -1 & 1 & -2 & \boxed{3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc}
 & - & -2 & 3 & -4 & \\
x=-1 & 2 & -3 & 4 & \boxed{-6} & \\
 & - & -2 & 5 & & \\
x=-1 & 2 & -5 & \boxed{9} & & \\
 & - & -2 & & & \\
x=-1 & 2 & \boxed{-7} & & & \\
 & - & & & & \\
x=-1 & \boxed{2} & & & &
\end{array}$$

Posebni slučajevi:

(a) *Izlučivanje linearnog faktora:*

$$P_n(x):\ (x-x_0)=a_n^{(1)}x^{n-1}+a_{n-1}^{(1)}x^{n-2}+\ldots+a_1^{(1)}+\frac{a_0^1}{x-x_0}.$$

Primjer 26.

$$(2x^4+x^3-x+1):\ (x+1)=2x^3-x^2+x-2+\frac{3}{x+1}.$$

(b) *Vrijednost funkcije u točki* $x=x_0$:

$$P_n(x)=a_0^{(1)};\ 2(-1)^4+(-1)^3-(-1)+1=3.$$

(c) *Vrijednosti derivacija u točki* $x=x_0$:

$$\begin{aligned}
&P_n'(x_0)=a_1^{(2)},\\
&P_n''(x_0)=2!a_2^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(x)=n!a_n^{(n+1)}=n!a_n.
\end{aligned}$$

(d) *Razvoj u Taylorov red u točki* $x=x_0$:

$$P_n(x)=a_0^{(1)}+a_1^{(2)}(x-x_0)+\ldots+a_n^{(n+1)}(x-x_0)^n.$$

Primjer 27.

$$2x^4+x^3-x+1=3-6(x+1)+9(x+1)^2-7(x+1)^3+2(x+1)^4.$$

(2) *Razvoj u red.* Razvoji u red, kojima se prikazuju konstante ili funkcije, opće su poznate. Pitanje konvergencije redova ima s numeričkog aspekta drugostepeni značaj. Za razvoj u red kažemo da je

numerički upotrebljiv, ako je pogreška pri prekidu, za dovoljno mali broj članova toliko mala, da je numerički rezultat sa stajališta stroja točan (pri tome sam red može čak i divergirati!). Ovdje zahtijevana univerzalnost znači da u cijelom području definicije funkcije, njene vrijednosti moraju biti prikazane sa strojnom točnosti. To se postiže pomoću razvoja u pojedinim slučajevima.

Među *brzo knvergentne redove pripadaju* Taylorovi razvoji funkcija e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, i drugi:

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)!.$$

Ovaj red je alternirani i samim tim je pogreška prekida $R_n(x)$ reda veličine prvog odbačenog člana. Da bismo izračunali $y=\sin x$ za sve x s točnošću od osam znamenaka dovoljno je, radi periodičnosti i monotonosti funkcije u intervalu $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ procijeniti pogrešku prekida za $x=\frac{\pi}{2}$; $|R_{2j}(\pi/2)| \leqslant (\pi/2)^{2j+1}/(2j+1)!$. Kako je $(\pi/2)^{15}/15! < 8 \cdot 10^{-10}$, to odgovor glasi $j=7$.

Pažnja! Može se dogoditi da je prema teoremu o alterniranim redovima procjena pogreške netočna i to zato jer se pogreške zaokruženja ne ponašaju alternativno!

Ubrzavanje konvergencije (primjeri).

(1) *Eulerova transformacija.* Primjenom operatorske formule (vidi str. 931).

$$(1+E)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Delta^i/2^{i+1},$$

dobijemo

$$y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + \ldots = \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{4} \Delta y_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 y_0 - + \ldots$$

Na primjer, iz $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots$ slijedi da je $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ Taj red veoma sporo konvergira (da se dobije točnost na 4 znamenke treba zbrojiti oko 10 000 članova, pri tome, praktički, pogreške zaokruživanja pokvare rezultat!). Primjenom prije navedene transformacije (nakon odvajanja vodećih članova) veoma se brzo dobije točan rezultat.

$$1 - 1/3 + 1/5 - \ldots - 1/19 = 0{,}76046$$

y_k		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1/21	0,04762				
		−414			
1/23	0,04348		66		
		−348		−14	
1/25	0,04000		52		2
		−296		−12	
1/27	0,03704		40		
		−256			
1/29	0,03448				

$$1/21 - 1/23 + 1/25 - 1/27 + 1/29 \ldots = 0{,}02381 + 0{,}00104 + 0{,}0008 + 0{,}00001 = 0{,}02494$$

$$\pi/4 = 0{,}76046 + 0{,}02494 = 0{,}7854.$$

(2) *Primjena specijalnih strojeva*

a) Adicijski teorem: $\pi/4 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

b) Specijalne transformacije: pomoću $(1+x)/(1-x) = p^2/(p^2-1)$ iz

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots$$

dobijemo

$$\ln p = \frac{1}{2} ln\,(p-1) + \frac{1}{2} ln\,(p+1) + \left[\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \ldots \right].$$

Ako je $p>2$ prost broj, onda je $(p+1)$ paran broj i $\ln p$ je zbroj logaritama cijelih brojeva manjih od p, i taj red brzo konvergira.

Primjer 28. $\ln 3 = \frac{3}{2} \ln 2 + (1/17 + 1/(3 \cdot 17^3) + \ldots)$.

(3) *Metoda separacije.* Odredimo rastav zadanog sporo konvergentnog reda pomoću ove sheme:

$$\begin{pmatrix} \textit{slabo konvergentni} \\ \textit{red} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{red s poznatim} \\ \textit{zbrojem} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{brzo konvergentni} \\ \textit{red} \end{pmatrix}$$

Primjer 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2+1)}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2+1)}.$$

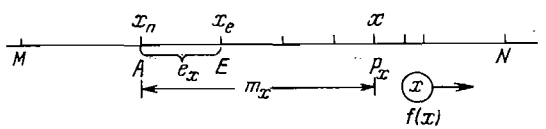
D. NOMOGRAFIJA

Posvuda gdje se fizikalno-tehnički parametri javljaju u raznim međusobnim vezama i zavisnostima, gdje iz brojevnih vrijednosti nekih veličina trebamo brzo odrediti jednu ili nekoliko drugih veličina, bez pretjeranih zahtjeva za točnost, primjenjujemo nomografska pomoćna sredstva u koja možemo ubrojiti i, prije pojave elektroničkih računala, mnogo upotrebljavano logaritamsko računalo (vidi o logaritamskom računu na str. 156).

13. VEZA IZMEĐU DVIJE VARIJABLE; FUNKCIJSKE SKALE

Neka je dužini $\overline{MN}$ zadana neka *početna točka* A iz koje se duž $\overline{MN}$ u određenom smjeru nanosi jedinična duljina $\overline{AE}=e$. Neka je $y=f(x)$ monotona funkcija za $a\leqslant x\leqslant b$. Ako iz točke A nanosimo orijentiranu dužinu $m_x=e\cdot f(x)$ kojoj je kraj u točki P_x (indeks nas mora podsjećati na oznaku nezavisne varijable), onda pomoću te funkcije dobijemo obostrano jednoznačno pridruženje između brojeva x i točaka P_x *nosioca skale* $\overline{MN}$.

Ako u točki P_{x_i}, za odgovarajuće odabrani niz ekvidistantnih argumenata $x=x_i+ih$ stavimo oznaku *argumenta* x_i, onda dobijemo *funkcionalnu skalu* (vidi sliku 452).

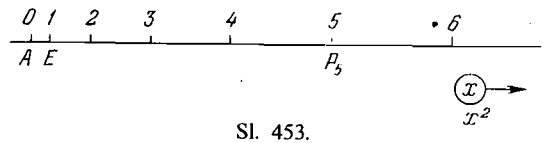


Sl. 452.

Po definiciji točkama A i E pripadaju vrijednosti argumenta x_n i x_e i za njih je $f(x_n)=0$, odnosno $f(x_e)=1$. Skalu možemo rastaviti

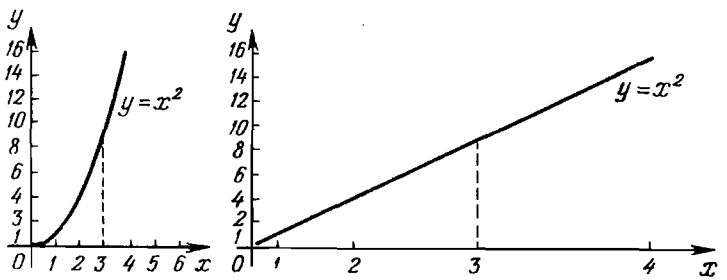
na dijelove tako da po potrebi imamo različite duljine koraka argumenta.

Primjer 30. $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 6$ (slika 453).



Sl. 453.

Ako na os x nanesemo funkcionalnu skalu, onda su grafovi krivulja u tako odabranom koordinatnom sustavu pravci (slika 454).



Sl. 454.

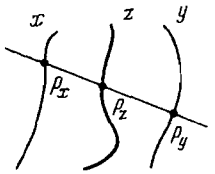
14. PRAVČASTI I MREŽNI DIJAGRAMI

Dvije su mogućnosti predočavanja funkcije $z=f(x, y)$ u ravnini nomografskom metodom bez pomoćnih tehničkih sredstava.

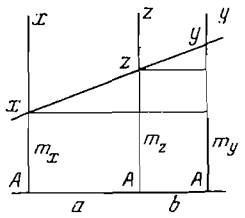
(1) *Nomogrami s kolinearnim točkama.* Točkama triju *krivulja nosača* pridružuju se tri varijable x, y, z. Za vrijednosti varijabli x, y, z reći ćemo da su korespondentne ako su njima odgovarajuće točke P_x, P_y, P_z *kolinearne*, tj. ako *leže na istome pravcu.*

Specijalnom razmještaju nosača, prema svemu do sada rečenom, odgovara funkcija $F(x, y, z)=0$, za koju kažemo da je predočena tim

nomogramom. Jednakost $F(x, y, z)$ nazivamo *ključnom jednadžbom* (slika 455).



Sl. 455



Sl. 456

Glavni oblici nomograma s kolinearnim točkama i s pravčastim nosačem:

a) $(m_z-m_x):a=(m_y-m_z):b$ (slika 456),

$$bm_x-bm_x=am_y-am_z, \qquad m_z=\frac{am_y+bm_x}{a+b},$$

$$e_z h(z)=\frac{a}{a+b}e_y g(y)+\frac{b}{a+b}e_x f(x),$$

$$\boxed{h(z)=\frac{a}{a+b}g(y)+\frac{b}{a+b}f(x).}$$

(Taj je nomogram, prema tome, praktički ekvivalentan s logaritamskim računalom.)

b) $m_x:m_z=m_y:m_x=(p\cdot e_z-m_z):m_z$ (slika 457).

$$\frac{p\cdot e_z-h(z)\cdot e_z}{e_z\cdot h(z)}=\frac{e_y\cdot g(y)}{e_x\cdot f(x)}, \qquad \frac{p}{h(z)}-1=\alpha\frac{g(y)}{f(x)},$$

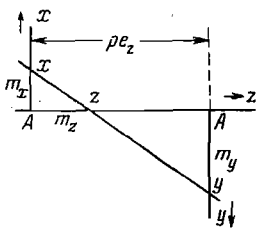
$$\boxed{h(z)=p\cdot\frac{f(x)}{f(x)+\alpha g(y)}.}$$

c) $\frac{1}{2}m_x\cdot m_y=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot m_x m_z+\frac{1}{2}\sin\beta\cdot m_y m_z$ (slika 458),

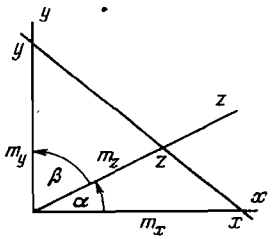
$$\frac{1}{m_z}=\frac{\sin\alpha}{m_y}+\frac{\sin\beta}{m_x},$$

$$\boxed{\frac{1}{h(z)}=c\frac{\sin\alpha}{g(y)}+d\frac{\sin\beta}{f(x)}.}$$

(2) *Mrežni nomogrami.* U ravnini pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava (u, v) uzmimo tri *porodice krivulja* i neka su *njihovi parametri* x, y, z. Ako je zadana ključna jednadžba $F(x, y, z)=0$, onda uzmimo tri vrijednosti x, y, z, koje zadovoljavaju tu jednadžbu i neka tim parametrima pridružene krivulje *prolaze istom točkom.* Tada kažemo da te tri porodice krivulja određuju nomogram za ključnu jednadžbu $F(x, y, z)=0$. Tako dobiveni nomogram nazivamo *mrežnim nomogramom.*



Sl. 457.



Sl. 458.

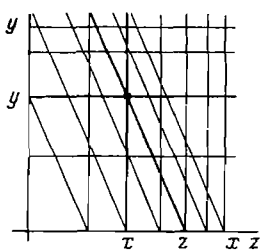
Primjeri nomograma u kojima su dvije porodice krivulja dva pramena paralelnih pravaca:

a) $m_y:m_z+m_x:m_z\operatorname{ctg}\alpha=1$ (slika 459),

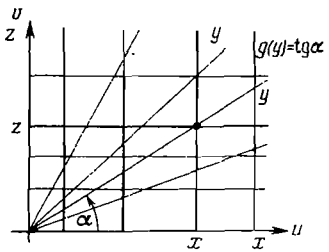
$$m_y+m_x\operatorname{tg}\alpha=m_z,$$

$$\boxed{h(z)=cg(y)+d\operatorname{tg}\alpha\cdot f(x).}$$

(Dakle, i taj je oblik nomograma ekvivalentan logaritamskom računalu).



Sl. 459.



Sl. 460.

b) $m_z:m_x=g(y)$ (slika 460),

$$\boxed{h(z)=f(x)\cdot g(y).}$$

E. OBRADA EMPIRIJSKOG NUMERIČKOG MATERIJALA

Primjer 31. Pri konstantnom naponu od 1 volt u ovisnosti o porastu otpora ΔR na $R_0 = 1\,\Omega$, izmjerena je jakost struje:

ΔR	0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
I	1	0,833	0,667	0,540	0,400	0,333	0,286	0,250	0,222

Kakav oblik ima po mogućnosti što jednostavnija funkcija $I = I(\Delta R)$, koja najbolje opisuje tu zavisnost?

Kako brojevi dobiveni mjerenjem uvijek sadrže slučajne pogreške, ne može se očekivati da interpolacijski polinom (vidi str. 931) rješava problem na zadovoljavajući način! Poželjno je, osim toga, da krivulja prolazi između točaka dobivenih mjerenjem, tako da neka izvjesna mjera otklona bude minimalna.

Posljednja zadaća je osnovna zadaća *izjednačavanja (zaglađivanja) rezultata mjerenja i izvoda empirijskih formula.*

Neka je zadan skup $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ funkcija $f(x; a_1, \ldots, a_n)$ i skup parova realnih brojeva $(x_i, y_i)_{i=1}^N$, $N > n$. Traži se funkcija $\hat{f}(x; \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) \in F$ takva da bude $\rho(\hat{f}(x_i) - y_i) \leqslant \rho(f(x_i) - y_i)$ za sve $f \in F$. Ovdje je ρ neka izvjesna mjera otklona $e_i = f(x_i) - y_i$ i tim samim ona opisuje *princip (kriterij) izjednačenja.*

Pozabavit ćemo se rješavanjem samo te zadaće. Razlog za primjenu ovog ili onog kriterija izjednačenja dan je u statistici (vidi str. 832).

15. METODA NAJMANJIH KVADRATA

Taj princip izjednačenja razradio je Gauss i veoma uspješno se primjenjivao pri uobičajenim i astronomskim mjerenjima. Kriterij izjednačenja ima oblik

$$Q_{\min}(f(x_i) - y_i) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Ako pogreške e_i imaju normalne razdiobe, onda se taj kriterij može interpretirati kao statistički princip maksimalne plauzibilnosti (vidi str. 829).

Radi jednostavnosti smatrat ćemo da parametri a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ulaze u f linearno, tj.

$$f(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x).$$

Tada je

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x_i) - y_i \right) \cdot f_j(x_i)$$

i nužan uvjet da ρ bude ekstremalno glasi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N} f_k(x_i) \cdot f_j(x_i) = \sum_{i=1}^{N} y_i f_i(x_i) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Primjenom Gaussove metode zapisi sumiranja $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = [f(x)]$ ove normalne jednadžbe dobivaju oblik

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [f_k(x) f_j(x)] = [y f_j(x)] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Poseban slučaj $f_k(x) = x^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vodi na *zaglađivajući polinom.* Normalne jednadžbe dobivaju oblik

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [x^{k+j-2}] = [y x^{j-1}] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Kada je to moguće u praksi se koristi minimalan broj parametara. U tu se svrhu na početku provjerava da li točke dobivene mjerenjem leže, na primjer, u blizini konstantne funkcije, pravca $y = ax + b$, parabole itd. pa se u skladu s tim koristi ova ili ona pretpostavka.

Izjednačenje neposrednih opažanja. Ako znademo da je pri mjerenjima veličine y_i riječ o vrijedostima teoretski konstantne veličine, ili ako to slijedi iz grafičke predodžbe, onda se vrijednost te konstante može približno odrediti izjednačenjem vrijednosti mjerenja. Tu konstantu $\bar{y}$ nazivamo *srednjom vrijednosti mjerenja.* Prema E.15. na str. 974 dobijemo jedinstvenu normalnu jednadžbu

$$N \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{N} y_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{N} [y].$$

Očito da *aritmetička sredina opažaja neke veličine izjednačava tu veličinu u smislu metode najmanjih kvadrata.*

Ako je $v_i = \bar{y} - y_i$ slučajna pogreška, onda $[vv]$ prima minimalnu vrijednost za $\bar{y} = \frac{1}{N}[y]$ i $[v] = 0$.

Veličinu $m=\sqrt{\frac{[vv]}{N-1}}$ nazivamo *srednjom pogreškom* pojedinog *opažanja* y_i, $m_y=\frac{m}{\sqrt{N}}$ nazivamo *srednjom pogreškom sredine* i primjenjujemo je u zapisu rezultata mjerenja u obliku $y=\bar{y}\pm m_y$.

Izjednačenje pravcima $y=ax+b$. Nužan i dovoljan uvjet da točke $M_i(x_i, y_i)$, dobivene mjerenjem, leže na istom pravcu je proporcionalnost prvih diferencija od x i y, tj. $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\text{const.}$

Ako je taj uvjet približno ispunjen, onda pravac $y=ax+b$ možemo izabrati za krivulju izjednačenja.

Koeficijenti pravca zadovoljavaju, prema E.15. na str. 974, one dvije normalne jednadžbe:

$$a\cdot N+b\,[x]=[y],$$

$$a\,[x]+b\,[x^2]=[xy],$$

$$a=\frac{[y][x^2]-[xy][x]}{N\,[x^2]-([x])^2},\qquad b=\frac{N\,[xy]-[y][x]}{N\,[x^2]-([x])^2}.$$

(Cramerovo pravilo.)

Primjer 32.

x	y	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0,5	0,62		
		1,02	
1,0	1,64		2,04
		2,06	
2,0	3,70		2,06
		1,32	
2,5	5,02		2,64
		1,02	
3,0	6,04		2,04

Treća vrijednost mjerenja očito odstupa iz okvira prividne linearne zavisnosti, što ukazuje ili na zakonomjerni dodatni utjecaj ili na sporednu pogrešku mjerenja. Ako smo sigurni da se radi o ovom potonjem, onda tu vrijednost odbacujemo; u protivnom moramo je uzeti u obzir. Izjednačenje pomoću pravca ovdje daje $a=-0{,}501$, $b=2{,}085$, prema tome je $\hat{y}=2{,}085x-0{,}501$.

Linearizacija. Ako podaci nekog mjerenja *približno* zadovoljavaju jednadžbu oblika $a_1\cdot f(x)+b_1\cdot g(y)=0$, onda se linearna veza može konstruirati pomoću transformacije $X=f(x)$, $Y=g(y)$ i, prema tome, moguće je izjednačenje (to također treba usporediti s procesom rektifikacije; vidi D.13. na str. 970).

Primjer 33 (primjer 31). Ako točke dobivene mjerenjima ucrtamo u koordinatni sustav, onda dobijemo hiperbolu i možemo pretpostaviti da vrijedi $y=\frac{1}{a+bx}$. Uvrstivši da je $X=x$ i $Y=\frac{1}{y}$, dobijemo linearni oblik $Y=a+bX$.

Paraboličko izjednačenje $y=ax^2+bx+c$. Karakteristična veličina $\frac{\Delta(\Delta y_i/\Delta x_i)}{x_{i+2}-x_i}=\text{const}$, tj. drugi kvocijenti diferencija moraju biti konstantni.

Normalne jednadžbe:

$$cN+b\,[x]+a\,[x^2]=[y],$$

$$c\,[x]+b\,[x^2]+a\,[x^3]=[xy],$$

$$c\,[x^2]+b\,[x^3]+a\,[x^4]=[x^2y].$$

Primjer 34. $Y=y-68$.

x	y	Y	ΔY	$\Delta Y/\Delta x$	$\Delta(\Delta Y/\Delta x):(x_{i+2}-x_i)$
−2	35	−33			
			15	7,5	
0	50	−18			−0,3
			18	6	
3	68	0			−1
			2	2	
4	70	2			−0,3
			6	3	
6	76	8			−0,06
			8	8/3	
9	84	16			

Pri takvom ponašanju drugih diferencija paraboličko izjednačenje još može biti opravdano. Sistem ima oblik

$$6c+\ 20b+\ 146a=-25.$$

$$20c+\ 146b+1028a=\ 266,$$

$$146c+1028b+8210a=1484.$$

Rješenje. $Y=-18{,}4+6{,}5x-0{,}30x^2$, $y=49{,}6+6{,}5x-0{,}30x^2$.

16. DRUGI NAČINI IZJEDNAČENJA

(1) *Metoda izabranih točaka.* Najprije se točke dobivene mjerenjem predoče grafički i vizualno se određuje odgovarajuća empirijska formula

$$y=f(x;\ a_1,\ldots,\ a_n)\in F(a_1,\ldots,\ a_n).$$

Za određivanje parametara uzme se glatka krivulja Γ, koja „dobro" prileže uz točke M_i i pokazuju se kvalitativna obilježja grafičkog predočenja funkcije iz F.

Tada se na Γ izabere n točaka N_j $(j=1,\ldots,\ n)$ i iz sistema jednadžbi

$$\hat{f}(x_j;\ \hat{a}_1,\ \hat{a}_2,\ldots,\ \hat{a}_n)=y_j \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

izračunavaju se parametri $\hat{a}_1,\ \hat{a}_2,\ldots,\ \hat{a}_n$ funkcije $\hat{y}=f(x)$.

Iako je ta metoda veoma zorna, ona je ipak veoma gruba i ni na koji način ne uzima u obzir statističku razdiobu pogrešaka (tj. ne može biti statistički zasnovana).

(2) Pri aproksimaciji po metodi srednjih točaka mjerenja M_i $(i=1,\ldots,\ N)$ razbijaju se na n jednakih ili gotovo jednakih skupina $\mathscr{M}_j=\{M_{i_1},\ M_{i_2},\ldots,\ M_{i_j}\}$ $(j=1,\ 2,\ldots,\ n)$. Za određivanje parametara zahtijeva se da bude

$$E_j=\sum_{k=1}^{j} e_{i_k}=\sum_{k=1}^{j}(f(x_{i_k},\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)-y_{i_k})=0$$

za $j=1,\ 2,\ldots,\ n$.

Primjer 35 (usporedi s primjerom 34). Paraboličko izjednačenje:

$$f(x,\ a,\ b,\ c)=ax^2+bx+c.$$

x	y	x^2	e	
-2	35	4	$4a-2b+c-35$	M_1
0	50	0	$c-50$	M_2
3	68	9	$9a+3b+c-68$	M_3
4	70	16	$16a+4b+c-70$	M_4
6	76	36	$36a+6b+c-76$	M_5
9	84	81	$81a+9b+c-84$	M_6

Skupine: $\mathscr{M}_1=\{M_1,\ M_2,\ M_3\}$: $\mathscr{M}_2=\{M_4\}$; $\mathscr{M}_3=\{M_5,\ M_6\}$.

Sistem jednadžbi:	Rješenja:
$13a+\ b+\ c=153,$	$\hat{f}=50{,}1+6{,}0x-0{,}25x^2$
$16a+\ 4b+\ c=\ 70,$	(Vidi „Paraboličko izjednačenje"
$117a+15b+2c=160.$	na str. 977).

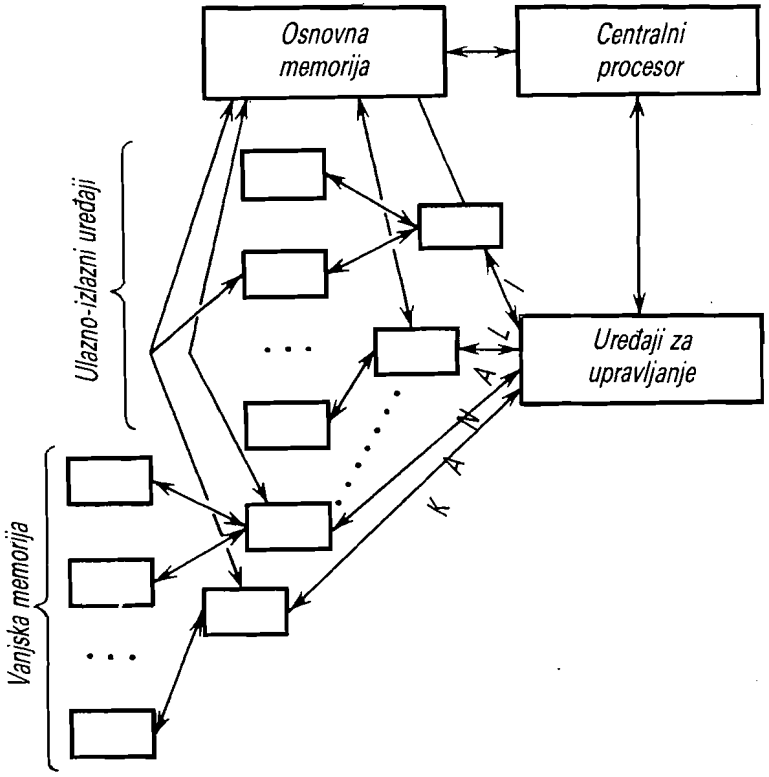
Naravno da empirijske formule još ne predstavljaju zakone, no njihovo poznavanje može biti važan prethodni korak da se nađu teorijske osnove funkcionalnih odnosa među fizikalnim veličinama. Gotovo klasičan primjer za to je otkriće Planckovog zakona zračenja na osnovu triju empirijskih formula.

II. RAČUNSKA TEHNIKA

A. ELEKTRONIČKA RAČUNALA

1. UVODNE NAPOMENE

Elektronička računala, konstruirana u nekoliko posljednjih decenija, danas su veoma rasprostranjena i upotrebljavaju se u sasvim različitim područjima za obradu podataka. Na to se odnose raznovrsna izračunavanja, kako znanstvena i tehnička tako i ekonomska, zatim



pretrage podataka povezane s organizacijom pohrane obimnih sadržaja informacija i njihova dohvata, i na kraju, automatsko upravljanje koje omogućava dobivanje upravljajućih rješenja iz stalno dolazećeg toka informacija. U ovome su poglavlju ukratko navedene opće činjenice o radu elektroničkih računala i pojmovi koji su s time u vezi.

Svako računalo sastavljeno je od slijedećih dijelova (vidi shemu):

1) *ulazni i izlazni uređaji* (vanjski uređaji), osiguravaju vezu računala sa vanjskom sredinom;

2) pamtila ili uređaji za memoriranje (*pohrana* ili memorija), omogućavaju pohranu izlazne informacije, međurezultata i konačnih rezultata;

3) *procesori*, pomoću kojih se realiziraju elementarne operacije prerade informacija;

4) *upravljački uređaji*, provjeravaju proces obrade informacija;

5) *operativni sustav* je skup programa (vidi str. 983), koji omogućavaju međusobno djelovanje pojedinih dijelova računala u toku njegova rada.

2. PREDOČAVANJE INFORMACIJA I MEMORIJA RAČUNALA

Svaka se informacija u računalu predočava kodom i izražava skupom *bitova*, tj. elemenata koji mogu imati samo dvije vrijednosti 0 ili 1. Najviše upotrebljavani oblici informacija su znakovi (slova) i brojevi. Informacija znakovima sastoji se od *slova*, a skup svih znakova (slova) nazivamo alfabetom danog računala. Svaki se znak kodira kao posve određena kombinacija fiksnog broja bitova koji čine *bajt*. Najčešće upotrebljavana duljina bajta je 8 ili 16 bitova.

Brojevi koji se u računalo unose (ili iz računala izlaze) obično se zapisuju u dekadskom brojevnom sustavu s predznakom „+“ ili „−“ i točkom koja razdvaja cijeli dio broja od njegova razlomljena dijela. Osim toga, za proširenje područja dopustivih brojeva i za pogodniji zapis dopuša se dodavanje faktora $10^{\pm n}$, gdje je n cijeli pozitivan broj. Takav se faktor zapisuje na potpuno određen dogovoreni način, a najčešće u obliku $E \pm n$. Tako se, primjerice, 0,000 045 može zapisati u obliku $45E-6$ ili $4.5E-5$. Na taj način zapisani brojevi mogu se kodirati kao i svaka druga znakovna informacija. Znakovi koji su za to potrebni uvijek ulaze u alfabet.

Međutim, unutar računala se za provođenje operacija, a također i većim dijelom i za pohranu u memoriji, brojevi zapisuju u binarnom brojevnom sustavu. Pri tome svakom broju pripada isti broj bitova,

koji čine *riječ računala**). Upotrebljavaju se dva unutarnja oblika zapisa broja i to s nepomičnom (fiksnom) ili s pomičnom (plivajućom) točkom. Kada je broj s nepomičnom točkom, tada svaki bit u riječi računala odgovara određenoj binarnoj poziciji, tj. vrijednost (0 ili 1) množimo sa određenom potencijom broja 2. Često se primjenjuje sistem zapisa u kome starija znamenka odgovara (-1)-oj potenciji od 2, tj. svi brojevi su manji od 1, ili takav u kojem mlađa znamenka odgovara 0-toj potenciji od 2, tj. svi brojevi su cijeli.

Kada se upotrebljava pomična točka, brojevi se poredočuju u obliku $m \cdot a^p$, gdje je m mantisa (broj koji se zapisuje s nepomičnom točkom) a baza brojevnog sustava (2, 10, 16**), a p cijeli broj s prednakom, tj. redosljed broja. U riječi računala s određenim brojem bitova sadržana je mantisa i redosljed s njegovim predznacima.

Riječ računala sastavljena je od cijelog broja bajtova.

Informacija koja se u računalo unosi raspoređuje se u memoriju računala. Memoriju sačinjavaju elementi koji mogu imati dva fizička stanja i zato mogu pamtiti vrijednosti bitova (0 ili 1) koji predočuju informaciju. Skup elemenata predviđen za pohranu jedne riječi računala čini jednu memorijsku stanicu. Sve memorijske stanice su redom numerirane. Broj (iz numeracije) stanice nazivamo njenom *adresom****).

Kada računalo radi, stalno se izmjenjuju informacije među različitim uređajima i stalno se odabiru i šalju sadržaji ove ili one memorijske stanice. Vrijeme utrošeno na jedan pristup memoriji kao i njen sadržaj osnovni su faktori koji određuju kapacitet računala. Povećanje brzine djelovanja memorije dovodi u pravilu do poskupljenja računala. Ako je neophodno da moramo imati veliku memoriju, tada je radi smanjenja troškova uputno da se memoriji računala pridodaju hijerarhijska ustrojstva. Ta se ustrojstva sastoje od nekoliko razina s različitim brzinama djelovanja. U toku procesa rada informacija se po potrebi može slati s jedne razine na drugu. Pri tome se razlikuju unutrašnja i vanjska memorija. Naprava za upravljanje ima neposredan dostup (po adresi) svakoj stanici, ali samo ako se radi o unutarnjoj memoriji. Informaciju pohranjenu u vanjskoj memoriji može se koristiti samo nakon njenog prebacivanja u unutarnju memoriju. Izmjena između unutarnje i vanjske memorije može se obaviti samo za skupine stanica koje su jedna uz drugu i koje čine blok. U vanjskoj memoriji se, prema tome, mogu adresirati samo blokovi.

*) U nekim računalima upotrebljava se binarno-dekadski sustav: broj se predočuje u dekadskom sustavu, a svaka dekadska znamenka u binarnom, zauzimajući 4 bita u riječi računala.

**) Predočenje broja u binarnom sustavu može se interpretirati kao zapis u sistemu s bazom 16, objedinjujući svaka 4 bita u jedan šesnaesteroznamenkasti broj, i obrnuto.

***) U velikim računalima redom su numerirani (adresirani) svi bajtovi. Tada je adresa stanice adresa njenog prvog bajta.

Najviše se upotrebljava vanjska memorija na magnetskom sloju nanesenom na vrpce, diskove ili bubnjeve.

3. KANALI IZMJENE

Ulaz informacije u računalo i izlaz rezultata obrade obavlja se pomoću *vanjskih uređaja.*

Ulaznu informaciju mora se prethodno zapisati u kodiranom obliku na nekom *nosiocu* dostupnom za prihvat vanjskim napravama računala. Takvi nosioci mogu biti bušene papirne trake, bušene kartice, magnetske vrpce ili diskovi. Za izmjenu informacija između vanjskih naprava i računala, a također i za izmjenu između unutarnje i vanjske memorije, služe kanali izmjene. U procesu izmjene kanalom se može realizirati jednostavnija prerada informacija, na primjer njeno prekodiranje. Izmjena s vanjskim uređajima i vanjskom memorijom teče sporije od rada procesora računala pa se obično takva izmjena usuglašava s radom procesora na slijedeći način. Kada se pri rješavanju zadaće ukaže potreba za izmjenom, rad procesora se *prekida* i uključuje se odgovarajući kanal. Procesor za to vrijeme može obavljati rad za neku drugu zadaću. Neophodno je samo to da te zadaće koriste različita područja memorije i da ta područja budu zaštićena, tj. da nikakva zadaća ne bi mogla pokvariti podatke ili programe koji su u području dodijeljenom za drugu zadaću. Nakon izvršene izmjene ponovo nastaje prekid i procesor se može vratiti na prvotnu zadaću. Takav način rada nazivamo *višeprogramnim.*

4. PROGRAM

Za odvijanje neke zadaće obrade informacija, koje su numeričkog, logičkog ili drugog karaktera, mora biti zadan neki *algoritam* obrade. Opis takvog algoritma kojeg stroj može prihvatiti nazivamo *programom.*

Rad *centralnog procesora* računala sastoji se od uzastopnog odvijanja različitih elementarnih operacija. Za svaku operaciju polazni podaci su jedan ili dva *operanda.* Za čuvanje operanada, njihovih adresa i druge pomoćne informacije, upotrebljavaju se *registri.* To su jednostavnije memorije kapaciteta jedne riječi računala. Uređaj u kome se dobiva rezultat elementarne operacije nazivamo *sumatorom* (*zbrajalom*).

Za rješavanje zadaće na računalu, algoritam pomoću kojeg tu zadaću rješavamo, mora biti rastavljen na elementarne operacije. Opis jedne elementarne operacije nazivamo *naredbom* (*komandom*). Naredba

mora sadržavati podatke o tome odakle treba uzeti operande, koje radnje treba obaviti i kamo poslati rezultat.

Skup elementarnih operacija i način njihovog opisivanja tvore sustav naredaba. U današnje je vrijeme najrasprostranjeniji sustav *jednoadresnih* naredaba. Takva se naredba sastoji iz *adresnog dijela* i *kôda operacije*. Jedan od operanada je sadržaj zbrajala, adresni dio omogućava da se nađe drugi operand i/ili koji upućuje kamo treba usmjeriti rezultat. Kôd operacija karakterizira stvarnu operaciju i način upotrebe adresnog dijela.

Adresni dio naredbe može imati različito ustrojstvo. Često treba obaviti iste naredbe u kojima adrese operanada (ili rezultata) mogu biti promjenljive. Tada se razdvaja stalna i promjenljiva komponenta adrese; promjenljivu se smjesti u neki pomoćni registar. U naredbi se navodi stalna komponenta i adresa (broj) pomoćnog registra. Katkad se primjenjuje *neizravno adresiranje*, kada se adresa operanda obrazuje u nekoj ćeliji memorije koja je određena adresnim dijelom naredbe.

Usporedo s jednostavnim naredbama upotrebljavaju se često i naredbe složenijeg ustrojstva koje dopuštaju opisivanje ukrupnjavanja operacija, na primjer operacije izmjene. Takve naredbe obično nazivamo *makronaredbama* (*makrokomandama*). U biti makronaredbe zamjenjuju neke određene nizove elementarnih naredaba.

Skup naredaba, koji opisuje čitav proces rješavanja zadaće, čini *ciljni* (strojevni) *program*. Sam program je jedan od oblika izvorne informacije zadaće i smještava se u memoriju računala. U jednoj riječi računala obično su raspoređene jedna do dvije naredbe. Makronaredbe mogu zauzimati više od jedne riječi.

5. PROGRAMIRANJE

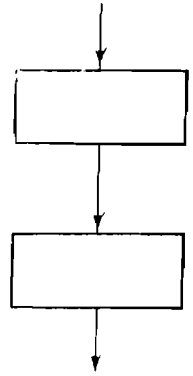
Pisanje algoritma zadaće u obliku ciljnog programa je složen i težak posao koji se obično povjerava samom računalu. Izvorni podaci za tú zadaću su sadržajni opisi algoritma koji nazivamo *izvornim programom* (*programom u izvornom jeziku*). Da bi takav opis bio shvatljiv stroju, on mora biti napisan na nekom od *algoritamskih jezika*. Postoji velik broj algoritamskih jezika. Najrasprostranjeniji su fortran, algol 60, cobol, PL-1.

Tekst izvornog programa na algoritamskom jeziku sastavljen je od odvojenih rečenica koje nazivamo *operatorima*. Operatori se dijele na izvedbene, koji opisuju neke radnje obavljene sa podacima, i neizvedbene, koji sadrže neku neophodnu informaciju o podacima i o izvođenju programa.

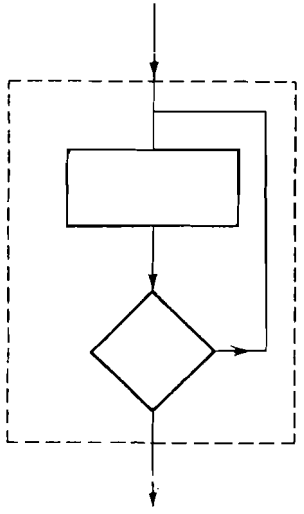
Konstrukcije svakog jezika moraju zadovoljavati određene formalne zahtjeve, skup kojih nazivamo *sintaksom* jezika. Smisaoni sadržaj formi jezika opisuje *semantika* jezika. Skup sredstava jezika dopustivih na danom računalu obrazuje njegov *sustav programiranja*. Svaki algoritamski jezik mora dopuštati da se odgovarajući algoritmi opišu točno i potpuno, i to tako da opis bude jednoznačno shvaćen.

Proces pisanja izvornog programa (*programiranje*) obično se sastoji od nekoliko etapa. U prvoj se etapi razmatra opća struktura algoritma; algoritam se rastavi na sastavne dijelove i sastavlja se grubi neformalni opis redosljeda tih dijelova. Osnovne strukture pomoću kojih se može konstruirati svaki algoritam jesu:

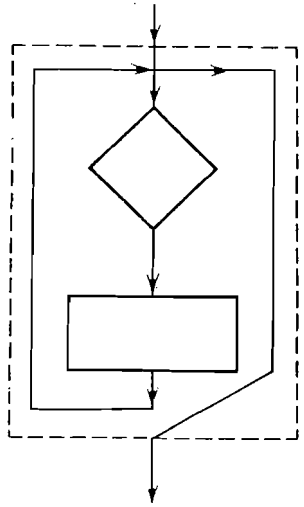
1) uzastopno izvođenje (slika 461);
2) ponavljanje (ciklus) (slike 462 i 463);



Sl. 461.

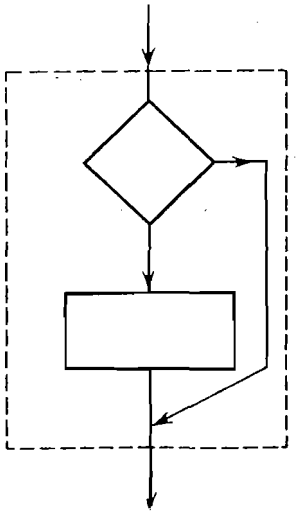


Sl. 462.

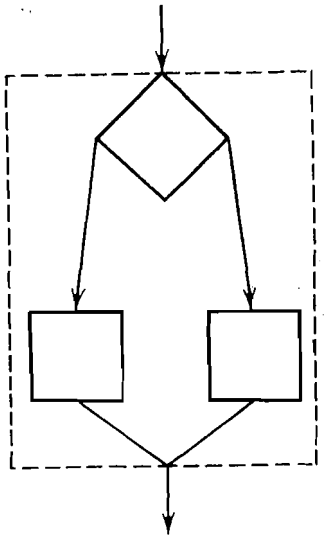


Sl. 463.

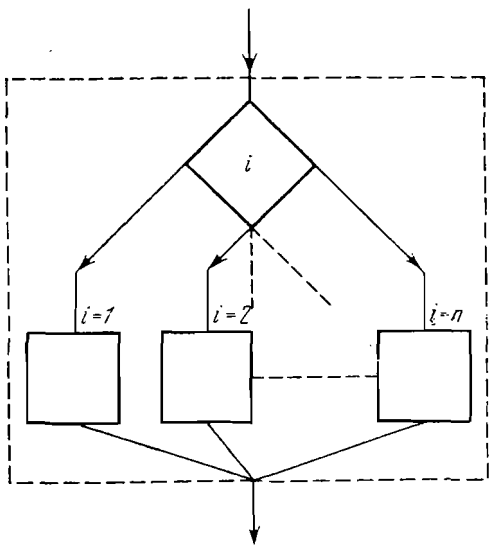
3) alternativa (uvjetno izvođenje) (slika 464 i 465);
4) grananje*) slika 466.



Sl. 464.



Sl. 465.



Sl. 466.

*) Grananje se može opisati kao redosljed alternativa, međutim upotreba strukture grananja može značajno pojednostavniti program.

Na slikama 461 do 466 rombovi označavaju provjeru (ispitivanje) nekog određenog uvjeta (dva izlaza — za ispunjen uvjet jedan izlaz, a za neispunjen uvjet drugi izlaz), pravokutnici elemente algoritma. Ove se strukture mogu rekurzivno upotrebljavati.

Slijedeća etapa je detaljiranje elementa izdvojenog u prethodnoj etapi i razmatranje njegove unutarnje strukture itd. Pri tome se upotrijebe iste osnovne strukture. Konačni opis (izvorni program) već se sastoji od elementarnih operatora jezika koji je u potpunosti formaliziran i mora biti sintaksički pravilan. U procesu programiranja razrađuju se i strukture podataka: kako izvornih podataka tako i međupodataka i konačnih podataka. Pri tome se može pokazati neophodnim uzimati u obzir osobitosti računala, u prvom redu veličinu i strukturu memorije. S izuzetkom spomenutog, izvorni program u osnovi ne ovisi o tipu računala na kome je realiziran dani algoritamski jezik.

U početnim etapama svrsishodno je program razbiti na *module*, tj. na odvojene dijelove koji se mogu programirati neovisno jedan o drugome. Modularno programiranje je naročito efikasno kada se radi s nekoliko tematski bliskih programa kojima su neki dijelovi zajednički.

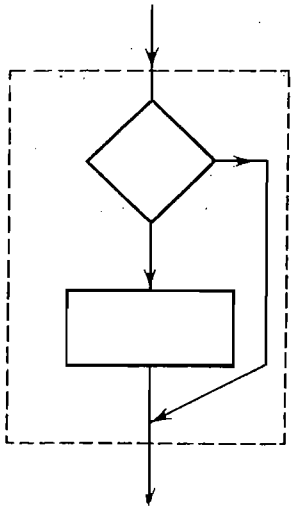
Ranije programirani moduli mogu se zatim uključiti u različite programe. Prijenos podataka s jednog modula na drugi obično se obavi preko vanjske memorije, iako u različitim jezicima postoje i drugi načini takvog prijenosa.

Neke dijelove programa u kojima se ponavlja jedan te isti algoritam prikladno je razdvojiti u *potprograme*. Potprogrami se programiraju neovisno o osnovnom programu i pohranjuju se u računalu odvojeno od njega. Ako se u osnovnom programu pojavi potreba algoritma iz potprograma, tada se **pozove** potprogram i njegova realizacija, nakon čega se produži rad osnovnog programa. Prilikom pozivanja potrebna se informacija može iz osnovnog programa prenositi u potprogram u obliku parametara o kojima taj potprogram ovisi.

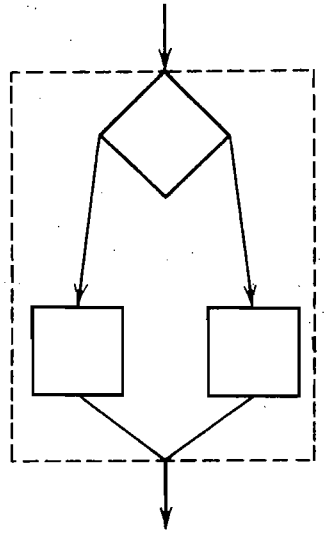
Proces dobivanja ciljnog programa iz izvornog programa jedan je od oblika rada računala. Programe koji to obavljaju nazivamo *kompilatorima* ili *translatorima* odnosno *prevodiocima*, i oni su sastavni dio opće matematičke podrške računala.

Translatori u stvari ne pretvaraju izvorni program odmah u ciljni program, nego u neki među oblik napisan na jeziku *asemblera* (mnemoničkog procesora) ili u obliku *ciljnog punjenja* (*uvođenja u rad*). Oba ta jezika slična su strojnom jeziku naredbi, ali se u njima umjesto istinitih adresa pojavljuju relativne ili simboličke adrese, a sadrže također i neki upravljački podatak. Završni ciljni program dobije se nakon provedbe *specijalnih programa — asemblera i punioca, koji čine dio nadzornog* programa (monitora).

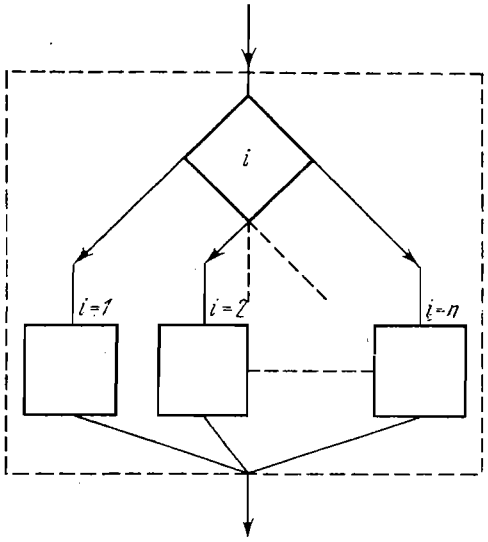
3) alternativa (uvjetno izvođenje) (slika 464 i 465);
4) grananje*) slika 466.



Sl. 464.



Sl. 465.



Sl. 466.

*) Grananje se može opisati kao redosljed alternativa, međutim upotreba strukture grananja može značajno pojednostavniti program.

Na slikama 461 do 466 rombovi označavaju provjeru (ispitivanje) nekog određenog uvjeta (dva izlaza — za ispunjen uvjet jedan izlaz, a za neispunjen uvjet drugi izlaz), pravokutnici elemente algoritma. Ove se strukture mogu rekurzivno upotrebljavati.

Slijedeća etapa je detaljiranje elementa izdvojenog u prethodnoj etapi i razmatranje njegove unutarnje strukture itd. Pri tome se upotrijebe iste osnovne strukture. Konačni opis (izvorni program) već se sastoji od elementarnih operatora jezika koji je u potpunosti formaliziran i mora biti sintaksički pravilan. U procesu programiranja razrađuju se i strukture podataka: kako izvornih podataka tako i međupodataka i konačnih podataka. Pri tome se može pokazati neophodnim uzimati u obzir osobitosti računala, u prvom redu veličinu i strukturu memorije. S izuzetkom spomenutog, izvorni program u osnovi ne ovisi o tipu računala na kome je realiziran dani algoritamski jezik.

U početnim etapama svrsishodno je program razbiti na *module*, tj. na odvojene dijelove koji se mogu programirati neovisno jedan o drugome. Modularno programiranje je naročito efikasno kada se radi s nekoliko tematski bliskih programa kojima su neki dijelovi zajednički.

Ranije programirani moduli mogu se zatim uključiti u različite programe. Prijenos podataka s jednog modula na drugi obično se obavi preko vanjske memorije, iako u različitim jezicima postoje i drugi načini takvog prijenosa.

Neke dijelove programa u kojima se ponavlja jedan te isti algoritam prikladno je razdvojiti u *potprograme*. Potprogrami se programiraju neovisno o osnovnom programu i pohranjuju se u računalu odvojeno od njega. Ako se u osnovnom programu pojavi potreba algoritma iz potprograma, tada se **pozove** potprogram i njegova realizacija, nakon čega se produži rad osnovnog programa. Prilikom pozivanja potrebna se informacija može iz osnovnog programa prenositi u potprogram u obliku parametara o kojima taj potprogram ovisi.

Proces dobivanja ciljnog programa iz izvornog programa jedan je od oblika rada računala. Programe koji to obavljaju nazivamo *kompilatorima* ili *translatorima* odnosno *prevodiocima*, i oni su sastavni dio opće matematičke podrške računala.

Translatori u stvari ne pretvaraju izvorni program odmah u ciljni program, nego u neki među oblik napisan na jeziku *asemblera* (mnemoničkog procesora) ili u obliku *ciljnog punjenja* (*uvođenja u rad*). Oba ta jezika slična su strojnom jeziku naredbi, ali se u njima umjesto istinitih adresa pojavljuju relativne ili simboličke adrese, a sadrže također i neki upravljački podatak. Završni ciljni program dobije se nakon provedbe specijalnih programa — *asemblera* i *punioca*, koji čine dio nadzornog programa (monitora).

6. UPRAVLJANJE RAČUNALOM

Računalo radi uglavnom potpuno automatski. Funkcija čovjeka-operatera svodi se na početno aktiviranje računala, na zamjenu alternativnih vanjskih izvora informacija, tj. paketa bušenih kartica, magnetskih vrpci i diskova, i reakcije na zahtjeve računala (uglavnom o raspoređivanju jednih ili drugih uređaja) preko operatorskog upravljačkog stola.

Najviše upotrebljavani sistemi organizacije rada računala jesu *obrada grupe poslova* i *vremenska podjela**). Pri obradi grupe poslova u računalo se puni nekoliko zadaća (paketa) koje se izvršavaju uzastopce ili paralelno, ovisno o postojećim sredstvima. Prilikom postupka izmjene nastaju prekidi koji dopuštaju da se za vrijeme obustave rješavanja jedne zadaće uključi u rješavanje druga zadaća.

Prilikom vremenske podjele nekoliko korisnika povezanih na računalo preko ulazno-izlaznog uređaja (*terminala*) automatski se naizmjence uključuju na računalo. Unosom informacija (podataka i programa) putem terminala u računalo, korisnik računalu može zadavati zadatke i reagirati na njegove odgovore, uspostavom takozvanog režim dijaloga (sustav poziv-odgovor). Vrijeme rada programa je u prosjeku kratko u usporedbi s vremenom izmjene i vremenom reakcije pa zato računalo uspijeva posluživati više korisnika.

Pored uzajamnog djelovanja s vanjskom sredinom i organizacije izvršavanja radova, upravljački uređaj omogućuje rad centralnog procesora, dešifrirajući kodove operacija i adresa u redu naredbi, birajući tu naredbu zavisno o signalima dobivenim od procesora. Sve te funkcije realiziraju se kako pomoću odgovarajućih uređaja tako i pomoću specijalnih programa koji su sastavni dio tzv. *operacijskog sustava*, neodvojivog dijela računala.

7. MATEMATIČKA PROGRAMSKA PODRŠKA

Skup programa upotrebljavanih u toku rada računala čini *matematičku podršku*. Ona se obično dijeli na specijalnu matematičku podršku sastavljenu od programa korisnika koji su predodređeni za rješavanje ovih ili onih konkretnih zadaća, te na opću matematičku podršku u koju ulaze: operacijski sustav, biblioteka potprograma opće namjene i niz drugih programa koji osiguravaju funkcioniranje računala.

*) Ovdje se ne razmatra rad računala koji pripada u automatske sisteme upravljanja.

Operacijski sustav je obično podijeljen na *nadzorni program* i *monitor**). Glavna funkcija nadzornog programa je upravljanje zadaćama. To se upravljanje obično sastoji od raspoređivanja sredstava računala (na ovo se prije svega odnosi memorija i vrijeme centralnog procesora), na zadaće koje su u toku (dinamičke zadaće). Monitor realizira funkcije upravljanja u granicama jedne zadaće, osigurava kompilaciju dijelova programa napisanih na raznim jezicima, njihovo punjenje i njihovu povezanost, međusobno djelovanje zadaće s vanjskom memorijom itd.

Sastavljajući zadaću za računalo, korisnik mora pored programa za rješavanje njegove zadaće davati i niz uputa operacijskom sustavu u odnosu na tražena sredstva, upotrebljene jezike programiranja itd. Takve se upute pišu na *upravljačkom jeziku posla.*

Važan dio opće matematičke podrške je *upravljački sustav za podatke*, koji obično razmatramo kao dio operacijskog sustava. U toku rada računala u unutarnju i vanjsku memoriju pohranjuju se grupe podataka koje se odnose na različite zadatke. Među njima su i programi pomoću kojih se rješavaju zadaci. Na programskom i upravljačkom jeziku posla (zadatka) te se grupe dijele na smislene jedinice (*upisi, datoteke*) koje se identificiraju prema njihovim nazivima.

U memoriji računala svrstavaju se grupe podataka prema fizičkim jedinicama (blokovima) s njihovim paralelnim adresama. Sustav upravljanja podacima mora osiguravati razmještaj upisa i datoteka u slobodnim blokovima memorije i po potrebi mogućnost njihova pozivanja.

8. OBAVLJANJE RADOVA RAČUNALOM

Da bi računalo moglo obavljati neke radove, neophodno je prije svega poznavati mogućnosti tog računala. Kada se odredi opća shema izvršavanja zadataka i struktura ulaznih i izlaznih podataka, može se sastaviti program na nekom od algoritamskih jezika i pri tome uzeti u obzir osobitosti realizacije jezika na samom računalu. Potrebno je nadalje *provjeriti* (*ispitati*) program, tj. odstraniti moguće pogreške. U tu svrhu treba zadatak rješavati na nekim pomoćnim podacima (*testovima*) odabranim tako da se ispravnost rezultata može lako provjeriti. Proces provjeravanja (ispitivanja) se obično rastavi u dva stadija. Prvi stadij je pojava tehničkih i sintaksičkih pogrešaka, kao što su primjerice tiskarske pogreške. Drugi stadij je metodička provjera kada se traže pogreške algoritma, a ujedno i mogućnosti njegova poboljšanja. Treba uzeti u obzir da je u velikim programima veoma teško osigurati

*) Ovi termini ne upotrebljavaju se uvijek u istom smislu.

eliminiranje svih pogrešaka u toku samog procesa ispitivanja. Zbog toga treba ispitivanja provoditi na odvojenim manjim dijelovima programa i postupno ih povezivati.

Konačni se tekst nakon završenog ispitivanja, fiksira njegovim upisom u vanjsku memoriju. Ako treba rješavati velik broj varijanata s različitim podacima prema nepromijenjenom programu, onda se upisuje ciljni program, kako bi se izbjeglo ponovno prevođenje.

Ako je za rješavanje zadatka potrebno mnogo vremena, onda se u programu mora predvidjeti *osnovne točke*, tj. upis međurezultata u vanjsku memoriju. Takav upis mora dopuštati obnovu rješavanja zadatka od časa posljednjeg upisa nakon kojeg je računalo pogrešno radilo.

B. ANALOGNA RAČUNALA

9. PRINCIP UREĐAJA ANALOGNE RAČUNSKE TEHNIKE

Princip uređaja analogne računske tehnike zasniva se na realizaciji matematičkih modela tehničkim sredstvima, pri čemu se matematički objekti predočuju kao izmjerljive fizikalne veličine, a matematičke se operacije realiziraju u obliku odgovarajućih fizikalnih zakona. Postoje mehanička, pneumatska, hidraulička i elektronska analogna računala. U fazi ispitivanja su i optička analogna računala. Mi ćemo se ovdje ograničiti samo na elektronička analogna računala U tablici 18 nabrojene su karakteristične razlike između analognih elektroničkih računala i digitalnih (numeričkih) računala.

10. ANALITIČKI ELEMENTI ANALOGNOG RAČUNALA

Analogno računalo konstruirano je prema principu blokova. Blokovi su operacijska pojačala. Sve češće se konstruiraju kao zamjenljivi ulagajući blokovi. Priključivanje operacijskih pojačala u polje programiranja ostvaruje se posredstvom utikačkih naprava i spojnih vodova (žica). U računalima na koja se stavljaju veći zahtjevi, polje programiranja je zamjenljivo. Nakon spajanja s ulaznim sklopovima i sklopovima povratne veze pojačala (pojačalo konstantnog napona $U_a = -sU_e$, U_e je ulazni napon, U_a je izlazni napon, $s > 10^5$) postaju *računski elementi* koji obavljaju posve određene operacije. Važan element računala je *integrator*. U njemu su i dva releja, koji se aktiviraju sa dva upravljačka napona p_r i p_s. Zahvaljujući tome računski element se može nalaziti u tri položaja:

1. „briši", $p_r = L$ (tj. priključen je p_r). U ovome položaju je izlaz y računskog elementa jednak ulazu y_0 na spojnici (klemi) početne vrijednosti s predznakom „minus";

2. „računaj", $p_r = p_s = 0$; integrator integrira;

3. „prekini", $p_s = L$; integrator memorira vrijednost napona na izlazu, tj. on ostaje u tom stalnom položaju neovisno o tome što se dovede na ulaz.

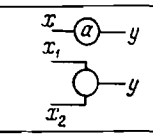
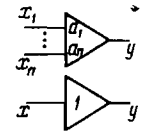
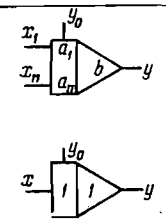
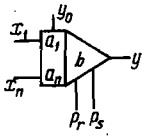
Ako je $p_r = p_s = L$, tada se integrator nalazi u položaju „briši" (prethodno uključeno).

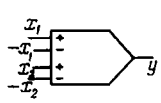
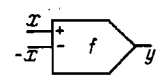
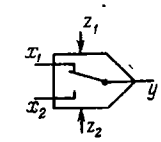
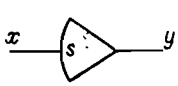
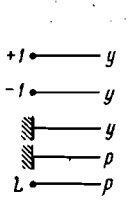
Upravljanje integratorima obično je centralizirano, tj. u računalu se upravljački naponi p_r i p_s uključuju istovremeno. Odbrojavanje vremena počinje ($t = 0$) u trenutku prijelaza s položaja „briši" u položaj „računaj" i završava ($t = t_e$) u trenutku prijelaza iz položaja „računaj" u položaj „prekini" ili „briši". Prebacivanje položaja može uslijediti s upravljačkog (operatorskog) stola pomoću sata ili nekog drugog vremenskog osjetila (davača), a također i prema programu. Razlikujemo dva tipa rada:

Tablica 18

Karakteristike	Digitalna	Analogna	Elektronička analogna
Predočenje informacija	niz znamenaka	vrijednosti fizikalnih veličina	električki potencijali
Djelovanje na informaciju	algoritam	odgovarajuće izabrani fizikalni zakoni	zakoni teorije elektriciteta
Točnost	teoretski nije ograničena	ograničena principijelno	$2^0/_{00}$ do 2% od izračunatog elementa
Mogućnost primjene	univerzalna	specijalni zadaci	sistemi običnih diferencijalnih jednadžbi
Programiranje	algoritmi rješavanja i obrade	jednadžbe zadataka	diferencijalne jednadžbe
Brojevno područje	vrlo veliko	malo	za zavisne varijable: $-1 \leqslant y \leqslant 1$
Registriranje rezultata	numerička tablica (tablica znakova, tekst) ili krivulje	krivulje, pojedinačni rezultati mjerenja, tablice	iscrtane krivulje, krivulje na osciloskopima, pojedinačni rezultati mjerenja, tablice

Tablica 19

Naziv	Simbol	Funkcija	Napomena
Potenciometar uzemljen, otvoren		$y=ax$ $y=x_2+a(x_1-x_2)$	a je realan broj, $0\leqslant a\leqslant 1$. Ugađanje potenciometra ovisno o otporu opterećenja
Zbrajalo Inventor (negator)		$y=-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ $y=-x$	a_i, b su najčešće cjelobrojni, npr. $a_i\in\{1, 10\}$. Konstantni ulazni otpori
Centralno upravljiv integrator		$y=-y_0-b\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\,d\tau$ ili $y'=-b\sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\quad y(0)=-y_0$ $y'=-x;\quad y(0)=-y_0$	a_i su najčešće cjelobrojni, npr. a_i, $b\in\{1, 10\}$ Konstantni ulazni otpori, y_0 je konstantan Poseban slučaj koji se često susreće: $0\leqslant t_1<t_2\leqslant t_e$
Slobodno upravljiv integrator		$y=-y_0-b\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\,d\tau$	$p_r=\begin{cases}L & \text{za } t<t_1,\\ 0 & \text{za } t\geqslant t_1,\end{cases}$ $p_s=\begin{cases}0 & \text{za } t<t_2,\\ L & \text{za } t\geqslant t_2\end{cases}$

Multiplikator (parabolički množitelj)		$y=x_1\cdot x_2$	S pravilnim predznakom se uvijek množe funkcije koje su na ulazu označene sa „+“
Generator funkcije		$y=f(x)$	f je neprekinuta realna funkcija po dijelovima linearna ili konstantna (aproksimacija izlomljenom poligonalnom linijom)
Komparator (relej s diferencijskim pojačalom)		$z_1>z_2;\ y=x_1$ $z_1<z_2;\ y=x_2$ $z_1=z_2;$ nestabilno	x_1 i x_2 mogu također biti upravljački naponi
Otvoreno pojačalo		$y=-s\cdot x$	$s>10^5$, primjena za osobite ciljeve
Konstantne funkcije		$y=1$ $y=-1$ $y=0$ $p=0$ $p=L$	Konstantne funkcije predočene su u obliku stezaljki na polju programiranja. Treba razlikovati napon računanja $+1$ i upravljački napon L

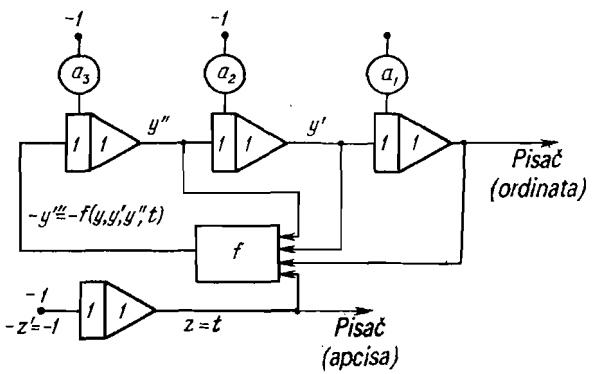
1. Jednokratno izračunavanje „briši" — „računaj" — „prekini".

2. Ponavljajuće izračunavanje: stalna izmjena položaja „briši" i „računaj" počev od startnog signala; odvija se do signala za prekid.

Pored integratora kojima se upravlja centralizirano, u velikim se računalima nalaze i *slobodno upravljivi integratori* u kojima upravljački naponi p_r i p_s mogu biti zasebno programirani. U tablici 19 naveden je pregled računskih elemenata analognog računala.

11. PRINCIP PROGRAMIRANJA ZA RJEŠAVANJE SISTEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Po dijelovima neprekinute realne funkcije u varijabli t na intervalu $0 \leqslant t \leqslant t_e$ mogu se u analognom računalu predočiti (i mogu se dobiti) u obliku potencijala ovisnih o vremenu. Pri tome su funkcije rješenja sistema običnih diferencijalnih jednadžbi s izvjesnim početnim uvjetima (Cauchyjev problem). Diferencijalne jednadžbe se programiraju, a početni se uvjeti zadaju kao konstantne funkcije. Mi se ovdje nećemo obazirati na tenički uvjetovana ograničenja (ograničenje s intervalom $[-1, 1]$, ograničenje pokazivanja potenciometara $0 \leqslant a \leqslant 1$) i promatrat ćemo *kvalitativno programiranje* (sastavljanje *blok-sheme*).



Sl. 467.

Blok-shema za običnu diferencijalnu jednadžbu u eksplicitnom obliku. Uzmimo kao primjer da je $y''' = f(y, y', y'', t)$, $y(0) = a_1$, $y'(0) = a_2$, $y''(0) = a_3$; a_1, a_2, a_3 su pozitivni realni brojevi.

Prvi korak. Pri sastavljanju lanca od tri integrala (u ovisnosti o redu diferencijalne jednadžbe, slika 467) treba obratiti pažnju na promjenu predznaka prilikom integriranja i promjenu predznaka u zadanim početnim vrijednostima.

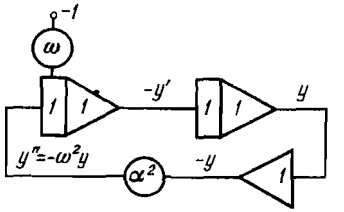
Drugi korak. Dobivanje funkcije $z = t$ kao rješenja zadaće $z' = 1$, $z(0) = 0$.

Treći korak. Dobivanje

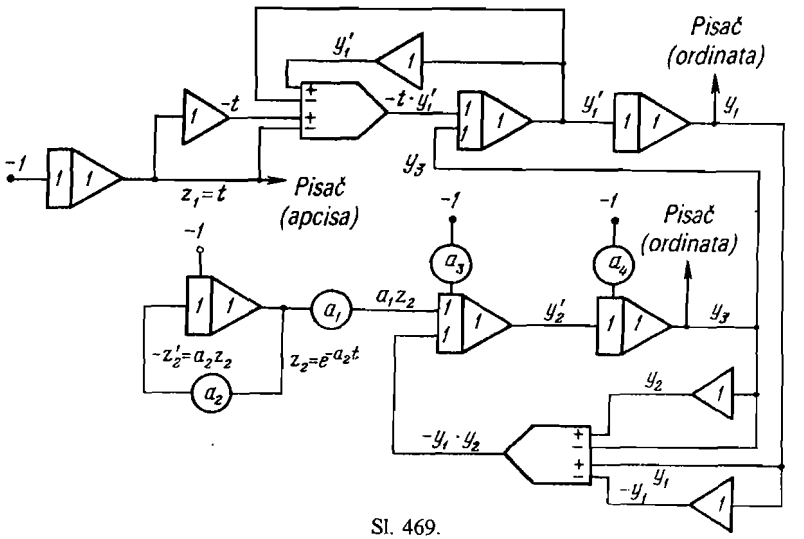
$$f(y, y', y'', t)$$

pomoću računskih elemenata računala. Zapis rezultata je

$$y = y(t).$$



Sl. 468.



Sl. 469.

Primjer 36. $y'' = -\omega^2 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\omega$, $\omega > 0$. Blok-shema prikazana je na slici 468. (Izlazi na pisaču i t nisu prikazani; usporedi primjer 38.)

Primjer 37. $y_1'' = -ty_1' + y_2$, $y_2'' = -y_1 \cdot y_2 + a_1 e^{-a_2 t}$, $y_1'(0) = y_1(0) = 0$, $y_2'(0) = -a_3$, $y_2(0) = a_4$, $a_i > 0$; treba naći rješenje za $0 \leqslant t \leqslant t_e$.

Blok-shema je na slici 469. Pomoću funkciju $z_2 = e^{-a_2 t}$ dobijemo kao rješenje zadaće o početnim uvjetima $z_2' = -a_2 z_2$, $z_2(0) = 1$. Pomoću višekanalnog pisača se y_1 i y_2 mogu istodobno upisati; u protivnome se računanje provodi dva puta, a y_1 i y_2 se upisuju jedan za drugim.

12. KVALITATIVNO PROGRAMIRANJE

Na izlazima operacijskog pojačala mogu se dobiti samo one funkcije kojima se vrijednosti nalaze između -1 i 1. Osim toga, u većini slučajeva treba preslikati interval $0 \leqslant t \leqslant t_e$ nezavisne varijable zadaće na vremenski interval $0 \leqslant T \leqslant T_e$ koji se realizira u računalu (i odgovarajućim izlaznim uređajima). To se radi pomoću homogenih linearnih transformacija.

1) *Normiranje funkcija.* Kako su sve promatrane funkcije po dijelovima neprekinute na zatvorenom intervalu, sve su također i omeđene. Stoga za svaku funkciju $x(t)$, koja je predočljiva u računalu, postoji gornja međa njenih vrijednosti; označavamo je sa x^*:

$$\forall t\,(t \in [0, t_e] \rightarrow |x(t)| \leqslant x^*).$$

Pri tome je $-1 \leqslant \dfrac{x(t)}{x^*} \leqslant 1$ i $\dfrac{x(t)}{x^*}$ je predočljiva funkcija. Izlazi invertora i multiplikatora ne moraju se normirati, jer je njihovo normiranje posljedica normiranja na ulazima. Ako kao granične vrijednosti odaberemo gornje međe, onda dobijemo optimalnu transformaciju pri kojoj su pojačala (s eventualnim isključenjem multiplikatorâ) potpuno normirana.

2) *Transformacija nezavisne varijable.* Pomoću transformacije $T = \lambda t$ interval $0 \leqslant t \leqslant t_e$ se preslikava na interval $0 \leqslant T \leqslant T_e$, gdje je $T_e = \lambda t_e$. Pri tome normiranje funkcije zadaće (normiranje varijable zadaće) postaje varijabla računala: $x(T) = \dfrac{x\dfrac{T}{\lambda}}{x^*}$. Kako se integracija u računalu može obaviti samo po varijabli T (realno tekuće vrijeme) za integriranje dobijemo slijedeću transformaciju:

$$\sigma = \lambda \cdot \tau; \quad \tau = 0 \rightarrow \sigma = 0, \quad \tau = t \rightarrow \sigma = \lambda t = T; \quad \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\sigma;$$

$$\int_0^t (x(\tau)/x^*)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T \left(x\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\sigma\right) \Big/ x^* \cdot \frac{1}{\lambda} \right) \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \left(x\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\sigma\right) \Big/ x^* \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Za $\lambda > 1$ govorimo o dilataciji intervala, za $\lambda < 1$ o kontrakciji, a za $\lambda = 1$ o programiranju u istinitom vremenu. Pomoću tih transformacija se iz blok-sheme dobije *normirana shema poravnanja* ili *shema* računanja. Na slici 470 predočen je prijelaz sa blok-sheme na normiranu shemu poravnjanja za sumator i integrator u skladu s jednadžbama:

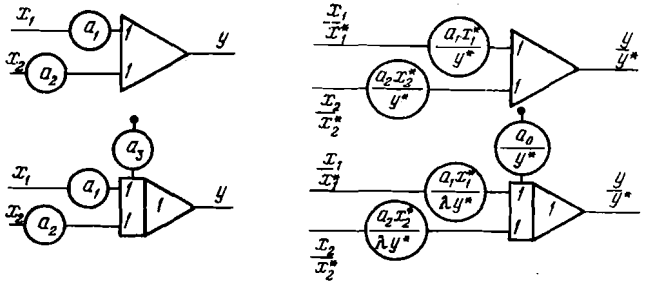
blok-shema $y' = -a_1 x_1 - a_2 x_2$,

$$y = -y_0 - \int_0^t (a_1 x_1 + a_2 x_2)\,\mathrm{d}x;$$

normirana blok-shema

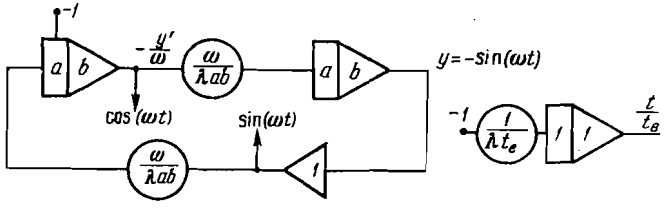
$$\frac{y'}{y^*} = -\left(\frac{a_1 x_1^*}{y^*}\right)\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right) - \left(\frac{a_2 x_2^*}{y^*}\right)\left(\frac{x_2}{x_2^*}\right),$$

$$\frac{y}{y^*} = -\frac{y_0}{y^*} - \int_0^T \left(\frac{a_1 x_1^*}{\lambda y^*}\frac{x_1}{\lambda^*} + \frac{a_2 x_2^*}{\lambda y^*}\frac{x_2}{x^*} \right) \mathrm{d}\sigma.$$



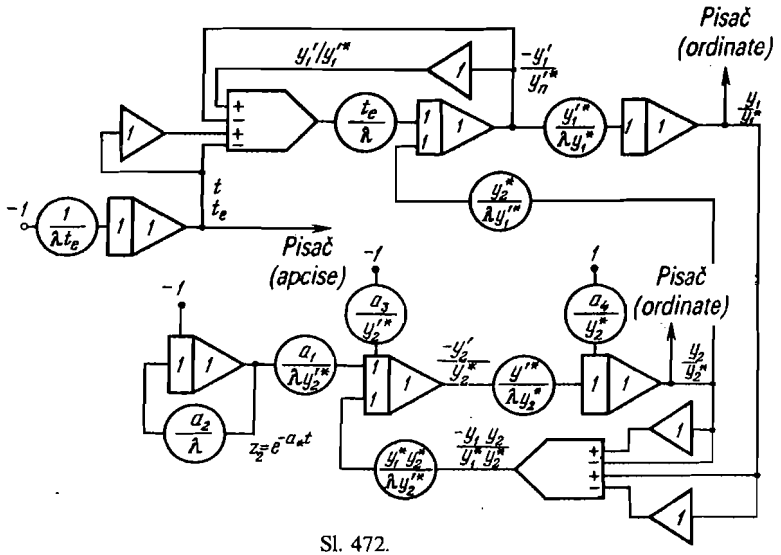
Sl. 470.

Primjer 38. Normiranje blok-sheme primjera 36. U ovom se jednostavnom primjeru za rješenje odmah dobiva: $y = -\sin(\omega t)$, $y' = -\omega\cos(\omega t)$, tj. $y^* = 1$ i $y'^* = \omega$. *Početne vrijednosti normiranih funkcija su:* $y(0) = 0$, $\dfrac{y'(0)}{y'^*} = -1$.



Sl. 471.

Ako uzmemo u obzir da za obje konstante integratora a i b nije obavezno uzeti da budu jednake 1, onda kao blok-shemu dobivamo sliku 471. Vidimo da je shema sa slike 468 primjenljiva samo za $0<\omega\leqslant 1$ (zbog potenciometra početnih vrijednosti), dok istodobno normirana blok-shema, bez velikih gubitaka za $0<\frac{\omega}{\lambda_{ab}}\leqslant 1$ uz odgovarajući izbor od a, b i λ, čini dostupnim daleko veće područje po ω. Na izlazu invertora dobiva se funkcija $\sin(\omega t)$, a na izlazu prvog integratora funkcija $\cos(\omega t)$ (shema generatora sinusoidalnih titranja). Shema je optimalna i svi generatori su u potpunosti premodulirani.



Sl. 472.

Primjer 39. Normiranje blok-sheme iz primjera 37. Odmah nalazimo da je $t^*=t_e$ i $z_2^*=1$. Ostale granice procjenjujemo. Provjeru obavimo uvrštavanjem procjenjenih vrijednosti. Ako se pojačalo premodulira, onda je odabrana granica pojačala suviše mala; ako je modulacija nedovoljna, onda je izbor granice prevelik. Na slici 472 prikazana je normirana blok-shema.

ABECEDNO KAZALO

A

Abelov teorem 368
adjunkt elementa determinante 190
adresa 982
afine koordinate 630
aksijalno polje 640
aksiom izbora 686
aksiomi teorije vjerojatnosti 788
algebarska funkcija kompleksne varijable 604
– funkcija realne varijable 334
– iracionalnost 327
– jednadžba 176
– krivulja 254
algebarski, izraz 165
– oblik kompleksnog broja 600
algebra 165...211
– logike (sudova) 663
–, univerzalna 687
– vektorska 627...639
amplituda 127, 234
analitička, funkcija 613
– geometrija u ravnini 250...269
– geometrija u prostoru 270...289
analitički kriterij nezavisnosti dviju funkcija 355
analiza, uvod 326...370
– harmonijska 739
– numerička harmonijska 751
analogna računala 990
antilogaritam, tablica 53, 54
aplikata 270
Apolonijev teorem 260
apotema 215
aproksimacija 924
apscisa 250, 270
apscisna os 250
apsolutna, integrabilnost funkcija 491
– integrabilnost prekinutih funkcija 495
– konvergencija integrala prekinute funkcije 495
– konvergencija nepravog integrala 491
– konvergencija reda brojeva 362
– konvergencija reda s kompleksnim članovima 605, 606
apsolutna, pogreška 152
– vrijednost kompleksnog broja 600
– vrijednost realnog broja 337
– vrijednost vektora 627
Area-funkcije, (Area-sinus, Area-kosinus, Area- tangens, Area-kotangens) 248, grafovi 135, 136
– kompleksne varijable 608
argument, 331
– kompleksnog broja 600
Arhimedova spirala 147
aritmetička, progresija 205, 328
– sredina 207
Arkus-funkcije, (Arkus-sinus, Arkus-kosinus, Arkus-tangens, Arkus-kotangens) 239...242
– grafovi, 132, 133, neprekinutost 348
– kompleksne varijable 608
asembler 987
asimptote 303, 304
– hiperbole 262
asimptotska točka 301
asocijacija za skalarno množenje vektora 631
astroida 146

B

Bačva 277
bajt 981
baza, cikloide 143
– logaritama 174
– prirodnih logaritama 341
bazična matrica 858
– rješenja 859
Bayesova formula 793
Bellmanov princip maksimuma 734
Bernoulli, brojevi 364, tablica 365
– diferencijalna jednadžba 536
beskonačan interval 331
– skup 688
beskonačna grana krivulje 303
Bessel, diferencijalna jednadžba 564
– funkcija 565, tablica 91, 92
– interpolacione formule 936

beta-funkcija 499
bezvrtložno polje 649
bijektivno preslikavanje (bijekcija) 685
binarna operacija 663
– relacija 680
binarni veznici 665
binomna razdioba 794
binomni, integral 420
– koeficijent 210
– teorem 210, 211
bikvadratna jednadžba 181
bitnormala prostorne krivulje 310, 312
bitno singularna točka analitičke funkcije 616, 625
bitovi 981
blok shema 994
Booleova funkcija 666
Booleovo programiranje 897
brahistohrona 689
Borelov teorem 558
brid dvostranog kuta 218

C

Cardanove formule 180
Carson-Heavisideova operatorska metoda 557, tablica 562
Cassinijevi ovali 141
Cauchy, formule za funkcije kompleksne varijable i njene derivacije 622
– kriterij konvergencije 361
– metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi 550
– nejednadžba 202
– poopćeni teorem srednje vrijednosti 390
– problem 574, 584, 591
– teorem o prolaženju funkcije kroz nulu 349, za funkcije više varijabli 358
– uvjet za postojanje limesa funkcije 339
Cauchy-Riemannove jednadžbe 614
centralne, krivulje drugog reda 248
– plohe drugog reda 284...288
centralni granični teorem 822
– procesor 983
centralno polje, skalarno 640
– vektorsko 642
cijela funkcija 335, neprekinutost 348
cijeli, dio varijable 337
– racionalni izraz 165...168
ciklička (kružna) frekvencija harmonijskog titranja 234
cikloida 143, baza 143
ciklometrijske funkcije 239...242, grafovi 132, 133, neprekinutost 348
cilindar (eliptični, hiperbolni, parabolni) 288
cilindarske koordinate 270, 644
cilindarsko, skalarno polje 640
– vektorsko polje 642
cilindrične funkcije 565, tablica 91, 92
cirkulacija vektorskog polja 649
cisoida 137
Clairautova, diferencijalna jednadžba 538
– parcijalna diferencijalna jednadžba 576
Coulombovo polje 660
Cramerovo pravilo 192

Č

Čebiševljev inegral 420
– teorem 820
– – o alternansi 929
Čebiševljeva aproksimacija 929
Čebiševljevi polinomi 928
četverokut 214
čisto imaginarni brojevi 599
čunj 225, 286
čunjasta ploha 225, 275
čunjosječnice 266...269
čvorne točke 300, 540

D

D'Alembert, formula 584
– kriterij konvergencije 360
datoteka 989
dekadski logaritam 174, tablica 51, 52
dekrement (logaritamski) 129
delta-funkcija 558
derivabilnost 374, funkcija kompleksne varijable 613
derivacija, drugog reda 375
– elementarnih funkcija, tablica 377
– funkcija jedne varijable 371
– funkcija kompleksne varijable 612
– funkcija zadanih u parametarskom obliku 383
– grafička 383
– inverznih funkcija 383
– lijeva i desna 372
– parcijalna 372
– produkta 378
– prostorna 653
– razlomka 379
– skalarnog polja 646
– složene funkcije 379 (više varijabli 381)
– sume 378

derivacija, vektorske funkcije skalarne varijable 638
– višeg reda 380
Descartes, koordinatni sistem u ravnini 250
– koodinatni sistem u prostoru 270
– list 137
– koordinate vektora 629
– koordinate izražene s pomoću cilindarskih i sfernih koordinata 644
– pravilo 184
desni koordinatni sistem 270
determinanta, 189...192
– Jacobijeva 355
– sistema 192
– Wronskoga 549
diferencijal, 373
– drugi 376
– drugog reda 375
– luka 291
– skalarnog polja 647
– toalni 374
diferencijalna geometrija 290...325
diferencijalne jednadžbe, 531...597
– ekzaktne 534
–, integral 531
– obične 532...572
– parcijalne 572...597
– prvog reda 532
– višeg reda 545...550
diferencijalni račun 371...406
diferenciranje implicitne funkcije 381
– pod integralom 496
– vektora (pravila) 639
digitalna računala 990
dijeljenje, dužine u danom omjeru 252, 274
– kompleksnih brojeva 602
– s nulom 326
dinamički sistemi 720
direktna funkcija 334
direktrisa, elipse 259
– hiperbole 261
Dirichle, problem 590...661
– teorem 740
– uvjeti 740
disjunkcija 665
–, elementarna 669
diskretna slučajna veličina 794
diskretni slučajni vektor 805
diskriminanta, kvadratne jednadžbe 178
– kubne 179
disperzija slučajne varijable 801
distribucija za skalarno množenje vektora 631
divergencija, beskonačnog reda 359
– vektorskog polja 654
dodekaedar 223
donja granica određenog integrala 474
doskočice kod izračunavanja određenog integrala 478
druga kvadratna forma plohe 323
dualna simpleks metoda 870
duljina, krivulje na plohi 320
– kružnog luka s polumjerom jedan, tablica 83...86, 87
– kružnog luka za tetivu jednaku jedan, tablica 82
– luka 485, 506
– luka parabole 266
– normale 294
– polarne tangente i normale 294
– tangente 294
– vala 234
dvokrilni (dvoplošni) hiperboloid 285
dvostrani ugao 218
dvostruke točke 301
dvostruki integrali, 512, 513
– izačunavanje 514
dvostruko suvislo područje 353

E

Egzaktna diferencijalna jednadžba 534
ekscenricitet, elipse 259
– hiperbole 261
– parabole 264
eksces sferni 243
eksplicitna, funkcija 333
– funkcija više varijabli 354
eksponencijalna, funkcija (graf 124, tablica 68...74, neprekinutost 348)
– funkcija integral (određeni) 467 ... 473
– funkcija kompleksne varijable 606
– jednadžba 185
– opća funkcija kompleksne varijable 604...609
– razdioba 799
eksponencijalni izraz 165, 173...175
– oblik kompleksnog broja 600, 606
eksponent poopćeni 173
ekstremala funkcionala 714
ekstremi, funkcije jedne varijable 391
– funkcije više varijabli 393
– funkcionala 714
ekvipotentni skupovi 688
ekvivalentne, jednadžbe 176
– nejednadžbe 201
ekvivalentnost neizmjerno malih veličina 345
elektronička računala 980
element, determinante 189
– plohe 524

element, polja smjerova 533
– površine u Descartesovim koordinatama 515
– površine u polarnim i krivocrtnim koordinatama 516
– pravilnih poliedara (tablica) 223
– pravilnih poligona (tablica) 215
– volumen u cilindričnim koordinatama 518
– volumen u krivocrtnim koordinatama 519
– volumena u sfernim koordinatama 520
elementarna disjunkcija 669
– konjunkcija 669
– matematika 152...249
elementarne, funkcije 334...336 (grafovi 114...136, tablica 21...89, neprekinutost i prekinutost 347...349)
– transcendentne funkcije 604...609
elementarni događaj 785
elementi skupa 673
elipsa 259...261 (graf 122)
elipsoid, produljeni rotacioni 284
– spljošteni rotacioni 284
eliptična, parcijalna diferencijalna jednadžba 601
– točka plohe 323
eliptični, cilindar 288
– integral prve vrste 382, 413 (tablica 94, 95)
– integral druge vrste 422 (tablica 94, 95)
– integral treće vrste 422 (tablica 94, 95, 96)
– paraboloid 286
empirijska disperzija uzorka 827
– funkcija razdiobe 826
– sredina uzorka 827
empirijski momenti 831
epicikloida 144
– rastegnuta i stegnuta 146
epitrohoida 146
Euler, broj *e* 341 (tablica 68...74)
– brojevi 365 (tablica 365)
– formula za homogene funkcije 355
– formula za zakrivljenost 322
– formule za kompleksne brojeve 606
– inegral 208 (prve vrste 499, druge vrste 496)
– jednadžba 553
– konsanta C 341, 499, 501
– kutovi 273
– metoda određivanja ekstrema funkcionala 714
– multiplikator 534
– teorem za poliedre233
Euler-Lagraugeova diferencijalna jednadžba 692
Euler-Vennovi dijagrami 676
evoluta 306
evolventa 306, 307
evolventa kružnice 149

F

Faktorijela 207 (tablica 48)
fazni prostór 719
– vektor 719
Fermatov teorem 388
fleksija 313
formula, obrata 557
– parabola (Simpsonova) 481
– pravokutnika 481
– skraćenog množenja i dijeljenja polinoma 167
– za redukcije trigonometrijskih funkcija 231
Fourier, integral 754
– koeficijenti 741
– red (parne funkcije, neparne, neperiodske) 742
– red po svojstvenim vrijednostima funkcija 571
– transformacija 752, 756, 758
frekvencija 129
– slučajnog događaja 788
– titranja 234
fundamentalan, niz 331
– sistem rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe 548
– sistem rješenja homogenog sistema linearnih jednadžbi 197
funkcija cilja 851
– distribucije 793
– istinitosti 668
– plauzibilnosti 832
– uzorka 827
funkcije, analitičke 613
– Area 248
– Arkus 239...242
– Besselove 565 (tablica 91, 92)
– ciklometrijske 239...242
– cilindrične 565
– eksponencijalne 124
– elementarne 334...336
– gama 208 (tablica 90)
– Greenove 593
– harmonijske 614
– hiperbolne 245, 246
– holomorfne 613
– homogene 355
– iracionalne 122...124

funkcije, izvodnice 818
– jedne varijable 331...338
– kompleksne, realne varijable 609
– kompleksne varijable 604, 612...617
– konjugirane harmonijske 614
– kubne 115
– kugline 568 (tablica 93)
– kvadratne 114
– Laplaceove 614
– Legendreove 568 (tablica 93)
– linearne 114
– logaritamske 124
– Macdonaldove 566
– monogene 613
– monotone 337
– primitivne 407 (kompleksne varijable 621)
– razlomljene linearne 117
– razlomljene racionalne 117...122
– Riemannove 591
– slučajnih varijabli 813
– Sturmove 184
– točke 351
– trigonometrijske 129...131
– vektorske skalarne varijable 638
– više varijabli 350...358
– Weberove 565
funkcional 689

G

Gama-funkcija 208, 496 (ablica 90)
Gatov diferencijal 717
Gaussov integral pogrešaka 798
Gaussova kvadraturna formula 944
– metoda eliminacije 909
– – najmanjih kvadrata 974
– razdioba 798
– zakrivljenost plohe 324
Gauss-Banahievičeva metoda 911
Gauss-Čebiševljeva formula 946
Gauss-Lagendreova formula 946
Gauss-Osrogradskog formula 530
Gauss-Seidelova iteraciona metoda 915
geodetske linije na plohi 325
– linije na kugli 242
geografska duljina 317
geometrijska, 212...249
– na kugli 242
geometrijska, progresija 205 (konvergencija 359)
– sredina 207
geometrijske primjene vekorske algebre 637
geometrijsko određivanje hiperbolnih funkcija 249
glavna, kružnica kugle 600
– normala prostorne krivulje 310, 312, 313
– vrijednost argumenta arkus-funkcija 239
– vrijednost argumenta kompleksnog broja 600
– vrijednost nepravog inegrala 490, 493
glavni, normalni presjeci plohe 322
– polumjeri zakrivljenosti plohe 322
Gomorijeva meoda presjeka 898
gornja granica određenog integrala 474
– međa 683
gradijent 646, 647
– centralnog polja 647
– funkcionala 717
– polja eksremala 705
– vektorskog polja 657
gradijentne metode u optimizaciji 736
grafovi elementarnih funkcija 114...151
grafička derivacija 383
– integracija 482
– inegracija diferencijalnih jednadžbi 544
granična, vrijednost funkcije 338, (više varijabli 356)
– vrijednost funkcije kompleksne varijable 612
– razdioba 807
– vrijednost niza 329
granični element parcijalno uređenog skupa 683
– teorem, cenralni 822
– –, Moire-Laplaceov 821
– – za karakteristične funkcije 817
– uvjeti 531
Greenova, formula 530
– funkcija 593
– meoda rješavanja rubnih problema 593
– teoremi 659
Guldinov teorem (prvi 488, drugi 489)
gustoća, razdiobe vjerojatnosti 927

H

Haarov teorem 707
Hamilton, funkcija 557, 661
– načelo 700
– operator 656
Hamilton-Jacobijeva teorija 709
harmonijska analiza 739, 751
– funkcija 614
harmonijski red 359
harmonijsko titranje 234
Hasseov dijagram 683

Heaviside, operatorska metoda 557 (tablica 562)
– razvoj 559
heksaedar 223
hiperbola 261...264 (istostrana 117, graf 122)
hiperbolna, parcijalna diferencijalna jednadžba 581
– točka plohe 324
– trigonometrija 245...249
hiperbolne, funkcije 245, 246 (grafovi 133, 134, kompleksne varijable 607, tablica 68...71)
– jednadžbe 186
hiperbolni, paraboloid 286
– valjak 288
hiperboloid, dvokrilni (dvoplošni) 285
– jednokrilni (jednoplošni) 285
hipergeometrijska jednadžba 569
– radioba 796
hipergeometrijski red 569
hiperploha 352
hipocikloida, rastegnuta 146
– stegnua 146
hipotrohoida 146
hipotenuza 213
histogram 825
hodograf 638
holomorfna funkcija 613
homogena, diferencijalna jednadžba 534
– funkcija 355
– linearna diferencijalna jednadžba višeg reda s konstantnim koeficijentima 548 (rješavanje 550)
– parcijalna diferencijalna jednadžba 572
homogeni, rubni problemi 570
– sistem diferencijalnih jednadžbi 555
– sistem linearnih jednadžbi 192, 197
horizontale 642
Hornerova shema 921
Hurwitzov teorem 551
χ^2 – razdioba 828
χ^2 – test 842, 845

I

Identitet i identične pretvorbe 165...176
identične nejednadžbe 201
ikozaedar 223
imaginarna, jedinica 599
– krivulja 254
– os hiperbole 261
– os kompleksne ravnine 599
imaginarni, brojevi 599
– dio kompleksnog broja 599
implicitna funkcija 333 (više varijabli 354)
implikacija 666
impulsna funkcija 558
indikator događaja 794
individuumna varijabla 671
infimum 683
infinitezimalna veličina 344
infleksija 298
injektivno preslikavanje (injekcija) 685
inkluzija 674
inkopatibilan sistem 192
inkopatibilni događaji 787
integrabilna funkcija 474
integrator računala 991
intergraf 483
integral algebarskih funkcija (određeni) 503
– algebarske sume (određeni) 475
– Area-funkcija 473
– ciklometrijskih funkcija 471...473
– Čebiševa 420
– diferencijalne jednadžbe 531
– dvostruki 512, 514
– eksponencijalne funkcije (određeni) 467...473
– eliptički (prve vrste 409, tablica 94, 95, druge vrste 422, tablica 94, 95)
– Eulerov 208, 496, 499
– Fourierov 754
– Gaussov (pogrešaka 798)
– hiperbolnih funkcija 465...467
– iracionalnih funkcija 418...422 (tablica 436...450)
– krivuljni (prvog tipa 523...525, drugog tipa 525...529, općeg tipa 528, u vektorskom polju 648...650)
– logaritamskih funkcija 468...470 (određeni 501, 502)
– neodređeni 407...512 (tablica 410, 426...473)
– nepravi 489
– određeni 473...530 (izračunavanje 477...483)
– osnovni (tablica 410)
– ovisan o parametru 496...498
– plošni (prvog tipa 523...525, drugog tipa 525...529, općeg tipa 528)
– po dijelu plohe 523
– Poissonov 504, 595
– po luku krivulje 504
– po projekciji 506, 525
– potpuni eliptički 422 (tablica 94...96)
– potpuni nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe 1. reda 575

integral, po zatvorenoj krivulji 622
– po zatvorenoj plohi 653
– prekinutih funkcija 493...496
– rotacionih funkcija 412...418 (tablica 426...435)
– s neizmjernim granicama 489
– Stieltjesov 489
– trigonometrijskih funkcija 410 (određeni 499...501)
– trostruki 513, 517
– u kompleksnom području 620...623
– višestruki 514...520
integralna, eksponencijalna funkcija 467
– ploha diferencijalne jednadžbe 574
integralni, kriterij (Cauchy) 361
– logatiram 409
– račun 412...629
– teoremi 529, 530, 658...662
integrand 408
integriranje, binomnih diferencijala 420
– grafičko 482
– pod integralom 497
– pomoću residua 625
– razvojem u red 479
– totalnog diferencijala 509
intenzitet izvora polja 660
interpolacija 19
– kvadrana 230 (tablica 55)
– linearna 19
interpolacijski polinom 931
interpolacione formule, Beselove 936
– Gauss 936
– Newtonove 935
– Stirlingove 937
interpolacioni polinom 931
interval 332
inverz relacije 680
inverzna matrica 912
iracionalni, brojevi 327
– funkcije 335 (neprekinutost 348)
– izrazi 165, 171... 173
invarijante krivulja drugog reda 266
– ploha drugog reda 288
invarijantnost diferencijala 373
inverzija 190, 618
inverzne funkcije 334
ishodište koordinatnog sustava 250, 270
istokračan trapez 214
istostrana hiperbola 264
istostraničan trokut 213
iteraciona, metoda 188
– metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi 543
izobare 642
izolirane singularne točke diferencijalne jednadžbe 539
– točke krivulje 300
izotermna mreža 617
izračunavanje determinante 191

J

Jacobijeva determinanta 355
– diferencijalna jednadžba 696
– matrica 916
Jacobijev uvjet u varijacionom računu 696
jaki zakon velikih brojeva 820
jedinični vektori 627
jednadžba, 165, 176,,,200
– algebarska 176
– Bernoullijeva 536
– Besselova 564
– binormale 312
– Cauchy-Riemannova 614
– Clairautova 538, 576
– čunja 286
– diferencijalna 531...597 (obična 532...572, parcijalna 572...597)
– dvokrilnog hiperboloida 285
– elipse 277
– elipsoida 284
– eliptičkog paraboloida 286
– Eulerova 553
– Euler-Lagrangeova 692
– glavne normale 312
– hiperbole 261
– hiperbolnog paraboloida 286
– hipergeometrijska 569
– krivulje drugog reda 266
– krivulje u prostoru 275 (kompleksni oblik 609...611)
– krivulje u ravnini 268, 290
– kružnice 257, 258
– kugle 285
– Lagrangeova 538
– Laplaceova 586, 661
– Legendreova 568
– matematičke fizike 582
– normale krivulje 292
– normale na plohu 318
– normalne ravnine 312
– oskulatorne ravnine 312
– ovojnice porodice krivulja 308
– parabole 264
– Parsevalova 571
– ploha (čunjaste, rotacione, valjkaste) 275
– ploha drugog reda 288

jednadžba, Poissonova 586, 661
– pravca u prostoru 278 (vektorski oblik 635)
– pravca u ravnini 254, 257
– pravčaste plohe 325
– prvog približenja 542
– ravnine 276 (vektorski oblik 635, pramen 277)
– ravnine rektifikacije 312
– razmotljive plohe 325
– Riccatijeva 536
– rotacionog paraboloida 286
– s totalnim diferencijalima 579
– širenje topline 585
– tangente krivulje 292 (elipse 260, hiperbole 262, parabole 265)
– tangentne ravnine plohe 318
– teorije potencijala 585
– valna 583
jednolika, aproksimacija 929
– konvergencija reda funkcija 366
– neprekinutost 350 (više varijabli 357)
– razdioba 798
jednostavnija komformna preslikavanja 618
jednostruko suvislo područje 352
jednoznačne funkcije 331 (više varijabli 350)
jezik logaritamskog računala 158
Jordan-Dirichletov uvjet konvergencije Fourierovog integrala 755

K

Kanali izmjene 983
kanonski sistem 575
karakteristična, jednadžba 540, 550, 553, 916
– pruga nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda 575
– točka porodice krivulja 307
karakteristične funkcije 814
karakteristični, sistem linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi 573
– sisem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi 573
karakterisika, logaritma 49, 174
– parcijalne diferencijalne jednadžbe 574
– parcijalne linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda 580
– porodice krivulja 308
kardioida 140, 141
Kartezijev produkt skupova 678
Kartezijeva potencija skupa 678
kateta 213
kazaljka logaritamskog računala 158
Kirchoffova formula 584
klase ekvivalencije 682
klasična definicija vjerojatnosti 790
klasifikacija, linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog rada 579
– točka na plohi 323, 324
klin 222
klizni vektori 627
klotoida 150
kocka 220
koeficijent, Fourierov 741
– korelacije 809, 847
– linearne kombinacije 188
– rastava vektora 629
– regresije 847
– smjera pravca 254
kolinearni vektori 627
Kolmogorovljev teorem 821
kombinacije 209
kompilatori 987
komplanarni vektori 629
kompleksije 209, 210
kompleksne funkcije realne varijable 609
kompleksni brojevi i funkcije kompleksne varijable 599...626
komplement skupa 676
komplementarni događaj 787
komponenta vektora 629
kompozicija preslikavanja 685
komutacija za skalarni produkt 631
konačan skup 688
konačna prekinutost funkcije 347
konačni redovi 206
konformno preslikavanje 616...619
konhoida 138, 140
konjugirana, harmonijska funkcija 614
– jednadžba linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi 591
konjugirano kompleksni brojevi 601
konkavnost krivulja 295
konstante (tablica 21)
konstrukcija grafova funkcija 304
konveksni poliedar 855
konveksni višestrani ugao 219
konveksnost krivulja 295
konvergencija, reda potencija 368 (kompleksne varijable 606)
– reda s konstantnim članovima 359
konzervativno vekorsko polje 649
konjunkcija 665
koordinate, cilindarske 270
– krivocrtne 251 (Gaussove na plohi 316)
– krivocrtne u prostoru 271

koordinate, polarne 251
– pravokutne Descartesove 250 (u prostoru 270)
– sferne 271
– težište sistema materijalnih točaka 253, 274
– vektora 629, 630
koordinatna, linija 251
– os 250, 270
– ploha 270
korelacija 846
korijen, jednadžbe 176, 182
– kompleksnog broja 603
– kubni 22 (tablica 24...43)
– kvadratni 22 (tablica 24...43)
– na logaritamskom računalu 162
– polinoma 182
– prekobrojni algebarske jednadžbe 177
– pretvorbe 172
– višestruki algebarske jednadžbe 182
kosekans, 229
– hiperbolni 246
kosinus 246 (graf 130, tablica 56, 57, 60 ... 63)
– hiperbolni 245 (graf 134, tablica 68...71)
kosinusov poučak 237 (za sfernu trigonometriju 244)
kotangens, 288 (graf 131, tablica 58, 59, 64...67)
– hiperbolni 246 (graf 134, tablica 68...71)
kovarijantne koordinate vektora 636
kriterij konvergencije reda brojeva (D'Alembertov 360, Cauchyjev 361)
– suglasnost Kolmogorov-Smirnova 846
krivulja 136...151
– algebarska 254
– drugog reda (čunjosječnica) 266...269
– imaginarna 254
– kompleksni oblik 609, 610
– normalne razdiobe (Gaussova) 125
– odmatanja 307
– prigušenog titranja 129
– prostorna 275
– regresije 812
– transcendentna 254
– vrtložna vektorskog polja 656
krivuljni, integral 503...530
– integral prvog tipa 504...506
– integral drugog tipa 506...512
– integral u vektorskom polju 648...650
krnja piramida 221
krnji, uspravni čunj 225
– uspravni valjak 224
krug, konvergencije reda s kompleksnim članovima 606
krug, površina na logaritamskom računalu 158
– tablica za opseg 78, 79
– tablica za površinu 80, 81
– kružna (ciklična) frekvencija harmonijskog titranja 234
kružna (umbilikalna) točka plohe 323
kružni, isječak (sektor) 217
– odsječak (segment) 217 (tablica 82...86)
– uspravni čunj i valjak 225
– vijenac 217
kružnica 216, 257, 258
kub, binoma 167
– tablica 24...43
kubna jednadžba 179
kugla (isječak, odsječak, sloj) 226, 285
kut, dvaju pravaca 256 (mimosjernih 220)
– dviju ravnina 277
– između ravnina i pravaca 282, 283
– krivulja na plohi 320
– nutacije 273
– plošni 218
– pravca i ravnine 282
– precesije 273
– prostorni 219
kvalitativno programiranje 996
kvantifikatori 672
kvocijent geometrijske progresije 206
kvadrat, 214
– binoma 167
– tablica 24...43
kvadratna, interpolacija (tablica) 55
– jednadžba 178
– sredina 207
kvadratni, korijen 22 (tablica 24...43)
– korijen linearnog binoma 122
– korijen kvadratnog trinoma 122
– trinom 114
kvazilinearna jednadžba 572

L

Lagrange, interpolacijski polinom 931
– jednadžba 538
– metoda određivanja ekstrema 394
– teorem srednje vrijednosti 389
lančanica 150
lančano pravilo 379
Laplace, diferencijalna jednadžba 586, 708
– funkcija 614
– operator 656...658
– transformacija 557, 774
Laurentov red za analitičke funkcije 624

Legendre, jednadžba 568
– polinom 568, 925 (tablice 93)
– uvjet u varijacionom računu 690
Leibniz, formula 380
– kriterij konvergencije 363
Leibniz-Newtonov teorem 476
leksikografski poredak vektora 867
lemniskata 142
L'Hospitalovo pravilo 342
lice plohe 651
lijeva derivacija 372
lijevi koordinatni sistem 270
likovi u ravnini 212...217
limes, funkcije 338...344 (više varijabli 356, kompleksne varijable 612)
– niza 329
linearna, funkcija 115
– interpolacija 188
– jednadžba 178 (diferencijalna 535, 548, parcijalna 566, 579...597)
– kombinacija vektora 628
– nezavisnost rješenja homogenog linearnog sistema 197
– regresija 812
linearni, sistem 192 (homogeni 197)
– sistem diferencijalnih jednadžbi 553...557
linearno programiranje 851
– –, cjelobrojno 897
– –, parametarsko 890
linije zakrivljenosti plohe 323
linijski element plohe 320, 321
Liouville, formula 549
– teorem za funkciju kompleksne varijable 615
Lipschitzov uvjet 532
Lobačevskij-Graffeova metoda 921
logaritam, Briggsov (dekadski) 174 (tablica 51, 52)
– modul pretvorbe 174, pravila 175
– prirodni ili Neperov (hiperbolni(174 (tablica 74...76)
– prirodni u kompleksnom području 606
logaritamska, derivacija 379
– funkcija 124
– jednadžba 186
– krivulja 124
logaritamski, dekrement 129
– izrazi 165, 173...175
logaritamsko računalo 156...164
logika sudova 663
logičke operacije 663
logički veznici 663
luk, duljina 458, 506
– tablice duljine luka za tetivu jednaku jedan 82
luk, tablice duljine luka kružnice s polumjerom jedan 83...86

M

Macdonaldova funkcija 566
Maclaurinov red 396 (tablica 398)
majoranta 367, 683
maksimalni element parcijalno uređenog skupa 683
maksimum 391
mantisa logaritma 174 (tablica 51, 52)
masa, lika s plošnom gustoćom 521
– luka krivulje 506
– nehomogene zakrivljene plohe 525
– tijela 522
matematička logika 663
– nada (očekivanje) 800
matematičko programiranje 851
matrica 193
– kovarijance 809
Mayer-Bolzova zadaća varijacionog računa 708
memorija računala 981
metoda, aproksimacije 480
– artificijelnih varijabli 864
– grananja 901
– iteracije 188, 913, 923
– Lobačevskoga za rješavanje algebarskih jednadžbi *n*-tog stupnja 185
– momenata 831
– najmanjih kvadrata 974
– najveće plauzibilnosti 832
– neodređenih koeficijenata kod rastavljanja razlomljenih racionalnih izraza na parcijalne razlomke 170
– operatorska za rješavanje diferencijalnih jednadžbi 557...562, 596
– Ostrogradskoga za rješavanje integralnih jednadžbi 416
– postupnog približenja (Picard) za rješavanje diferencijalnih jednadžbi 543
– upravljanja 965
– varijacije konstanata 549, 556
meridijan na kugli 237
metrika plohe 321
Meusnierov teorem 321
minimalna ploha 324
minimalni element parcijalno uređenog skupa 683
minimum 391
minora, elemenata determinante 190
– matrice 193

minoranta 683
Mizesova metoda nalaženja svojstvenih vrijednosti 918
mjerilo 30
mješovita parcijalna derivacija 375
modificirana dualna simpleks metoda 875
– simpleks metoda 871
modul, analitičke funkcije 614
– kompleksnog broja 600
– pretvorbe logaritama 174
– vektora 627
– Youngov 597
Moivreova, formula za hiperbolne funkcije 247
– formula za kompleksne brojeve 603
moment, inercije homogenog lika 488
– inercije homogenog luka krivulje 488
– inercije lika s obzirom na os *i* pol 521
– inercije tijela s obzirom na os *Oz* 522
– korelacije 809
momenti razdiobe 799
– višedimenzionalne slučajne varijable 807
monogena funkcija 613
monotona funkcija 337 (uvjeti 387)
monotoni niz 325, 330
množenje, kompleksnih brojeva 601
– vektora 632
mreža, izoterma 617
– krivulja na plohi 316
multiplikator Eulerov 534

N

Nabla operator 656
najkaća udaljenost dvaju pravaca 279
najmanja vrijednost funkcije 350 (više varijabli 358)
najveća vrijednost funkcije 350 (više varijabli 358)
neelementarne funkcije 336, 337
negacija relacije 680
– suda 669
nehomogen, rubni problem 570
– sistem 192, 194, 556
nehomogena diferencijalna jednadžba 548
neizmjerna prekinutost 346
neizmjerni limes funkcije 329
neizmjerno male i velike veličine 344, 345
nejednadžbe 200...205
nejednolika konvergencija reda funkcija 366
nekorelirane slučajne varijable 809
nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba 575
nemoguć događaj 786
neodređeni, integral 407...473 (tablica 426...473)
– oblici 342...344
– sistem 194
neograđenost funkcija kompleksne varijable 615
neparne funkcije 338
neperiodičan beskonačan decimalni razlomak 327
Neper, logaritam (vidi prirodni logaritam) 174
Neperovo pavilo 244
nepotpuni eliptički integral 422
nepoznanica 176
nepravi integrali 489...496
neprebrojiv skup 688
neprekinuta slučajna varijabla 797
neprekinuti slučajni vektori 806
neprekinutost, funkcija realne varijable 345...350 (više varijabli 357)
– funkcija kompleksne varijable 612
nerješiv nehomogen linearni sistem 194
netrivijalno rješenje homogenog linearnog sistema 197
neusporedivi elementi parcijalno uređenog skupa 683
Newton, formula 210
– formule interpolacije 932
– metoda 187, 920
– polje 660
Newton-Kantorovičeva metoda rješavanja nelinearnih sistema 922
nezavisna varijabla 331
nezavisnost, funkcija od nekoliko varijabli 357
– integrala od puta (u realnom području 509, u kompleksnom području 621)
– rješenja homogenog linearnog sistema 197
– slučajnih varijabli 810
Nikomedova konhoida 138
nivo linije i plohe 640
nomografija 970
nomogram 971
normala, krivulje 292, 310
– plohe 317
normalna ravnina prostorne krivulje 310, 312
normalni, oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe 580, 581
– oblik Riccatijeve jednadžbe 536
– sistem diferencijalnih jednadžbi 553
normalna razdioba 798

normalno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima 559
normirana svojstvena funkcija 571
nula u skupu kompleksnih brojeva 600
nultočka 326
nulvektor 627
numerička harmonijska analiza 751
numeričke metode 905...979
numeričko integriranje diferencijalnih jednadžbi 544, 951
nutacija 273

O

Obelisk 222
obične diferencijalne jednadžbe 531...572
obilježje rješivosti nehomogenih linearnih sistema 195
obla tijela 223...227
oblik površine drugog reda 291
obodni kut 216
obrat reda potencija 396
– zadaće varijacionog računa
ocjena određenog integrala 476
odnosi među arkus-funkcijama 240...242
određeni integral 473...503 (tablica 498...503)
oduzimanje, kompleksnih brojeva 601
– vektora 628
odvajanje racionalnog dijela integrala (metoda Ostrogradskoga) 416
ograđenost, funkcije 338, 350 (više varijabli 358, kompleksne varijable 615)
– niza 330
opća eksponencijalna funkcija 607
– teorija krivulja drugog reda 266...269
– teorija ploha drugog reda 288, 289
opći, član niza 328
– član reda brojeva 359
– integral diferencijalne jednadžbe 532, 546
operatori, Hamiltonov 656
– Laplaceov 656
operacija vješanja kvantifikatora 672
operativni sustav 981
– operatorska metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi 557...562 (parcijalnih diferencijalnih jednadžbi 596)
optimalni proces 722
optimalno upravljanje 719
ordinata 250, 270
original transformata zadane funkcije 557
orijentirana ploha 525
Ort 628
ortocentar trokuta 212
ortogonalnost, funkcija 739
– s težinom 571
– vektora 631
ortonormirani sustavi funkcija 739
oscilacija funkcije 350
osi, elipse 259
– hiperbole 261
– parabole 264
– koordinatne 250, 270
oskulatorna ravnina 310, 312
osnovne formule integralnog računa u kompleksnom području 621
osnovni, integrali (tablica 410)
– teorem algebre 182
– teorem integralnog računa 477
osobite točke krivulja u ravnini 298...302
ostatak, alterniranog reda brojeva 363
– konvergentnog reda brojeva 359
– reda funkcija 366
– reda potencija 396
Ostrogradski-Gaussov teorem 530 (vektorski oblik 658)
otvoreni interval 332
oval Cassinijev 141, 142
ovojnice porodice krivulja 307, 308

P

Parabola 264, 266 (graf 114, 122)
– kubna 115
– *n*-tog reda 117
parabolna točka plohe 324
parabolni valjak 288
paraboloidi (eliptični, rotacioni, hiperbolni) 286
parabolična parcijalna diferencijalna jednadžba 580
paralele na kugli 317
paralelepiped 220
paralelogram 213
paralelni pomak 251, 272
paralelnost, dvaju pravaca 257
– dviju ravnina 218
– pravca i ravnine 281
parametar 165
– razdiobe (distribucije) 798
parametarski oblik zadavanja funkcije 333 (više varijabli 354)
parametarsko linearno programiranje 890
parcijalna, derivacija 372
– diferencijalna jednadžba 531, 572...597

parcijalna, integracija 409, 478
– suma reda brojeva 359 (reda funkcija 366)
parcijalni diferencijal 374
– uređaj 682
parne funkcije 338
Pascalov puž 140
Parsevalova jednadžba 571
period funkcije 338
permutacije 209
Picardova metoda postupnog približavanja 542
Pierceova strelica 667
piramida 220, 221
planimetrija 212...217
planimetar 483
planparalelno polje 640
ploha, čunjasta 225
– integralna nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda 574
– konstantne zakrivljenosti 324
– valjkasta 223
– višelisna (Riemannova) 612
plohe, teorija 316...325
– drugog reda 284...289
plošni, kut 218
– integral 523...529 (vektorski oblik 651...653)
početni uvjeti 531
podintegralna funkcija 408, 474
područje, definicije funkcije 331 (više varijabli 354)
– integrabilnosti dvostrukog integrala 513
– konvergencije reda funkcija 366
podskup 674
pogreška, kod približnog računanja 152
– sistematska i slučajna 906
Poisson, formula 584
– integral 595
– jednadžba 586, 661
– razdioba 796
pol funkcije kompleksne varijable 616
polaganje plohe na plohu 321
polarna subtangenta i subnormala 294
polarni koordinatni sistem 251
poliedar 222 (tablica pravilnih poliedara 223)
poliedarski skup 855
poligon 215, 253
polinom 166, 167 (graf 114...117)
polinomijalno distribuirani slučajni vektor 805
polugrupa 687
polje, konzervativno 649
– skalarno 639...642
– smjerova 533
polje, s točkom izvora 660
– teorija 639...662
– vektorsko 642...645
polovište dužine 274, 313
polumjer, konvergencije reda potencija 368 (kompleksne varijable 606)
– torzije 315
– zakrivljenosti 295, 313 (elipse 260, hiperbole 263, parabole 265)
poluotvoreni interval 332
popratni trobrid 309
posvuda neprekinute funkcije 346
potencija 44 (tablica 44, 45, 49, graf 117, 122, 123, pretvorbe 172, 173)
– kompleksnog broja 603
potencijal, konzervativnog polja 650
– retardirani 584
– u vektorskom polju 649
potencijalno vektorsko polje 649
potpuni, eliptički integral 422
– integral jednadžbe s totalnim diferencijalima 579
– integral nelinearne parcijalne jednadžbe prvog reda 575
potpuno ortonormirani sistem funkcija 739
– uređen skup 684
povećana matrica 195
povratne točke 300
površina krivocrtnog trapeza 484
– krivuljnog sektora 485
– poligona 253
– rotacione plohe 486
– zakrivljene plohe 525
pramen ravnina 277
pravac (jednadžba 254, u prostoru 278)
pravčaste plohe 325
pravčasti i mrežni dijagrami 971
pravila diferenciranja 378 (integriranja 409...411)
pravokutni trokut 213
pravokutnik 214
prazna relacija 680
prazni skup 674
prebrojivi skupovi 688
precesija 273
predikati 671
predznak (signum) varijable 337
presjek skupova 675
preračunavanje stupnjeva u radijane (tablica) 87
preslikavanje skupova 684
prestanak funkcije 346
pretvorbe, identiteta 165...176
– određenih integrala 477

približna harmonijska analiza
približno, deriviranje i integriranje 941, 949
– računanje 152...164
– rješavanje jednadžbi 187
prikloni kut tangente 293
primitivna, funkcija 407, 408
– funkcija totalnog diferencijala 510
– funkcija u kompleksnom području 621
primjene određenih integrala 483...489 (višestrukih 521, 522)
princip maksimalnih lanaca 684
– maksimuma Pontrjagina 689, 723
prirodni logaritam (vidi pod logaritam) u kompl. području 606
problem dvaju tijela 577
procjena integrala u kompleksnom području 621
procesori 981
procjena parametara u statistici 829
produkt događaja 787, 791
–, mješoviti 632
– skalara i vektora 628
– relacija 680
– skalarni 625
– skupova 678
– vektorski 632
– višestruki 632
programiranje na računalu 983
progresije 205...207
proporcionalni dijelovi 88, 89
proporcionalnost 114, 117
propozicijska varijabla 665
propozicijske formule 665
prosta zadaća varijacionog računa 690
prsten 687
prostorne krivulje 309...315
prva kvadratna forma plohe 320
prvi integral sistema 547
pseudosfera 324
put, 487
– integracije 504

R

Racionalna točka 327
racionalne funkcije 335
racionalni brojevi 326, 327
– izrazi 165 ... 171
račun limesa 342
– varijacija 689
rad, 487
– polja sila 649
radijan 228 (tablica 87)
radijvektor 251, 271, 628
rang matrice 194
ravnalica (elipse 259, hiperbole 262)
ravnina 218, 276
ravninska trigonometrija 228 ...242
razdioba, binomna 794
–, eksponencijalna 799
–, granična 807
–, hipergeometrijska 796
–, χ^2 828
–, jednolika 798
–, normalna (Gaussova) 798
–, Poissonova 796
–, Studentova 828
–, uvjetna 810
razlika aritmetičke progresije 205
– skupova 675
razlomci 168, 169
razmjeri 171
razmotljive plohe 325
razvoj funkcije u red po svojstvenim funkcijama 571
realna os, hiperbole 261
– kompleksne ravnine 599
realni, brojevi 326...328
– dio kompleksnog broja 599
recipročne vrijednosti 46 (tablica 46...48)
red, brojeva 359...365
– funkcija 366...370
– hipergeometrijski 569
– krivulje 254
– neizmjerno malih veličina 345
– obične diferencijalne jednadžbe 531
– potencija 368...370 (analitičke funkcije 623...626)
– potencija s kompleksnim članovima 604...606
– veličine diferencijala 376
refleksivna relacija 680
regresija 846
regresijska zavisnost 811
regula falsi 188
regularna točka funkcije kompleksne varijable 614
rektifikaciona ravnina 310, 312, 313
rekurzivne formule za binomne integrale 451
relacija, binarna 680
– ekvivalencije 681
–, *n*-arna 680
–, potpuna 680
–, prazna 680
–, refleksivna 680
–, simetrična 680

relacija, tranzitivna 680
– uređaja 682
relativna krajnja pogreška kod približnog računanja 152
reljef funkcije kompleksne varijable 614
residuum 625
resolventa 200
retardacija 558
retardirani potencijal 584
Riccatijeva diferencijalna jednadžba 536
Riemann, funkcija 591
– metoda za rješavanje Cauchyjevog problema 591
– ploha 612
– teorem 362
riječ računala 982
Ritzova metoda u varijacionom računu 715
rješenja, diferencijalne jednadžbe 531
– jednadžbe 176
Rolleov teorem 389
romb 214
rotacija vektorskog polja 654, 655
rotaciona ploha 275
rubni problemi 569...572, 957
– uvjeti 699
Runge-Kuttova metoda, rješavanja običnih diferencijskih jednadžbi 952

S

Samoadjungirane jednadžbe 570
Sarrusovo pravilo 191
sedlo 324
sedlasta točka 394, 541
segment (kružni, tablica 82...86)
sekans 229, 246 (graf 131)
sekanta kružnice 216
sekularna jednadžba 916
separacija varijabli 586
Serret-Frenetove formule 315
sferna trigonometrija 242...245
sferni, eksces 243
– koordinatni sustav 270, 644
– trokut 243
sferno vektorsko polje 642
Shefferov potez 667
sigurni događaj 786, 788
silazna, aritmetička progresija 205
– geometrijska progresija 206
silnice 645
simbol supstitucije 477
simetrala kuta dvaju pravaca 212, 256
simetrična razlika skupova 675
– relacija 680
simpleks metoda 859
– –, modificirana 871
– –, –, dualna 871
– tablica 857
Simpsonova formula 481
singularna točka, analitičke funkcije 624
– diferencijalne jednadžbe 539
– funkcije kompleksne varijable 614 (uklonjiva 616, bitna 616)
– integrala diferencijalne jednadžbe 532, 538, 539
– krivulje 300...302
– plohe 322
sinus 228 (graf 129, tablica 56, 57, 60...63)
– hiperbolni 245 (graf 133, tablica 68...74)
sinusoida (opća) 234
„sinusov" poučak 237 (za sfernu trigonometriju 244)
sistem, linearnih jednadžbi 177
– linearnih diferencijalnih jednadžbi 533...561
– rješenja diferencijalne jednadžbe 548
– vrijednosti argumenata 351
sistematske pogreške 906
sistemi sa razdvojenim parametrima 730
sjecište ravnina i pravaca 280, 281
skalar 627
skalarni produkt 630
– tok vektorskog polja 652
skalarno polje 639
skup 673
– indeksa 678
–, konačan i beskonačan 688
–, neprebrojiv 688
–, prebrojiv 688
slični trokuti 213
slobodna varijabla 672
slobodni vektori 627
slobodno preimenovanje varijabli 673
složene funkcije 336
slučajna pogreška 906
– veličina (varijabla) 793
slučajni događaj 785
– pokus 785
– vektori 804
– –, diskretni 805
– –, neprekinuti 806
– uzorak 824
solenoidalno polje 660
smjer na krivulji 290
sniženje reda diferencijalne jednadžbe 547
specijalne funkcije 336
spirale 147...150
splajn – interpolacija 937

središnjica, trapeza 214
– trokuta 213
srednja zakrivljenost plohe 324
stacionarne točke 391
stabilna procjena 830
standardna devijacija 801, 803
statistički skup 824
stereometrija 218...227
Stirlingova formula 208
Stokesova formula 529
stožac 225
striktne nejednadžbe 201
sriktno monotoni niz 330
strofoida 165
strujnice 645
stupac determinante 189
stupanj, homogenosti 355
– jednadžbe 176
Studentova razdioba 828
Sturmov niz 184
Sturm-Liouvillov teorem 184
subnormala 294
subtangenta 294
sud 663
suma događaja 786
superpozicija rješenja lin. dif. jednadžbi 549, 556
supremum 683
suprotni događaj 787
supstitucija u određenom integralu 477
surjektivno preslikavanje 685
suvislo područje 331 (dviju varijabli 352)
svojstvene funkcije 570
– vrijednosti 570

Š

Šiljak vektora 627
šiljci (povratne točke) krivulje u ravnini 300
širenje topline u homogenoj šipci 590
štap logaritamskog računala 158

T

Tablica antilogaritama 53, 54
– Besselovih funkcija 91, 92
– cilindričnih (Besselovih) funkcija 91, 92
– dekadskih logaritama 51, 52
– derivacija elementarnih funkcija 377
– derivacija višega reda jednostavnih funkcija 380
– duljina lukova kružnice s polumjerom jedan 88
tablica, duljina lukova za tetivu jednaku jedan 82
– duljina lukova segmenta kruga s polumjerom jedan 82
– duljina tetiva segmenata kruga s polumjerom jedan 83...86
– dvostrukih integrala 521
– eksponencijalnih funkcija za x od 0 do 1,6 (argument u lučnoj mjeri) 68...71
– eksponencijalnih funkcija za x od 1,6 do 10; 72...74
– elemenata kružnog segmenta 82...86
– elementarnih funkcija 21...89
– eliptičkih integrala druge vrste 94, 95
– eliptičkih inegrala prve vrste 94, 95
– eliptičkih integrala, potpunih 96
– F-razdiobe 106...111
– faktorijela 48
– Fourierovih transformata 759...773
– funkcije razdiobe 100, 101
– Gama funkcije 90
– gustoće razdiobe 99
– hiperbolnih funkcija (u lučnoj mjeri) 68...71
– istinitosti 663
– konstanti 21
– kritičnih brojeva za Wilcoxonov test 112
– kuba 24...43
– kubnih korijena 24...43
– kuglinih funkcija 93
– kvadrata 24...43
– kvadratnih korijena 24...43
– Legendreovih polinoma 93
– neodređenih integrala 426...473
– određenih integrala 498...503
– opsega kruga s promjerom d 78, 79
– osnovnih funkcija 21...89
– osnovnih integrala 410
– Poissonove razdiobe 97, 98
– potencija brojeva 2, 3 i 5; 49
– potencija cijelih brojeva od 1 do 100; 44, 45
– potpunih eliptičkih integrala 96
– površina kruga s promjerom d 80, 81
– poršina kružnog segmenta s polumjerom jedan 83...86
– površina kružnog segmenta za tetivu jednaku jedan 82
– prirodnih logaritama 74...76
– prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija 56...67
– proporcionalnih dijelova 88, 89
– prvih članova nekih potencija reda potencija 369, 370
– razdiobe Kolmogorova-Smirnova 113

tablica, razvoja u Fourierov red 743...750
– razvoja nekih funkcija u redove potencija 398...406
– recipročnih vrijednosti 46, 47
– sa dva ulaza 353
– specijalnih funkcija 90...113
– Studentove t-razdiobe 104
– suma nekih redova brojeva 363...365
– t-razdiobe Studenta 104
– transformiranih funkcija po Carsonu-Heavisideu 562
– trigonometrijskih funkcija u lučnoj mjeri 68...71
– trostrukih integrala 522
– visina segmenata kruga s polumjerom jedan 83...86
– z-razdiobe 105
– za kvadratnu interpolaciju 55
– za preračunavanje stupnjeva u radijane 87
– λ-razdiobe Kolmogorova-Smirnova 113
– χ^2-razdioba 102, 103
tangens 228, (graf 130, tablica 58, 59, 64...67)
– hiperbolni (graf 134, tablica 70, 71)
tangensov poučak 237
tangenta, krivulje 292 (elipse 260, hiperbole 262, parabole 265)
– prostorne krivulje 309, 311
tangentna ravnina plohe 317
Taylorov, red za analitičke funkcije 623
– red za funkcije dviju varijabli 397
– red za funkciju jedne varijable 395
– za funkcije skalarne varijable 642
– teorem 390
temeljni (fundamentalni) niz 331
teorem o dualitetu 869
– o konvoluciji 758, 775
– o reziduumima 625
– srednje vrijednosti diferencijalnog računa 389
– srednje vrijednosti integralnog računa 475 (poopćeni 476)
– polja 639...662
– vjerojatnosti 785...793
terminal 988
tetiva kružnice 216 (tablica 83...86)
tetraedar 221
težišnica trokuta 212 (trigonometrijski 237)
težište, homogenog lika 521
– homogenog tijela 522
– luka krivulje 488
– trokuta 212
tijelo 688
tipovi prekinutosti funkcija 346
titranje, kružne membrane 588
– napete žice 586
– šipke 587
tjemena krivulje 300
tlak 487
točka, infleksije 392
– loma 300
– najkraće udaljenosti 307
– povratna 291
– prekidanja 291
– prekinutosti funkcije 346
– samotangiranja 300
– singularna 300...302, 322, 532, 538, 539, 614, 616, 624
– trostruka 301
tok, skalarni vektorskog polja 652
– skalarnog polja 652
– vektorski vektorskog polja 652
totalna vjerojatnost 792
totalni diferencijal 374
torus 227
torzija 314
traktrisa 146
transcendentan broj 327
transcendentna, funkcija 334, 335
– jednadžba 185...189
– krivulja 254
transformacije, jednadžbe krivulje 2. reda 251, 252
– koordinata 251, 252
– Laplaceove 557
translatori 987
transportna zadaća 876
tranzitivna relacija 680
tranzitivnost 201
transformacija jednadžbi krivulja drugog reda na normalan oblik 244, 245
trapez 214
trapezna formula 481
trigonometrija, hiperbolna 245...249
– ravninska 228...249
– sferna 242...245
trigonometrijske, funkcije 228 (neprekinutost 348)
– funkcije kompleksne varijable 607
– funkcije, vrijednosti za kutove višekratnika od 30° i 45° (tablica) 230
– jednadžbe 186
trigonometrijski oblik kompleksnog broja 600
trivijalno rješenje, homogenog linearnog sistema 197
– homogenog rubnom problema 570

trohoida 143
trokut 212, 236, 243
trostrani ugao (trobrid) 219

U

Udaljenost, dviju točaka 252, 274
– dviju paralelnih ravnina 277
– točke od pravca 255, 279
– točke od ravnine 278
uklonjiva, prekinutost funkcije 347
– singularna točka funkcije kompleksne varijable 616
ultrahiperbolna parcijalna diferencijalna jednadžba 581
umbilikalna točka plohe 323
unarni veznik 665
unija skupova 675
univerzalna algebra 687
upavljački uređaji 981
uređajna relacija 682
uređena *n*-torka 677
usporedivi elementi 683
uspoređivanje redova s pozitivnim članovima 360
uvjet, konvergencije nepravog integrala 491
– Lipschitzov 532
– monotonosti funkcije 387
– transverzalnosti 724
– za posojanje limesa funkcije 339
uvjetna konvergencija reda brojeva 362 (reda s kompleksnim članovima 606)
– razdioba 810
– vjerojatnost 790
uvjetni maksimum i minimum 394
ulazna funkcija 337
ulazni niz 330

V

Valna jednadžba 583
valjak i valjkasta ploha 223, 224, 275, 288
varijabla 176
varijacija 209
– funkcionala 692
varijacioni princip 700
– račun 689
varijanca 801
vektorska, algebra 627...637
– funkcija skalarne varijable 638, 639
– iteracija 918
vektorski, dijagram sinusnih veličina 235
– produkti 631, 632
– račun 627...662
vektorsko polje 642...645
„Versiera" Marije Agnesi 137
vezani algoritam rješavanja linearnih sustava 911
– maksimum i minimum 394
– vektori 627
vezano preimenovanje varijable 673
visina, piramide 221, trapeza 214, trokuta 212 (trigonometrijski 237)
višekut 215
višelisna (Riemannova) ploha 612
višestruke točke 301
višestruki limesi 357
višeznačne funkcije 331 (više varijabli 350)
vjekovna jednadžba 916
vjerojatnost 788
– teorija 785...823
volumen, rotacionog tijela 486
– tijela omeđenog zatvorenom plohom 529
– trostrane piramide (analitički) 274
vrijednosti istinitosti sudova 663
vrtložne krivulje vektorskog polja 656
vrtnja osi kao transformacija koordinata 252, 272

W

Weberova funkcija 565
Weierstrassov kriterij za jednoliku konvergenciju reda funkcija 367
– teorem 929
Weierstrassova *E* funkcija 697
Weierstrass-Erdmannov uvjet 695
Wielandova metoda za svojstvene vrijednosti matrica 918
Wilcoxonov test 841
Wronskoga determinanta 549

Y

Youngov modul 597

Z

Zadaće optimalnog upravljanja 723
zagrada 465
zakon velikih brojeva 819
– – –, jaki 820

zakrivljenost, krivulje 295
– krivulje u prostoru 313, 314
– krivulje na plohi 321
– plohe 321...324
– srednja plohe 324
– totalna (Gaussova) plohe 324
zamjena, granica u određenom integralu 475
– varijabli u diferencijalnim izrazima 385...387
zatvoreni interval 332
zavisnost funkcija 355
zavojnice, 314
– Arhimedova 145
– hiperbolna 146
– logaritamska 146
zbrajanje, kompleksnih brojeva 601
– vektora 628
zlatni rez 207
Zornova lema 686
Zornovi principi maksimalnosti 684

Ž

Žarišni parametar, elipse 259
– hiperbole 261
– parabole 264
žarište, elipse 259
– hiperbole 261
– parabole 264
žarište kao vrsta singularne točke 541

UNIVERZALNE OZNAKE

$=, \neq, \equiv$	jednako, nejednako, identično jednako
$\approx$	približno jednako
$\sim$	ekvivalentno, slično
$> (<), \geq (\leq)$	veće manje, veće manje ili jednako
$+, -, \times (\cdot), :(/, -)$	zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje
$\sqrt{\ }, \sqrt[n]{\ }$	drugi korijen, n-ti korijen
Σ, Π	suma (zbroj), umnožak (produkt)
$\perp, \parallel$	okomitost, paralelnost
$\sphericalangle, \triangle$	kut, trokut
$^\circ, ', ''$	stupanj, minuta, sekunda
$\rightarrow$	teži prema, preslikavanje
∞	beskonačnost
$\int, \int_a^b, \oint$	integral, određeni integral, krivuljni integral
$\Lambda, \Box, \nabla$	operatori: Laplaceov, D'Alembertov, Hamiltonov („nabla“)
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	slijedi (povlači, implikacija), ekvivalentnost
$\forall, \exists$	univerzalni kvantifikator (za svaki), kvantifikator egzistencije (postoji)
$\overline{M}, M'$	zatvarač skupa, derivat (derivacija) skupa
$\varnothing$	prazan skup
$\in, \notin$	element skupa, nije element skupa
$\subset, \subseteq$	pravi podskup, podskup
$\setminus, \Lambda$	razlika, simetrična razlika skupova
$\wedge, \vee, \neg$	konjunkcija, disjunkcija, negacija
$\rightarrow, \leftrightarrow$	implikacija, ekvivalencija
$*$	kompozicija, operacija u grupi
$\top, \perp$	istinito, neistinito
N, R, C, Q (P), Z	skup: prirodnih brojeva, realnih brojeva, kompleksnih brojeva, racionalnih brojeva, cijelih brojeva

$(a, b), [a, b], (a, b]$	interval, segment, poluinterval
$(a_n), \{a_n\}, [a_n]$	beskonačni niz
$\lim, \overline{\lim}, (\underline{\lim})$	limes, gornji (donji)
$\lvert a \rvert$	apsolutna vrijednost, modul
$[x]$	najveće cijelo broja x
i	imaginarna jedinica
$\arg z$, $\operatorname{Arg} z$	argument broja
$\bar{z}, z^*$	konjugirano kompleksni broj
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	realni, imaginarni dio broja
$(a_{ij}), [a_{ij}], \lVert a_{ij} \rVert$	matrica
A^*, A^T	konjugirana matrica, transponirana
rang A, sp A (tr A)	rang matrice, trag matrice
$\lvert a_{ij} \rvert$, det $\lVert a_{ij} \rVert$	determinanta
a, $\overrightarrow{AB}$	vektor
$\lvert a \rvert$	modul, norma vektora
(a, b), a · b, (a · b), (ab), ab	skalarni produkt
a × b, [a · b], [a, b], [ab]	vektorski produkt
(a × b)c, (abc)	mješoviti produkt
Defekt, Ker	defekt, jezgra linearne transformacije
$n!$	faktorijela
$C_n^k, \binom{n}{k}$	binomni koeficijenti
B_n, β_n	Bernoullijevi brojevi
C	Eulerova konstanta
e	broj $e = 2{,}71828\ldots$
$f(x), x \rightarrow f(x)$	funkcija, preslikavanje
e^x, $\exp x$	eksponencijalna funkcija
ln, lg, $\log_a$	logaritam: prirodni, dekadski, po bazi a
f^{-1}, A^{-1}	inverzna funkcija, inverzna matrica
$f * g, f \circ g$	kompozicija funkcija
sin, cos	sinus, kosinus
tg, ctg	tangens, kotangens
sec, cosec	sekans, kosekans
Arcsin, arcsin	Arkus-sinus, glavna vrijednost Arkus-sinusa
Arccos, arccos	Arkus-kosinus, glavna vrijednost Arkus-kosinusa
Arctg, arctg	Arkus-tangens, glavna vrijednost Arkus-tangensa
Arcctg, arcctg	Arkus-kotangens, glavna vrijednost Arkus-kotangensa

sh, Arsh	sinus hiperbolni, Area-sinus hiperbolni
ch, Arch	kosinus hiperbolni, Area-kosinus hiperbolni
th, Arth	tangens hiperbolni, Area-tangens hiperbolni
cth, Arcth	kotangens hiperbolni, Area-kotangens hiperbolni
sch, csch	sekans hiperbolni, kosekans hiperbolni
sup, inf	gornja, donja međa
max, min	maksimum, minimum
sign	funkcija „predznak“ (signum)
Δx, Δy, dx, dy	prirast, diferencijal
f', $\dot{x}$, $\frac{df}{dx}$	derivacija
f'/f	logaritamska derivacija
$\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}$	parcijalne derivacije
grad	gradijent
div, rot	divergencija, rotor
li, Si(si), Ci	integral-logaritam, integral-sinus, integral-kosinus
O, o	veliko O, malo o
B, Γ	beta funkcija, gama funkcija
δ	Kroneckerov simbol (Kroneckerova δ)
Δ	prirast, Laplaceov operator, diferencija
π	broj $\pi = 3{,}14159\ldots$

BELEŠKE